S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1443–1454 (2018) УДК 517.53

DOI 10.17377/semi.2018.15.118 MSC 30D15

ОПИСАНИЕ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ И ФАКТОРИЗАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ L_p-ВЕСОВЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ВАЛИРОНА

Ф.А. ШАМОЯН, О.В. ОХЛУПИНА, Е.В. ТАСОЕВА

Abstract. The paper presents the characterization of root sets of classes of entire functions of the Valiron type with weight, as well as built their factorization representation.

Keywords: an entire function, a factorization representation, root sets, a polynomial, the order of an entire function.

1. Введение

Множество задач комплексного анализа посвящено вопросам характеризации корневых множеств и построению факторизационных представлений различных классов функций.

Начало подобных исследований связано с появлением факторизационных теорем таких классиков анализа, как Ж. Адамар, Э. Борель, К. Вейерштрасс, Р. Неванлинна.

Вопросы описания корневых множеств и факторизации применяются как внутри самого комплексного анализа, так и в других разделах анализа.

Пусть C — комплексная плоскость, $H(C)$ — множество всех целых функций в C, $0 < p < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$.

Обозначим через $A^p_\rho(C)$ следующий класс функций:

Shamoyan, F.A., Okhlupina, O.V., Tasoeva, E.V., Description of root sets and factorization representation of L_p-weight classes of entire functions of Valiron type.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-51-150005).

Поступила 15 мая 2018 г., опубликована 15 ноября 2018 г.

$$A_\rho^p(C) = \left\{ f \in H(C) : \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty \right\}.$$

В этой статье мы получим полное описание корневых множеств и построим факторизационное представление класса $A_\rho^p(C)$.

Отметим, что аналогичные результаты в случае единичного круга были получены в работах [1] и [2].

При $p = 1$ результата этой статьи совпадает с известной теоремой Валирона (см. [3]).

Описание корневых множеств других весовых L_p-классов целых функций получено в работе [4].

2. Классы типа Валирона в случае порядка $\rho \notin N$

Для формулировки основного результата этого параграфа введем дополнительные обозначения. Если $f \in H(C)$, то $Z_f = \{z \in C : f(z) = 0\}$.

Для $q \in N$ через $A_q(z,\zeta)$, $z, \zeta \in C$ обозначим фактор бесконечного произведения Вейерштрасса порядка q:

$$A_q(z,\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{q} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^j\right).$$

Если $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$- последовательность комплексных чисел, $|z_k| \leq |z_{k+1}|$, $k = 1, 2, ...$, $|z_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$, то $n(r) = card\{z_k : |z_k| \leq r\}$, $0 < r < +\infty$.

В случае $Z = Z_f$ соответствующую считающую функцию будем обозначать n_f.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $0 < \rho < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $\rho \notin N$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *$Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ можно представить в виде $Z = Z_f$ для некоторой $f \in A_\rho^p(C)$;*

(2)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p(2^k)}{2^{\rho p k}} < +\infty \tag{1}$$

Доказательство. Сначала заметим, что из простых свойств несобственных интегралов условие сходимости ряда (1) равносильно сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty \tag{2}$$

.

Действительно, ясно, что при $2^k \leq r \leq 2^{k+1}$, $n(2^k) \leq n(r) \leq n(2^{k+1})$:

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^k \rho p} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^p\left(2^m\right)}{2^{(m-1)}\rho p} = 2^{\rho p} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^p\left(2^m\right)}{2^{m\rho p}}.$$

Поэтому из сходимости (1) следует сходимость интеграла (2).

Обратное утверждение следует из монотонности функции $n(r)$ на $R_+ = [0; +\infty)$.

Теперь докажем, что из условия $Z = Z_f$ для некоторой функции $f \in A_\rho^p(C)$ следует сходимость интеграла (2).

Действительно, применяя неравенство Иенсена (см. [5], стр. 35), имеем $n_f(r) \leq \ln M(er, f) + C_f$.

Поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{n_f^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p M(er,f)}{r^{\rho p+1}} dr \leq e^{\rho p} \int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^p M(t,f)}{t^{\rho p+1}} dt < +\infty$.

То есть импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена.

Докажем обратное утверждение, то есть 2) $\Rightarrow$ 1).

Пусть q - целое число, такое, что $q \leq \rho < q+1$. $E_q(z, z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} A_q(z, z_k)$.

Покажем, что $E_q(z, z_k)$ сходится на компактных подмножествах C при

$$E_q(z, z_k) \in A_\rho^p(C).$$

Сначала докажем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{q+1}} < +\infty$ при $q > \rho - 1$.

Заметим, что сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt$.

Предположим сначала, что $1 < p < +\infty$.

Применяя неравенство Гельдера, легко видеть, что для сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt$ достаточно обеспечить сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\left(q+2-\rho-\frac{1}{p}\right)p'}}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, то есть для выполнения оценки $\rho - 1 < q < +\infty$ подберем $q \in N$ таким образом, чтобы выполнялась оценка $\rho - 1 < q < \rho$.

Докажем, что для таких q произведение $E_q(z, z_k) \in A_\rho^p(C)$.

Используя хорошо известную оценку произведения Вейерштрасса (см. [5], с. 22), имеем:

$$\ln M(r, E_q) \leq K_q \left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right), |z| = r.$$

Поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r, E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr \leq K_q^p \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^r t^{-q-1} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+(\rho-q)p}} dr + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(\int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+(\rho-q-1)p}} dr \right)$$

$$= K_q^p (I_1 + I_2)$$

Оценим I_1. С учетом $\rho > q > \rho - 1$ применим неравенство Харди (см. [6], с. 319):

$$I_1 \leq C \int\limits_1^{+\infty} \frac{n^p(t)}{t^{1+\rho p}} dt < +\infty$$

Оценим I_2. Применим снова неравенство Харди, имеем:

$$I_1 \leq \tilde{C} \int\limits_1^{+\infty} \frac{n^p(t)\, t^p}{t^{1+(q+2)p+(\rho-q-1)p}} dt = \tilde{C} \int\limits_1^{+\infty} \frac{n^p(t)}{t^{1+\rho p}} dt < +\infty$$

где $q+1>\rho$.

Следовательно, бесконечное произведение Вейерштрасса с нулями в точках $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A_\rho^p(C)$.

Перейдем к доказательству теоремы при $0<p\leq 1$.

Покажем, что можно построить функцию с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Снова воспользуемся оценкой произведения Вейерштрасса:

$$\ln M(r, E_q) \leq K_q \left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right)$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr \leq K_q^p \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr$$

$$\leq K_q^p \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t) dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t) dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr \right)$$
$$= K_q^p (I_1 + I_2)$$

Оценим каждый из интегралов. Начнем с оценки I_1:

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr = \int\limits_1^{+\infty} r^{qp-1-\rho p} \left(\int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt \right)^p dr.$$

Обозначим внутренний интеграл $I_1^* = \left(\int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt \right)^p$ и оценим его, используя условие $0<p\leq 1$ и неравенство $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ при всех $a,b>0$. Пусть далее $2^m < r \leq 2^{m+1}$. Тогда:

$$I_1^* \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt \right)^p + \left(\int\limits_{2^m}^r \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt \right)^p.$$

Перейдем к оценке сверху интеграла, стоящего под знаком суммы.

$$\left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \tfrac{n(t)}{t^{q+1}}dt\right)^p \leq \left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p \cdot \tfrac{1}{2^{k(q+1)p}} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} dt\right)^p = \left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p \cdot \tfrac{2^{kp}}{2^{kqp+kp}}$$
$$= \tfrac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{kqp}}$$

Так как $2^k \leq t \leq 2^{k+1}$, то справедлива оценка: $\frac{1}{2^{(k+1)pq}} \leq \frac{1}{t^{pq}} \leq \frac{1}{2^{kpq}}$. Поэтому

$$\frac{1}{2^{kpq+pq}} = \frac{1}{2^{kpq} \cdot 2^{pq}} \leq \frac{1}{t^{pq}} \leq \frac{1}{2^{kpq}}, \frac{1}{2^{kpq}} \leq \frac{2^{pq}}{t^{pq}} = \left(\frac{2}{t}\right)^{pq}.$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)}{t^{q+1}}dt\right)^p \leq \left(\frac{2}{2^k}\right)^{pq} \cdot \left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p \leq C \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{n^p(t)}{t^{qp+1}}dt.$$

Итак, имеем:

$$I_1^* \leq C\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \tfrac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt + \tfrac{(n(r))^p}{2^{mp(q+1)}} \cdot (r-2^m)^p \leq C\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \tfrac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt$$
$$+\tfrac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{2^{mp(q+1)}} \cdot \left(2^{m+2}-2^m\right)^p = C\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \tfrac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt + \tfrac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{2^{mp(q+1)}} \cdot 2^{mp}$$

$$= C\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt + \frac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{2^{mpq}}.$$

$$\frac{1}{2^{(m+1)pq}} \leq \frac{1}{t^{pq}} \leq \frac{1}{2^{mpq}}, \frac{1}{2^{mpq} \cdot 2^{pq}} \leq \frac{1}{t^{pq}} \leq \frac{1}{2^{mpq}}, \frac{1}{2^{mpq}} \leq \left(\frac{2}{t}\right)^{pq}.$$

$$I_1^* \leq C\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt + \frac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{t^{pq+1}} \cdot 2^{qp} \leq C\left(\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt + \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt\right)$$

$$= C\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt \leq C\int\limits_{1}^{r} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt.$$

Перейдем к оценке I_1. Имеем:

$$I_1 \leq C\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{m} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt\right) r^{pq}}{r^{1+\rho p}}dr = C\int\limits_{1}^{+\infty} r^{qp-1-\rho p}\left(\sum_{k=0}^{m} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt\right)dr.$$

Итак,

$$I_1 \leq C\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{r^{-qp+1+\rho p}}\left(\int\limits_{1}^{r} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}}dt\right)dr.$$

Теперь поменяем порядок интегрирования в последнем интеграле. Получим:

$$I_1 \leq C \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}} \left(\int\limits_t^{+\infty} \frac{1}{r^{-qp+1+\rho p}} dr \right) dt.$$

Учитывая условие $0 < q < \rho$, получаем:

$$I_1 \leq C_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}} \left(t^{qp-\rho p} - 1 \right) dt \leq C_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}} t^{qp-\rho p} dt = C_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{\rho p+1}} dt$$

Оценка I_1 получена. Заметим, что для сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} r^{qp-1-\rho p} \left(\int\limits_1^{r} \frac{(n(t))^p}{t^{qp+1}} dt \right) dr$ должно выполняться условие: $1 - pq + \rho p > 1$, то есть $q < \rho$.

Приступим к оценке $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t) dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr$.

Предварительно оценим внутренний интеграл вышеуказанным способом. Снова пусть $2^k \leq r < 2^{k+1}$. Тогда, используя условие $0 < p \leq 1$, получаем:

$$I_2^* = \left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right)^p \leq \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right)^p + \left(\sum_{m=k+1}^{+\infty} \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right)^p$$

$$\leq \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right)^p + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \left(\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right)^p$$

$$\leq \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{kp(q+2)}} \cdot 2^{pk} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p \cdot 2^{pm}}{2^{pm(q+2)}} = \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{kp(q+1)}} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{2^{pm(q+1)}}$$
$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{m+1}\right)\right)^p}{2^{pm(q+1)}}$$

Используя снова оценки

$$\frac{1}{2^{(m+2)p(q+1)}} \leq \frac{1}{t^{p(q+1)}} \leq \frac{1}{2^{(m+1)p(q+1)}},$$

$$\frac{1}{2^{mp(q+1)} \cdot 2^{2p(q+1)}} \leq \frac{1}{t^{p(q+1)}} \leq \frac{1}{2^{(m+1)p(q+1)}},$$

$\frac{1}{2^{mp(q+1)}} \leq \frac{2^{2p(q+1)}}{t^{p(q+1)}}$, при $2^{m+1} \leq t \leq 2^{m+2}$, получаем:

$$I_2^* \leq C_1 \sum_{m=k}^{+\infty} \int\limits_{2^{m+1}}^{2^{m+2}} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} dt.$$

Воспользуемся полученной оценкой для дальнейшей оценки интеграла I_2.

$$I_2 \le C_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^{p(q+1)} \sum\limits_{m=k}^{+\infty} \int\limits_{2^{m+1}}^{2^{m+2}} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} dt \right)}{r^{1+\rho p}} dr$$
$$= C_1 \int\limits_1^{+\infty} r^{pq+p-1-\rho p} \left(\sum_{m=k}^{+\infty} \int_{2^{m+1}}^{2^{m+2}} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} \right) dtdr$$

$$\le C_1 \int\limits_1^{+\infty} r^{pq+p-1-\rho p} \int\limits_{2^{k+1}}^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} dtdr \le C_1 \int\limits_1^{+\infty} r^{pq+p-1-\rho p} \int\limits_r^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} dtdr.$$

Изменяя снова порядок интегрирования, получаем:

$$I_2 \le C_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} \int\limits_1^t r^{pq+p-1-\rho p} drdt = C_2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} \left(t^{pq+p-\rho p} - 1 \right) dt$$

$$\le C_2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{(q+1)p+1}} t^{pq+p-\rho p} dt \le C_2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p}{t^{\rho p+1}} dt.$$

Соответственно, интеграл I_2 сходится.
Поэтому, учитывая сходимость интегралов I_1 и I_2, видим, что
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr < +\infty$, причем $\rho - 1 < q < \rho$, $\rho \notin N$, $0 < p < +\infty$.
Теорема доказана полностью. □

3. Классы типа Валирона в случае $\rho \in N$

В случае целых ρ справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $f \in A^p_\rho(C)$, $\rho \in N$. $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$- последовательность комплексных чисел, $|z_k| \le |z_{k+1}|$, $k = 1, 2, ...$, $|z_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *можно представить в виде $Z = Z_f$ для некоторой функции $f \in A^p_\rho(C)$;*

(2) $\delta_f(r) = \left| \sum\limits_{|z_k| \le r} \frac{1}{z_k^\rho} \right|$ *удовлетворяет условиям:*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} < +\infty, \tag{3}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(r))^p dr}{r^{\rho p+1}} < +\infty, \tag{4}$$

где, как и прежде, $n(r)$ — число нулей функции f в круге D_r, $0 < r < +\infty$.

Доказательство. Необходимость условий (3) и (4) непосредственно следует из неравенства Иенсена (см. [3]).

Действительно, имеем $n(r) = card\{z_k : |z_k| \le r\} \le \ln M(er, f) + C_f$, где C_f - некоторая константа, зависящая только от f. Поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(r))^p dr}{r^{\rho p+1}} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(er,f))^p dr}{r^{\rho p+1}} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p dr}{r^{\rho p+1}} < +\infty$ при всех $0 < \rho < +\infty$, $0 < p < +\infty$. Показали выполнимость (4).

Перейдем к доказательству условия (3).

Учитывая неравенство (см.[3]) $\delta_f(r) \le \frac{\ln M(er,f)}{r^\rho}$, получим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p dr}{r^{\rho p+1}} < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $\rho \in N$.

Докажем теперь обратное утверждение.

Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 3) и 4).

Построим функцию $f \in A_\rho^p(C)$, такую, что $Z_f = Z$.

Используем результаты монографии (см. [3]). Зафиксируем $0 < R < +\infty$.

Пусть $\rho \in N$. Положим

$$f_R(z) = \exp\left(z^\rho \sum_{|z_k|<R} \frac{1}{z_k^\rho}\right) \times \prod_{|z_k|<R} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\rho-1} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$$
$$\times \prod_{|z_k|\ge R} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$$

Используя стандартную оценку для произведения Вейерштрасса, полагая, что $R = r$, $r = |z|$, запишем

$$\ln M(r,f) \le \delta_f(r) r^\rho + A_\rho \cdot \left(r^{\rho-1} \int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^\rho} + r^{\rho+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{t^{\rho+2}}\right).$$

Следовательно, получим

$$\left(\frac{\ln M(r,f)}{r^\rho}\right)^p \le (\delta_f(r))^p + \left(\frac{1}{r} \int\limits_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^\rho}\right)^p + \left(r \int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{t^{\rho+2}}\right)^p.$$

Из последней оценки выводим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p dr}{r^{\rho p+1}} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p+1}} \left(\int\limits_0^r \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p dr$$
$$+ \int\limits_1^{+\infty} r^{p-1} \left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+2}}\right)^p dr = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} + I_1 + I_2$$

Перейдем к оценке интегралов I_1, I_2. Сначала предположим, что

$$1 < p < +\infty.$$

Оценим I_1. Применяя неравенство Харди (см. [6], с. 319), получим

$$I_1 \le \frac{p}{\rho} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(n(t)\, t^{1-\rho}\right)^p dt}{t^{p+1}} = \frac{p}{\rho} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(n(t)\right)^p dt}{t^{\rho p+1}} < +\infty.$$

Оценим I_2. Снова применяя неравенство Харди, приходим к

$$I_2 \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(n(t)\right)^p t^{p-1} dt}{t^{\rho+2}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(n(t)\right)^p dt}{t^{\rho p+1}} < +\infty.$$

В случае $1 < p < +\infty$ теорема доказана.
Перейдем к случаю $0 < p \le 1$.
Снова оценим интегралы I_1, I_2 с учётом нового ограничения на параметр p.
Зафиксируем $2^m < r \le 2^{m+1}$, $m \in N$. Пусть $I_{1,1} = \left(\int\limits_0^r \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p$.

$$I_{1,1} \le \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)\, dt}{t^\rho}\right)^p + \left(\int\limits_{2^m}^{r} \frac{n(t)\, dt}{t^\rho}\right)^p.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $n(t) = 0$, $0 \le t \le 1$.
Заметим, что $\left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p \le \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{(k\rho-1)p}}$, $0 \le k \le m-1$.
Таким же образом $\left(\int\limits_{2^m}^{r} \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p \le \frac{(n(r))^p}{2^{mp\rho}} (r-2^m)^p$.
Очевидно, что $\frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{(k\rho-1)p}} \le \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{(n(t))^p dt}{t^{\rho p-p-1}}$, $\frac{(n(r))^p}{2^{mp\rho-p}} \le \int\limits_{2^m}^{r} \frac{n(t)dt}{t^{\rho p-p-1}}$, $0 \le k \le m-1$.
Объединяя эти две оценки, получим $I_1 \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p+1}} \int\limits_0^r \frac{(n(t))^p dt}{t^{\rho p-p-1}} dr$.
Изменяя порядок интегрирования, имеем $I_1 \le \int_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p dt}{t^{\rho p+1}} < +\infty$.
Перейдем к оценке $I_2 \le \int\limits_1^{+\infty} r^{p-1} \left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+2}}\right)^p dr$.
Учитывая предыдущие оценки, запишем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p dr}{r^{\rho p+1}} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta(r))^p dr}{r} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p+1}} \left(\int_0^r \frac{n(t)dt}{t}\right)^p dr +$$
$$+ \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{1-p}} \left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+2}}\right)^p dr$$

Аналогично соответствующие интегралы обозначим через I_1, I_2.
Оценим I_1. Пусть $2^m < r \le 2^{m+1}$, $m \in N$.
Положим $I_{1,1} \le \left(\int\limits_0^r \frac{n(t)dt}{t}\right)^p$. Тогда $I_{1,1} \le \sum\limits_{k=0}^{m-1} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p + \left(\int\limits_{2^m}^{r} \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p$.
Не ограничивая общности, предположим, что $n(t) = 0$ при $0 \le t \le 1$.
Запишем, что $\left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)dt}{t^\rho}\right)^p \le \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{kp\rho-p}}$, $0 \le k \le m-1$.
Тогда $I_{2,2} = \left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+2}}\right)^p \le \sum\limits_{k=m}^{+\infty} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+2}}\right)^p \le \sum\limits_{k=m}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{(\rho+1)kp}}$.

В то же время несложно заметить, что $\frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{(\rho+1)kp}} \leq \int_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{(n(t))^p dt}{t^{(\rho+1)p+1}}$.
Суммируя эти неравенства по $k = n, n+1, ...$

Получаем $I_{2,2} \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \int\limits_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} \frac{(n(t))^p dt}{t^{(\rho+1)p+1}} \leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(n(t))^p dt}{t^{(\rho+1)p+1}}$.

Используя последнюю оценку, окончательно получим

$$I_2 \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{r^{1-p}} \int\limits_r^{+\infty} \frac{(n\,(t))^p\,dt}{t^{(\rho+1)p+1}} dr.$$

Изменяя порядок интегрирования, имеем

$$I_2 \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n\,(t))^p}{t^{(\rho+1)p+1}} \int\limits_0^{t} \frac{1}{r^{1-p}} dr dt = \frac{1}{p} \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n\,(t))^p\,dt}{t^{\rho p+1}}.$$

Таким образом, окончательно получаем $I_2 \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(t))^p dt}{t^{\rho p+1}} < +\infty$.

Теорема полностью доказана. $\square$

4. Построение факторизационного представления классов $A^p_\rho\,(C)$.

В этом параграфе мы построим факторизационное представление классов $A^p_\rho\,(C)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть ρ - нецелое неотрицательное число, $0 < p < +\infty$, $\rho - 1 < q < \rho$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f \in A^p_\rho\,(C)$;

2) f допускает следующее представление

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right) \exp\left(h\,(z)\right), \quad \textit{где}$$

$z \in C$, $h\,(z)$ - многочлен степени меньше ρ, m - некоторое неотрицательное целое число, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^k \rho p} < +\infty$.

Доказательство. Сначала докажем, что из утверждения 1) следует 2). Пусть $f \in A^p_\rho\,(C)$. И пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - множество корней функции f. Тогда по теореме 1: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^k \rho p} < +\infty$. По той же теореме бесконечное произведение $E_q\,(z, z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{q} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$ сходится при $\rho - 1 < q < \rho$ и принадлежит $A^p_\rho\,(C)$.

Следовательно, функция $g\,(z) = \frac{f(z)}{E_q(z, z_k)}$, $z \in C$, принадлежит $H\,(C)$, при этом $g\,(z) \neq 0$, $z \in C$.

Докажем, что $g(z) = \exp\left(h\,(z)\right)$, где $h\,(z)$ — многочлен степени m, $m < \rho$. Сначала докажем, что $g \in A^p_\rho\,(C)$.

Учитывая равенство $\ln|g(z)| = \ln|f(z)| - \ln|E_q(z, z_k)|$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|g\left(re^{i\phi}\right)\right| d\phi \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\phi}\right)\right| d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^- \left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi, \tag{5}$$

где $\ln^-|a| = \max(0, -\ln|a|)$,$a \in C$.

Теперь, учитывая равенство

$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^-\left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi$,

применим равенство Иенсена:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^-\left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi + \int_{0}^{r} \frac{n(t)}{t} dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|E_q\left(re^{i\phi}, z_k\right)\right| d\phi$$

$$\le \ln M(r, E_q). \tag{6}$$

Из (5) и (6) получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|g\left(re^{i\phi}\right)\right| d\phi \le C\ln M(r, E_q) + \ln M(r, f) \tag{7}$$

Учитывая простую оценку (см. [5]), для произвольных $0 < r < R$ запишем:

$$\ln M(r, g) \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R+r}{R-r}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|g\left(Re^{i\phi}\right)\right| d\phi.$$

Положив $R = 2r$, из оценки (7) получим

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \tfrac{(\ln M(r,g))^p}{r^{p\rho+1}} dr \le C_1\left(\int\limits_{1}^{+\infty} \tfrac{(\ln M(2r,E_q))^p}{r^{p\rho+1}} dr + \int\limits_{1}^{+\infty} \tfrac{(\ln M(2r,f))^p}{r^{p\rho+1}} dr\right)$$
$$= C_2\left(\int_1^{+\infty} \tfrac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{p\rho+1}} dr + \int\limits_{1}^{+\infty} \tfrac{(\ln M(r,f))^p}{r^{p\rho+1}} dr\right) < +\infty$$

То есть $g \in A_\rho^p(C)$, при этом $g(z) \ne 0$, $z \in C$.

Следовательно, $g(z) = \exp(h(z))$, где $h(z)$ - целая функция. Положим $u(z) = Re h(z)$, $z \in C$. Не ограничивая общности, предположим, что $u(z) \ge 1$.

Используя принадлежность функции g классу $A_\rho^p(C)$, имеем

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\left(\ln \tilde{M}(r, u)\right)^p}{r^{p\rho+1}} dr < +\infty, \tag{8}$$

где $\tilde{M}(r, u) = \max(u, 0)$. Учитывая теорему о среднем и применяя рассуждения, изложенные выше, из (8) выводим: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(\ln M(r,u))^p}{r^{p\rho+1}} dr < +\infty$.

Используя монотонность функции $\ln M(r, u)$ и сходимость последнего интеграла, получаем $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{M(R,u)}{R^{\rho p}} = 0$.

Исходя из формулы Шварца, запишем: $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k$, где $k < \rho p$. При этом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,h))^p}{r^{p\rho+1}} dr < +\infty$. Но $M(r,h) \approx |h_m| \, r^m$. Следовательно, получаем, что $m < \rho$.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Таким же образом, исходя из теоремы 2, устанавливается

Теорема 4. *Пусть $\rho \in N$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(1) $f \in A^p_\rho(C)$;

(2) *f допускает следующее представление*

$f(z) = z^m \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right) \exp(h(z))$, *где $z \in C$, $h(z)$ — многочлен степени меньше, чем ρ, m - некоторое неотрицательное целое число, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^p(2^k)}{2^k \rho p} < +\infty$, $\delta_f(r) = \left| \sum\limits_{|z_k| \le r} \frac{1}{z_k^\rho} \right|$ удовлетворяет условию $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} < +\infty$.* □

References

[1] F.A. Shamoyan, *Parametric representation and description of root sets of weight classes of functions holomorphic in a circle* , Sibirsk. Math Zh. **40**: 6 (1999), 1452–1470. MR1741095

[2] F.A. Shamoyan, E.N. Shubabko, *Introduction to the theory of weights L^p -classes of meromorphic functions*, Bryansk: Group of Companies «Desyatochka», 2009.

[3] R.P. Boas, *Entire Functions*, New York: Academic Press, Inc., 1954. MR0068627

[4] O.V. Okhlupina, *Generalization of Valiron's theorem for the case entire functions with weight*, Bulletin of the Bryansk State University, RIO BSU, Bryansk, **4** (2015), 400–408.

[5] B.Ya. Levin, *Lecture for the entire functions*, Amer. Math Soc., Transl. Math Monographs, **150**, 1996.

[6] D.V. Prokhorov, *Hardy's inequality with three measures*, Proceedings of the Mathematical Institute. V.A. Steklova, **255** (2006), 233–245. MR2302834

[7] I. Stein, *Singular integrals and differential properties of functions*, Moscow: Mir, 1973. MR0348563

Fajzo Agitovich Shamoyan
Saratov state University,
Astrahanskaya ul., 83,
410012, Saratov, Russia
E-mail address: shamoyanfa@yandex.ru

Ol'ga Valentinovna Okhlupina
Bryansk state University of engineering and technology,
prospekt Stanke Dimitrova, 3,
241037, Bryansk, Russia
E-mail address: helga131081@yandex.ru

Ekaterina Vladimirovna Tasoeva
Bryansk state University,
Bezhickaya ul., 14,
241036, Bryansk, Russia
E-mail address: eka3543628@yandex.ru