

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1463–1484 (2018)

DOI 10.33048/semi.2018.15.120

УДК 517.925

MSC 34C05

О ПОВЕДЕНИИ В ЦЕЛОМ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМ ДАРБУ  
С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Е. П. ВОЛОКИТИН, В. М. ЧЕРЕСИЗ

ABSTRACT. We study the local and global behavior of trajectories of the differential systems of the form  $\dot{x} = x + P_3(x, y)$ ,  $\dot{y} = y + Q_3(x, y)$  where  $P_3(x, y)$  and  $Q_3(x, y)$  are homogeneous cubic polynomials with a common factor.

**Keywords:** polynomial systems, singular points, Poincaré equator, phase portraits.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = x + P_n(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y),$$

где  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  — однородные многочлены  $n$ -й степени,  $n \geq 2$ . Мы будем называть такую систему системой типа Дарбу степени  $n$ .

Системы вида (1) рассматривались различными авторами, см. [1]–[3] и процитированную там литературу. В этих работах изучались такие вопросы, касающиеся систем вида (1), как интегрируемость, наличие или отсутствие предельных циклов, локальные и глобальные фазовые портреты и т. д.

В частности, много работ посвящено исследованию квадратичных систем типа Дарбу, то есть систем, в которых  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  — однородные многочлены второй степени. Подробности об этих работах и полученных результатах можно найти в [4], [5, с. 219–244].

---

VOLOKITIN, E.P., CHERESIZ, V.M., ABOUT THE WHOLE BEHAVIOR OF TRAJECTORIES OF DARBOUX SYSTEMS WITH CUBIC NONLINEARITIES.

© 2018 Волокитин Е.П., Чересиз В.М.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 18-01-00057).

Поступила 10 октября 2018 г., опубликована 23 ноября 2018 г.

В случае  $n = 3$  система (1) называется кубической системой Дарбу

$$(2) \quad \dot{x} = x + P_3(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_3(x, y).$$

В [2], [3] с применением некоторых результатов из [6] было получено описание всех глобальных фазовых портретов системы (2) с точностью до топологической эквивалентности при условии, что многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  взаимно простые.

В настоящей работе мы рассматриваем систему (2) в предположении, что многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  могут иметь общие множители. В этом случае появляются новые фазовые портреты системы (2) по сравнению с обнаруженными в [2], [3].

В разделе 1 мы приводим некоторые результаты и сведения, которые понадобятся нам в ходе исследования.

Второй раздел посвящён исследованию кубических систем Дарбу при наличии общих множителей, отличных от числового, у многочленов  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$ . Как это имело место в [2], [3], [6] глобальный фазовый портрет системы (2) однозначно задаётся строением её экватора Пуанкаре. При выполнении некоторых соотношений между коэффициентами многочленов особые точки на экваторе становятся точками типа линейный ноль (матрица линейного приближения равна нулю). Мы наблюдаем здесь более сложные с топологической точки зрения типы расщепления окрестности особой точки на траектории. Для исследования таких особых точек мы будем использовать специальный приём, который относится к теории разрешения особенностей [7], [8] и заключается во введении обобщённых полярных координат (blow-up). Наличие сложных особых точек приводит к появлению новых фазовых портретов по сравнению с обнаруженными ранее в [2], [3]. В итоге мы получаем полный с точностью до топологической эквивалентности список глобальных фазовых портретов системы (2).

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим кубическую систему Дарбу

$$(2) \quad \dot{x} = x + P_3(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_3(x, y),$$

где  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  — однородные многочлены 3-й степени.

В работе [3] было доказано следующее утверждение

**Теорема 1.** *Кубическая система типа Дарбу (2), у которой многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  взаимно просты, имеет 27 типов фазовых портретов, схемы которых приведены на рис. 1.*

В настоящей работе мы исследуем систему (2) в предположении, что многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  не являются взаимно простыми и опишем новые (с точностью до топологической эквивалентности) по сравнению с теоремой 1 фазовые портреты этой системы, которые имеют место в таком случае.

Следуя [2], [3], [6], мы будем строить глобальные фазовые портреты, опираясь на исследование экватора Пуанкаре системы (2), поскольку глобальный фазовый портрет однозначно задаётся строением экватора.

Характер конечных особых элементов фазового портрета определяется следующими утверждениями

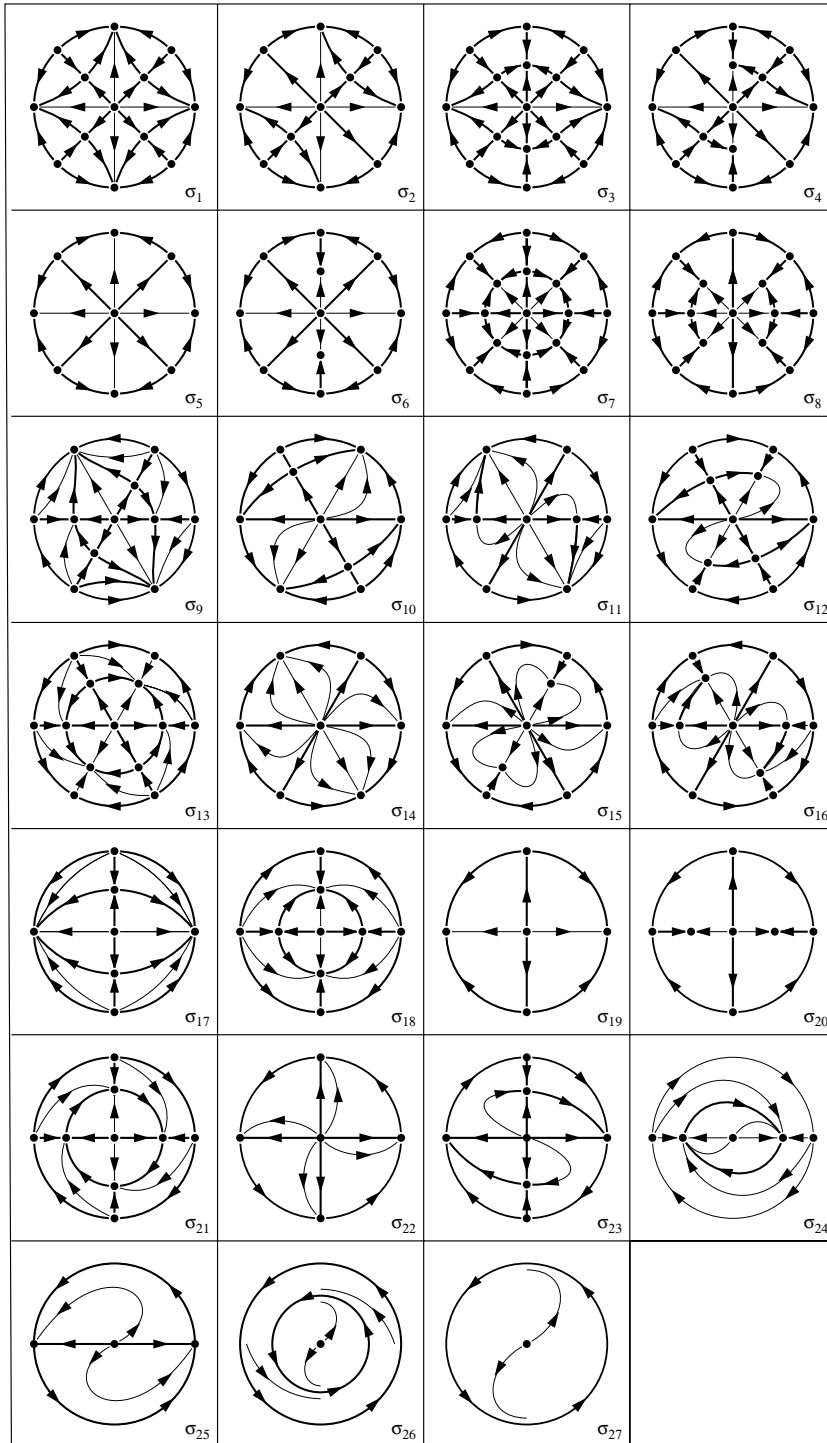


Рис. 1. Фазовые портреты системы (2) в случае, когда многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  взаимно просты

**Теорема 2** ([3]). *Начало координат  $O(0, 0)$  является особой точкой и имеет тип дискретического узла (тривиальная особая точка).*

*Пусть  $(x_0, y_0)$  — нетривиальная особая точка системы (2), расположенная в конечной части плоскости. Тогда*

(а) *Прямая  $y_0x - x_0y = 0$  является инвариантной прямой системы (2).*

(б) *На любой инвариантной прямой, проходящей через начало координат, либо нет конечных нетривиальных особых точек, либо их две и они расположены симметрично относительно начала координат.*

(с) *Каждая из нетривиальных особых точек устойчива относительно начальных данных, лежащих на содержащей её инвариантной прямой.*

*Все конечные особые точки элементарны и являются узлами, седлами или седло-узлами. Если особая точка будет седло-узлом, то её узловой сектор будет устойчивым, а нейтральное многообразие трансверсально инвариантной прямой, содержащей эту точку.*

**Теорема 3** ([2]). *Система (2) имеет единственный устойчивый предельный цикл (огибающий начало координат) тогда и только тогда, когда*

$$g(\vartheta) \neq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

$$g(0) \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0,$$

где

$$f(\vartheta) = \cos \vartheta P_3(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \sin \vartheta Q_3(\cos \vartheta, \sin \vartheta),$$

$$g(\vartheta) = \cos \vartheta Q_3(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta P_3(\cos \vartheta, \sin \vartheta).$$

*Если уравнение  $g(\vartheta) = 0$  имеет вещественные корни на отрезке  $[0, 2\pi]$ , система (2) не имеет замкнутых траекторий.*

Поведение в целом траекторий системы (2) определяется поведением траекторий компактифицированной системы вблизи экватора Пуанкаре.

Экватор Пуанкаре отвечает оси  $\{z = 0\}$  системы

$$(3) \quad \dot{u} = Q_3(1, u) - uP_3(1, u), \quad \dot{z} = -z(z^2 + P_3(1, u)),$$

которая является результатом компактификации Пуанкаре системы (2) и получается из неё с использованием замены

$$u = \frac{y}{x}, \quad z = \frac{1}{x}.$$

Если  $P_3(0, y) \equiv 0$ , для исчерпывающего изучения экватора Пуанкаре нужно ещё изучить окрестность начала координат системы, которая получается из (2) с помощью замены

$$v = \frac{x}{y}, \quad z = \frac{1}{y}.$$

Подробнее см. [8], [9].

Особые точки  $(u, z) = (u_i, 0)$  на экваторе определяются как корни уравнения

$$G(u) \equiv Q_3(1, u) - uP_3(1, u) = 0.$$

Матрица линейного приближения правых частей системы (3) в окрестности точки  $(u_i, 0)$  имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} G'(u_i) & 0 \\ 0 & -P_3(1, u_i) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы  $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_1^{(i)} = G'(u_i), \lambda_2^{(i)} = -P_3(1, u_i),$$

собственные векторы

$$v_1^{(i)} = (1, 0)^T, v_2^{(i)} = (0, 1)^T.$$

Если  $\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} \neq 0$ , особая точка будет гиперболической и имеет характер седла или узла.

В случае, если равно 0 только одно из собственных чисел  $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}$  особая точка является полугиперболической, и её характер определяется следующим утверждением

**Теорема 4** ([9], Теорема 65). Пусть точка  $O(0, 0)$  является изолированным состоянием равновесия системы

$$\dot{x} = P_2^*(x, y), \dot{y} = y + Q_2^*(x, y),$$

где  $P_2^*(x, y), Q_2^*(x, y)$  — аналитические в окрестности начала координат функции, разложение которых в ряды состоит из членов не ниже второго порядка. Пусть далее  $y = \varphi(x)$  есть решение уравнения  $y + Q_2^*(x, y) = 0$  в окрестности точки  $O(0, 0)$ , а разложение по степеням  $x$  функции  $\psi(x) = P_2^*(x, \varphi(x))$  имеет вид  $\psi(x) = \Delta_m x^m + \dots$ , где  $m \geq 2, \Delta_m \neq 0$ . Тогда: 1) При  $m$  нечётном точка  $O(0, 0)$  есть топологический узел или топологическое седло. 2) Если  $m$  чётно, то точка  $O(0, 0)$  есть так называемый седло-узел, т.е. состояние равновесия, окрестность которого состоит из узлового и двух седловых секторов.

Случаи  $\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} \neq 0$  и  $\lambda_1^{(i)} = 0, \lambda_2^{(i)} \neq 0$  были рассмотрены в [2], [3], [6]. Условие  $\lambda_2^{(i)} \neq 0$  выполняется в том случае, когда многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  не имеют общих множителей.

**Теорема 5** ([6], [3]). Пусть в системе (2) многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  не имеют общего множителя.

Тогда все особые точки на бесконечности элементарны и являются узлами, седлами или седло-узлами. Бесконечно удалённая особая точка, лежит на конце прямой  $y = u_i x$ , тогда и только тогда, когда  $u_i$  — действительный корень уравнения

$$G(u) \equiv Q_3(1, u) - uP_3(1, u) = 0.$$

При этом прямая  $y = u_i x$  является инвариантным множеством системы (2), и нет других инвариантных прямых, проходящих через начало координат. Особая точка будет седло-узлом в том и только в том случае, если кратность корня равна двум или четырём; при этом нейтральное многообразие седло-узла лежит в экваторе сферы Пуанкаре. Сепаратрисы седла и седло-узлов направлены вдоль экватора и инвариантных прямых.

Отметим, что седло-узлы, упоминаемые в теоремах 2, 5, присутствуют на одном инвариантном луче одновременно.

Допустим, многочлены  $P_3(x, y), Q_3(x, y)$  имеют общий линейный множитель  $l(x, y) = mx - ny, n \neq 0$ . Тогда  $l(x, y)$  будет множителем однородного многочлена  $F(x, y) = yQ_3(x, y) - xP_3(x, y)$ , и  $u^* = m/n$  будет корнем многочлена  $G(u)$ , задающего координату точки покоя на экваторе. При этом очевидно, что  $P_3(1, u^*) = 0$ , то есть  $\lambda_1^{(2)} = 0$ .

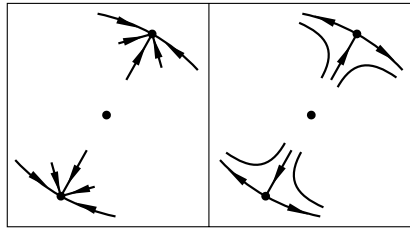


Рис. 2. Бесконечно удалённые особые точки системы (2) в случае, когда  $G'(u_i) \neq 0$ ,  $P_3(1, u_i) = 0$

Если многочлены  $P_3(x, y)$ ,  $Q_3(x, y)$  имеют общий линейный множитель  $y - u_i x$  и  $u = u_i$  — простой корень уравнения  $G(u) = 0$ , получим, что  $\lambda_i^{(1)} = G'(u_i) \neq 0$ ,  $\lambda_i^{(2)} = 0$ : особая точка  $(u_i, 0)$  является полугиперболической особой точкой системы (3), и строение её окрестности по-прежнему описывается теоремой 4.

Вдоль инвариантной прямой  $l(x, y) = 0$  система (2) превращается в систему  $\dot{x} = x$ ,  $\dot{y} = y$ , и особая точка на экваторе устойчива для начальных данных с этой прямой. Конечные особые точки на прямой  $l(x, y) = 0$  отсутствуют. Поскольку  $\lambda_1^{(i)} \neq 0$ , экватор не может служить нейтральным многообразием для седло-узла. Таким образом, в рассматриваемом случае особая полугиперболическая точка на экваторе будет узлом или седлом, причём в случае седла сепаратрисы направлены вдоль экватора и инвариантного луча, то есть качественно картина такая же, как в случае, когда особая точка на экваторе гиперболическая, см. рис. 2.

Нильпотентные особые точки в системе (3) имеют места.

Если многочлены  $P_3(x, y)$ ,  $Q_3(x, y)$  имеют общий множитель  $l = y - u_i x$  и  $u_i$  является кратным корнем многочлена  $G(u)$ , имеем  $P_3(1, u_i) = G(u_i) = G'(u_i) = 0$ . В таком случае точка  $(u_i, 0)$  будет особой точкой типа линейный ноль системы (3), и её окрестность может быть устроена более сложным образом, чем в рассмотренных ранее случаях.

Для изучения таких особых точек будем использовать приём, который называется разрешением особенностей (раздутие, desingularization, blow-up), [7], [8].

Будем считать, что многочлены  $P_3(x, y)$ ,  $Q_3(x, y)$  имеют общим множителем  $l(x, y) = y$ , и система

$$(3) \quad \dot{u} = Q_3(1, u) - uP_3(1, u), \quad \dot{z} = -z(z^2 + P_3(1, u)),$$

имеет в начале координат особую точку типа линейный ноль. В таком случае  $P_3(1, 0) = G(0) = G'(0) = 0$ , поэтому  $P_3(x, y) = p_2 x^2 y + p_3 x y^2 + p_4 y^3$ ,  $G(u) = g_2 u^2 + g_3 u^3 + g_4 u^4$ .

Система (3) имеет вид

$$(4) \quad \dot{u} = g_2 u^2 + g_3 u^3 + g_4 u^4, \quad \dot{z} = -z(z^2 + p_2 u + p_3 u^2 + p_4 u^3).$$

Отметим, что фазовый портрет системы (4) симметричен относительно оси  $\{z = 0\}$ . Раздутие точки покоя  $O(0, 0)$  системы (4) состоит в переходе к обобщённым полярным координатам  $u = r^\alpha \cos \vartheta$ ,  $z = r^\beta \sin \vartheta$  и изучении полученной системы на цилиндре  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . При такой замене точка  $O(0, 0)$  "переходит"

в ось  $\{r = 0\}$ , то есть в окружность  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ , и малым изменениям координат  $u, z$  вблизи точки покоя соответствуют большие изменения координат  $\vartheta, r$  в положительной полуокрестности  $r \gtrsim 0$ .

Целочисленные положительные веса переменных  $\alpha, \beta$  выбираются на основе анализа диаграммы Ньютона системы (4), которая в нашем случае строится следующим образом [8].

Пусть

$$S = \{(0, 2)\} \cup \{(i, 0) : g_{i+1} \neq 0 \text{ или } p_{i+1} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Множество  $S$  называется носителем системы и генерируется по ненулевым коэффициентам многочленов, стоящих в правой части.

Многоугольник Ньютона системы (4) — это выпуклая оболочка  $\Gamma$  множества

$$\Pi = \bigcup_{(r,s) \in S} \{(r', s') : r' \geq r, s' \geq s\}.$$

Диаграмма Ньютона системы (4) — это объединение  $\gamma$  компактных сторон  $\gamma_k$  выпуклого множества  $\Gamma$ .

В нашем случае диаграмма Ньютона состоит из единственного отрезка  $\gamma_1$ , левый конец которого упирается в точку  $(r, s) = (0, 2)$ , а правый лежит на оси  $Or$  в точке  $(i, 0)$ , где

- 1)  $i = 1$ , если  $g_2 \neq 0$  или  $p_2 \neq 0$ ,
- 2)  $i = 2$ , если  $g_2 = p_2 = 0$ ,  $g_3 \neq 0$  или  $p_3 \neq 0$ ,
- 3)  $i = 3$ , если  $g_2 = g_3 = p_2 = p_3 = 0$ ,  $g_4 \neq 0$  или  $p_4 \neq 0$ ,

см. рис. 3.

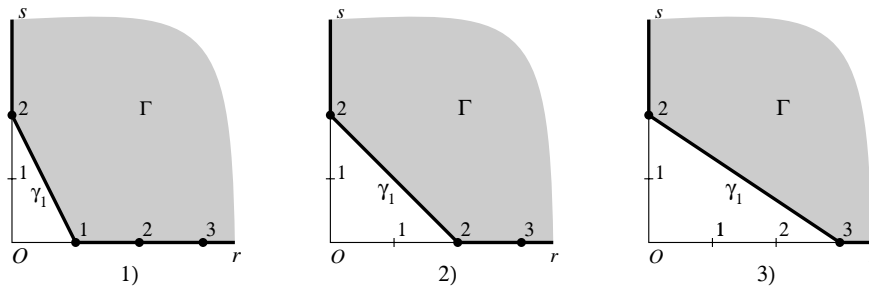


Рис. 3

Пусть точки отрезка  $\gamma_1$  удовлетворяют уравнению  $\alpha r + \beta s = d$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(\alpha, \beta) = 1$ . В таком случае мы можем взять  $\alpha, \beta$  в качестве квазиоднородных весов для раздутия. В случае 1)  $\alpha = 2, \beta = 1$ , в случае 2)  $\alpha = \beta = 1$ , в случае 3)  $\alpha = 2, \beta = 3$ .

### 2. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИСТЕМЫ (2)

В [6] доказано следующее утверждение

**Теорема 6.** Для любой однородной кубической системы  $\dot{x} = P_3(x, y), \dot{y} = Q_3(x, y)$  существует линейная замена переменных  $\sigma \in GL(2; \mathbb{R}), \sigma = \{x' = ax + by, y' = cx + dy\}$ , переводящая эту систему в одну и только в одну из канонических форм

$$\dot{x} = \Delta \mathcal{P}_i(x, y), \dot{y} = \Delta \mathcal{Q}_i(x, y), \Delta = ad - bc \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10,$$

зде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1 &= p_1 x^3 + [p_2 + 3(1 + \mu^4)]x^2 y + p_3 x y^2 - 6\mu^2 y^3, \\
 \mathcal{Q}_1 &= 6\mu^2 x^3 + p_1 x^2 y + [p_2 - 3(1 + \mu^4)]x y^2 + p_3 y^3, \quad \mu > 1; \\
 \mathcal{P}_2 &= p_1 x^3 + [p_2 - (\alpha/2)]x^2 y + p_3 x y^2 + \alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_2 &= p_1 x^2 y + [p_2 + (\alpha/2)]x y^2 + p_3 y^3, \quad \alpha = \pm 1; \\
 \mathcal{P}_3 &= p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 x y^2 + \mu y^3, \\
 \mathcal{Q}_3 &= \mu x^3 + p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3, \quad \mu \neq 0; \\
 \mathcal{P}_4 &= p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2 y + (p_3 + 6\alpha)x y^2 - 6\alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_4 &= p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha)x y^2 + (p_3 - 6\alpha)y^3, \quad \alpha = \pm 1; \\
 \mathcal{P}_5 &= p_1 x^3 + p_2 x^2 y + (p_3 + 2)x y^2 - 4y^3, \\
 \mathcal{Q}_5 &= p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + (p_3 - 2)y^3; \\
 \mathcal{P}_6 &= p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_6 &= 6\mu^2 x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha)x y^2 + p_3 y^3, \quad \alpha = \pm 1; \\
 \mathcal{P}_7 &= p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_7 &= p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3, \quad \alpha = \pm 1; \\
 \mathcal{P}_8 &= p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha\mu)x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_8 &= \alpha x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha\mu)x y^2 + p_3 y^3, \quad \alpha = \pm 1, \quad \mu > -1/3, \quad \mu \neq 1/3; \\
 \mathcal{P}_9 &= p_1 x^3 + (p_2 - \alpha)x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3, \\
 \mathcal{Q}_9 &= \alpha x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + \alpha)x y^2 + p_3 y^3, \quad \alpha = \pm 1; \\
 \mathcal{P}_{10} &= p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 x y^2, \\
 \mathcal{Q}_{10} &= p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Если обозначить  $F_i(x, y) = x\mathcal{Q}_i(x, y) - y\mathcal{P}_i(x, y)$ , то

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y) &= 6\mu^2 x^4 - 6(1 + \mu^4)x^2 y^2 + 6\mu^2 y^4, \quad \mu > 1; \\
 F_2(x, y) &= \alpha y^2(x^2 - y^2), \quad \alpha = \pm 1; \\
 F_3(x, y) &= \mu(x^4 - y^4), \quad \mu \neq 0; \\
 F_4(x, y) &= 6\alpha y^2(y - x)^2, \quad \alpha = \pm 1; \\
 F_5(x, y) &= 4(y - x)y^3; \\
 F_6(x, y) &= \alpha y^2(6x^2 + y^2), \quad \alpha = \pm 1; \\
 F_7(x, y) &= \alpha y^4, \quad \alpha = \pm 1; \\
 F_8(x, y) &= \alpha(x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4), \quad \alpha = \pm 1, \quad \mu > -1/3, \quad \mu \neq 1/3; \\
 F_9(x, y) &= \alpha(x^2 + y^2)^2, \quad \alpha = \pm 1; \\
 F_{10}(x, y) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Сделаем в системе (2) замену переменных  $\sigma$ , предложенную в процитированной теореме. Тогда система (2) превратится в систему типа Дарбу

$$\dot{x} = x + \Delta\mathcal{P}_i(x, y), \quad \dot{y} = y + \Delta\mathcal{Q}_i(x, y),
 \tag{7}$$



где многочлены  $\mathcal{P}_i(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_i(x, y)$  взяты из предложенного списка (5).

Рассмотрим строение экватора Пуанкаре системы (7) при наличии общих множителей у многочленов  $\mathcal{P}_i(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_i(x, y)$  в каждом из случаев 1–10, перечисленных в (5). Очевидно, эти общие множители могут быть только множителями многочленов  $F_i(x, y)$ , перечисленных в (6).

Напомним, что во всех случаях фазовый портрет системы (3) симметричен относительно оси  $\{z = 0\}$ , а глобальный фазовый портрет системы (2) симметричен относительно начала координат.

Случай 1.

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 + 3(1 + \mu^4))x^2y + p_3xy^2 - 6\mu^2y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(6\mu^2x^3 + p_1x^2y + (p_2 - 3(1 + \mu^4))xy^2 + p_3y^3), \\ F_1(x, y) &= \Delta(6\mu^2x^4 - 6(1 + \mu^4)x^2y^2 + 6\mu^2y^4), \\ G_1(u) &= \Delta(6\mu^2 - 6(1 + \mu^4)u^2 + 6\mu^2u^4), \quad \mu > 1.\end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$\dot{u} = G_1(u), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta\mathcal{P}_1(1, u)).$$

Уравнение  $G_1(u) = 0$  имеет четыре простых корня  $u_{1,2} = \pm\mu$ ,  $u_{3,4} = \pm 1/\mu$ , поэтому  $G'(u_i) \neq 0$ . Если  $\mathcal{P}_1(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_1(x, y)$  имеют общие множители вида  $l_i = y - u_i x$ , то  $\mathcal{P}_1(1, u_i) = 0$ , и как отмечалось выше, особые точки  $O_i(u_i, 0)$  будут топологическими узлами или седлами. В этом случае все возможные варианты строения экватора уже были рассмотрены нами ранее в работе [2], соответствующие глобальные фазовые портреты приведены на рис. 1 ( $\sigma_1$ – $\sigma_8$ ).

**Замечание 1.** В [2] было показано, что кубическая система типа Дарбу, у которой многочлены  $\mathcal{P}_3(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_3(x, y)$  взаимно простые, не может иметь на экваторе четыре седла. Можно показать, что этот факт справедлив и в рассматриваемом случае, когда многочлены  $\mathcal{P}_3(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_3(x, y)$  имеют общий множитель.

**Замечание 2.** В дальнейшем мы, как правило, сосредоточимся на отыскании фазовых портретов, не содержащихся в списке  $\sigma_1$ – $\sigma_{27}$ . Мы будем называть такие портреты новыми. Очевидно, новые портреты будут появляться только тогда, когда на экваторе появляются точки, отличные от топологических узлов, седел и седло-узлов.

Случай 2.

$2_+$ :  $\alpha = 1$ .

Система (2) имеет вид

$$(8) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 - 1/2)x^2y + p_3xy^2 + y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(p_1x^2y + (p_2 + 1/2)xy^2 + p_3y^3), \\ F_2(x, y) &= \Delta y^2(x^2 - y^2), \quad G_2(u) = \Delta u^2(1 - u^2).\end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$(9) \quad \dot{u} = \Delta u^2(1 - u^2), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta(p_1 + (p_2 - 1/2)u + p_3u^2 + u^3)).$$

Здесь  $u = 0$  является корнем уравнения  $G_2(u) = 0$  кратности 2:  $G_2(0) = G_2'(0) = 0$ .

Предположим, многочлены  $\mathcal{P}_2(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_2(x, y)$  имеют общий множитель  $l = y$ . В таком случае  $p_1 = 0$ . Поэтому

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta((p_2 - 1/2)x^2y + p_3xy^2 + y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta((p_2 + 1/2)xy^2 + p_3y^3), \\ F_2(x, y) &= \Delta y^2(x^2 - y^2), \quad G_2(u) = \Delta u^2(1 - u^2). \end{aligned}$$

Система (9) приобретает вид

$$(11) \quad \dot{u} = \Delta u^2(1 - u^2), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta((p_2 - 1/2)u + p_3u^2 + u^3))$$

и имеет в начале координат  $O(0, 0)$  особую точку типа линейный ноль.

Для её исследования применяем квазиоднородное раздутие с весами  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ . Нужные веса  $\alpha$ ,  $\beta$  подбираем, исходя из рис. 3(1).

Замена  $u = r^2 \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$  и некоторые упрощающие преобразования переводит систему (11) в систему

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -4 \cos \vartheta \sin \vartheta (\Delta p_2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta) - 4\Delta p_3 r^2 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta - 2\Delta r^4 \cos^4 \vartheta \sin \vartheta, \\ \dot{r} &= r(2\Delta \cos^3 \vartheta + \Delta(1 - 2p_2) \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - 2 \sin^4 \vartheta) - 2\Delta p_3 r^3 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta - \\ &\quad - 2r^5 \Delta \cos^3 \vartheta, \end{aligned}$$

которую нам достаточно исследовать в положительной полуокрестности оси  $\{r = 0\}$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ . Последнее условие является следствием того факта, что фазовый портрет системы (11) симметричен относительно оси  $Oz$ .

Система (12) имеет на оси  $\{r = 0\}$  точки покоя  $\bar{O}_0(0, 0)$ ,  $\bar{O}_1(\pi/2, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$ ,  $\bar{O}_3(\vartheta_3, 0)$ , где  $\vartheta_3$  определяется из соотношения

$$(13) \quad \Delta p_2 \cos \vartheta_3 + \sin^2 \vartheta_3 = 0.$$

Уравнение (13) имеет единственный корень  $\vartheta_3 \in (0, \pi)$ , если  $\Delta p_2 \neq 0$ , при этом

$$\begin{aligned} &\text{если } \Delta p_2 < 0, \quad \vartheta_3 \in (0, \pi/2), \quad \cos \vartheta_3 > 0; \\ &\text{если } \Delta p_2 > 0, \quad \vartheta_3 \in (\pi/2, \pi), \quad \cos \vartheta_3 < 0; \\ &\text{если } p_2 = 0, \quad \text{корень } \vartheta_3 \text{ отсутствует.} \end{aligned}$$

Матрицы линейного приближения системы (12) в точках  $\bar{O}_0$ – $\bar{O}_3$  имеют вид

$$J_0 = \Delta \begin{pmatrix} -4p_2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \Delta \begin{pmatrix} 4p_2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  матрицы  $J_3$ , вычисленные с учётом (13), задаются выражениями

$$\lambda_1 = -4 \sin^4 \vartheta_3 \left(1 + \frac{2 \sin^2 \vartheta_3}{\Delta^2 p_2^2}\right) < 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\sin^4 \vartheta_3 (\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)}{\Delta^2 p_2^3}.$$

Таким образом, если  $p_2 \neq 0$ , все рассматриваемые точки покоя являются гиперболическими узлами или седлами. Различные варианты представлены на рис. 4.

Если  $p_2 = 0$ , из теоремы 4 следует, что точки  $\bar{O}_0$ ,  $\bar{O}_2$  будут полугиперболическими узлами, седлами или седло-узлами. Рассматривая векторное поле (12) в точках инвариантной оси  $\{r = 0\}$ , заключаем, что  $\bar{O}_0$  будет седлом, если  $\Delta > 0$ , и устойчивым узлом, если  $\Delta < 0$ ,  $\bar{O}_2$  будет устойчивым узлом, если  $\Delta > 0$ , и седлом, если  $\Delta < 0$ .

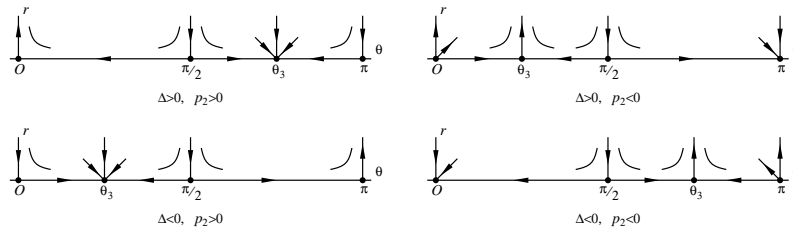


Рис. 4. Особые точки системы системы (12) на оси  $\{r = 0\}$  в случае  $p_2 \neq 0$

В итоге мы получаем различные варианты раздутия с  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  и локальные фазовые портреты в окрестности точки  $O(0, 0)$  системы (11), они приведены на рис. 5 для случая, когда  $\Delta > 0$ .

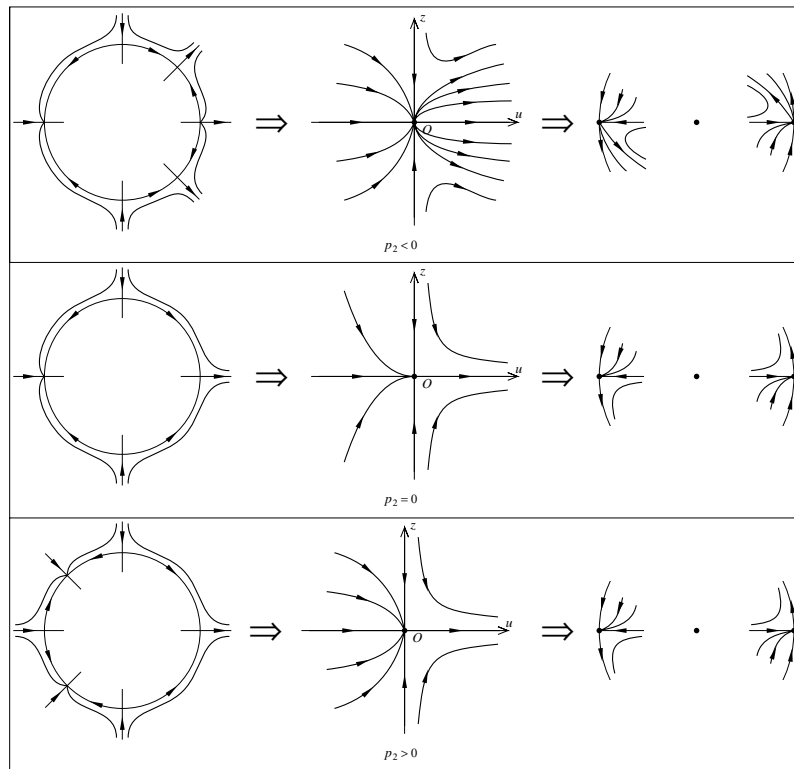


Рис. 5. Раздутия, локальные фазовые портреты системы (11) и соответствующие бесконечно удалённые особые точки системы (10) ( $\Delta > 0$ )

На этом рисунке для изображения раздутия (левый фрагмент рисунка) мы представляем полуцилиндр  $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$  как внешность круга  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$ . Набор траекторий, который мы видим на  $E$  вблизи окружности  $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$  даёт представление о фазовом портрете системы (11) вблизи начала координат: для его получения нужно «стянуть» окружность в точку,

получим средний фрагмент. Справа показан получающийся фазовый портрет системы (10) в окрестности пересечения экватора Пуанкаре с осью  $\{y = 0\}$ .

Если  $\Delta < 0$ , локальные фазовые портреты получаются зеркальным отражением относительно вертикальной оси, а портреты в окрестности экватора — отражением относительно горизонтальной оси.

Отметим, что здесь и далее мы не следим за направлениями, с которыми траектории стремятся к началу координат.

Мы видим, что если  $p_2 \geq 0$  особая точка  $O(0, 0)$  системы (10) будет точкой типа седло-узел, о которой идёт речь в теореме 5. В случае, когда  $p_2 < 0$ , мы имеем дело с особой точкой нового типа. Её окрестность содержит *два* узловых сектора в отличие от обычного седло-узла. Будем называть её двойным седло-узлом.

Система (11) кроме состояния равновесия  $O(0, 0)$  имеет на оси  $\{z = 0\}$  ещё две точки покоя  $O_1(-1, 0)$ ,  $O_2(1, 0)$ .

Линейное приближение системы (11) в окрестности этих точек задаётся матрицами

$$J_1 = \Delta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & p_2 - p_3 + 1/2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \Delta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -p_2 - p_3 - 1/2 \end{pmatrix}.$$

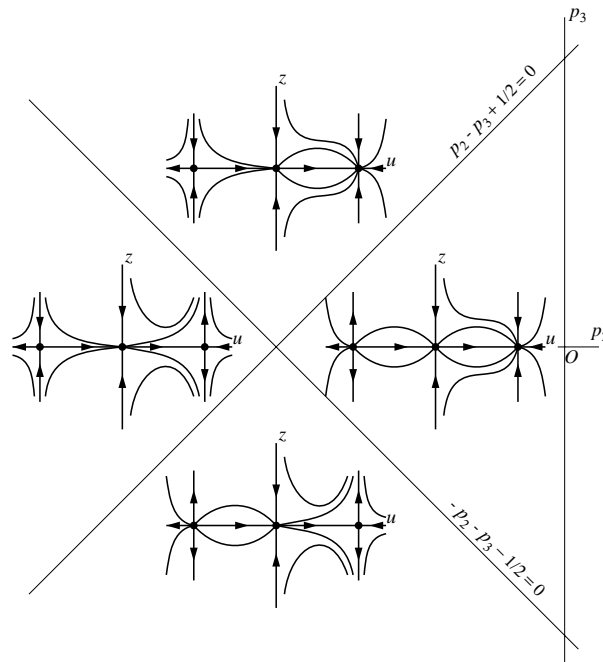


Рис. 6. Фазовые портреты системы (11) в окрестности оси  $\{z = 0\}$  при наличии в начале координат двойного седло-узла

Мы видим, что точки покоя  $O_1, O_2$  при различных значениях  $p_2, p_3$  будут гиперболическими или полугиперболическими узлами и седлами. Рис. 6. даёт представление об имеющихся вариантах строения окрестности оси  $\{z = 0\}$  в случае  $\Delta > 0$ . Мы не стали приводить на этом рисунке варианты, отвечающие соотношению  $p_2 \geq 0$ , поскольку в этом случае мы сталкиваемся только

с особыми точками, упомянутыми в теореме 5; получающиеся в этом случае фазовые портреты уже приведены на рис. 1.

Строение экватора однозначно определяет структуру глобального фазового портрета системы (10). Мы получаем 4 новых фазовых портрета системы (2), которые приведены на рис. 7. На этом и других рисунках (включая рис. 1) жирными линиями выделены сепаратрисы (границы седловых секторов).

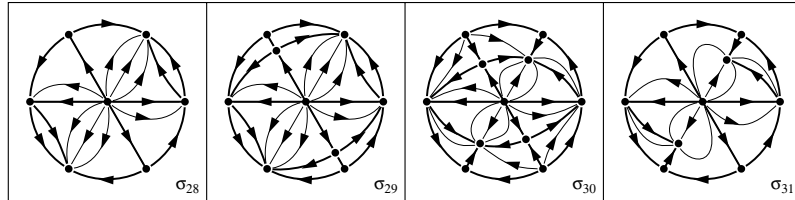


Рис. 7. Фазовые портреты системы (10) в случае  $p_2 < 0, \Delta > 0$

Уравнение  $G_2(u) = 0$  имеет простые корни  $u = -1$  или  $u = 1$ . Если многочлены  $\mathcal{P}_2(x, y), \mathcal{Q}_2(x, y)$  в системе (10) имеют общий множитель, содержащий сомножитель  $x + y$  или  $x - y$ , то как показано выше, соответствующие особые точки на экваторе будут полугиперболическими узлами или седлами, и их наличие не влечёт появления новых фазовых портретов: портреты будут содержаться среди  $\sigma_9$ – $\sigma_{12}$ , если среди сомножителей общего множителя не содержится  $y$ , или среди  $\sigma_{28}$ – $\sigma_{31}$ , если  $y$  содержится.

Фазовые портреты системы (10) при  $\Delta < 0$  топологически эквивалентны фазовым портретам этой системы, изображённым нами для случая  $\Delta > 0$ .

2<sub>-</sub> :  $\alpha = -1$ .

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 - 1/2)x^2y + p_3xy^2 - y^3), \\ \dot{y} &= y + (\Delta(p_1x^2y + (p_2 + 1/2)xy^2 + p_3y^3), \\ F_2(x, y) &= -\Delta y^2(x^2 - y^2), \quad G_2(u) = -\Delta u^2(1 - u^2). \end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$\dot{u} = -\Delta u^2(1 - u^2), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta(p_1 + (p_2 - 1/2)u + p_3u^2 - u^3)).$$

Необходимые выкладки практически повторяют проделанные в предыдущем случае и приводят к тем же результатам с очевидными несущественными изменениями.

В итоге заключаем, что в случае 2 возникают новые фазовые портреты только типов  $\sigma_{28}$ – $\sigma_{31}$ .

Случай 3.

Система (2) имеет вид

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta \mathcal{P}_3(x, y), \quad \dot{y} = y + \Delta \mathcal{Q}_3(x, y), \\ F_3(x, y) &= \mu \Delta (x^4 - y^4), \quad G_3(u) = \mu \Delta (1 - u^4), \quad \mu \neq 0. \end{aligned}$$

Экватор Пуанкаре системы (14) устроен просто. Уравнение  $G_3 = 0$  имеет два простых вещественных корня  $u = \pm 1$ , задающих инвариантные прямые

$x \pm y = 0$ . Бесконечно удалённые особые точки, расположенные в точках пересечения прямых с экватором, будут гиперболическими или полугиперболическими узлами или седлами. Глобальные фазовые портреты однозначно восстанавливаются по экватору и не являются новыми, они уже были приведены на рис. 1 ( $\sigma_{17}$ – $\sigma_{20}$ ).

Случай 4.

$4_+ : \alpha = 1$ .

Система (2) имеет вид

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 - 3)x^2y + (p_3 + 6)xy^2 - 6y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(p_1x^2y + (p_2 + 3)xy^2 + (p_3 - 6)y^3), \\ F_4(x, y) &= 6\Delta y^2(x - y)^2, \quad G_4(u) = 6\Delta u^2(1 - u)^2. \end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$(16) \quad \dot{u} = 6\Delta u^2(1 - u)^2, \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta(p_1 + (p_2 - 3)u + (p_3 + 6)u^2 - 6u^3)).$$

Уравнение  $G_4(u) = 0$  имеет корни  $u = 0, u = 1$ , каждый кратности 2,  $G_4(0) = G'_4(0) = 0, G_4(1) = G'_4(1) = 0$ . Если многочлены  $\mathcal{P}_4(x, y), \mathcal{Q}_4(x, y)$  не имеют общих множителей, обе точки на экваторе будут седло-узлами из теоремы 5 и фазовый портрет будет портретом типа  $\sigma_{21}$ – $\sigma_{23}$ . Если же общий множитель имеется, то он содержит сомножителем либо  $y$ , либо  $x - y$ , и тогда хотя бы одна из точек покоя системы (16) будет иметь тип линейный ноль, появятся новые фазовые портреты.

Подобно тому, как это было сделано при рассмотрении случая 2, можно показать, что, если

$$(17) \quad p_1 = 0, \quad p_2 < 0, \quad \Delta \leq 0,$$

точка  $O(0, 0)$  будет иметь тип двойного седло-узла. Если  $p_2 > 0$ , точка  $O(0, 0)$  будет седло-узлом.

Точка  $O_1(1, 0)$  будет линейным нолём при условии, что  $p_1 + p_2 + p_3 = 3$ ; при этом она будет двойным седло-узлом, если

$$(18) \quad p_1 + p_2 + p_3 = 3, \quad p_2 + 2p_3 < 6,$$

и седло-узлом если  $p_2 + 2p_3 \geq 6$ . В этом можно убедиться, перенося начало координат в точку  $O_1$  и применяя раздутие с весами  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  вновь подобно тому, как это было сделано при рассмотрении случая 2.

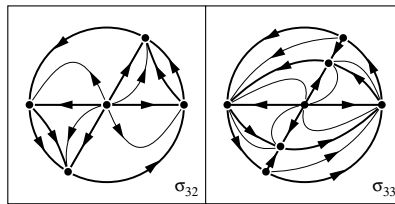


Рис. 8. Фазовые портреты системы (15)

Условия (17)–(18) несовместны. При выполнении каждого из них экватор Пуанкаре системы (15) одну точку типа седло-узел (с устойчивым или неустойчивым узловым сектором) и одну типа двойной седло-узел. Возникающие новые фазовые портреты  $\sigma_{32}$ – $\sigma_{33}$  приведены на рис. 8.

Рассмотрение случая  $\alpha = -1$  не приводит к появлению фазовых портретов, отличающихся от обнаруженных.

Случай 5.

Система (2) имеет вид

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_1x^3 + p_2x^2y + (p_3 + 2)xy^2 - 4y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(p_1x^2y + p_2xy^2 + (p_3 - 2)y^3), \\ F_5(x, y) &= -4\Delta y^3(x - y), \quad G_5(u) = -4\Delta u^3(1 - u). \end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$(20) \quad \dot{u} = -4\Delta u^3(1 - u), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta(p_1 + p_2u + (p_3 + 2)u^2 - 4u^3)).$$

Уравнение  $G_5(u) = 0$  имеет корень  $u = 0$  кратности 3 и простой корень  $u = 1$ . Если  $y$  является общим множителем многочленов  $\mathcal{P}_5(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_5(x, y)$ ,  $p_1 = 0$ ; начало координат  $O(0, 0)$  будет точкой покоя типа линейный ноль системы (20). Диаграмма Ньютона имеет вид, как на рис. 3(1), если  $p_2 \neq 0$ , или же, как на рис. 3(2), если  $p_2 = 0$ . Для исследования сложной точки покоя применяем раздутье с весами  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  или же с весами  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ .

Пусть  $p_2 \neq 0$ .

Замена  $u = r^2 \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$  и некоторые упрощающие преобразования переводит систему (20) в систему

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -2 \cos \vartheta \sin \vartheta (\Delta p_2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta) - 2\Delta p_3 r^2 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta + 4\Delta r^4 \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \equiv \\ &\equiv \Phi(\vartheta, r), \\ \dot{r} &= -r \sin^2 \vartheta (\Delta p_2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta) - \Delta r^3 \cos^2 \vartheta (4 \cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta + p_3 \sin^2 \vartheta) + \\ &+ 4\Delta r^5 \cos^3 \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \equiv \Psi(\vartheta, r), \end{aligned}$$

которую нужно исследовать в положительной полуокрестности оси  $\{r = 0\}$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ .

Система (21) имеет на оси  $\{r = 0\}$  точки покоя  $\bar{O}_0(0, 0)$ ,  $\bar{O}_1(\pi/2, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$ ,  $\bar{O}_3(\vartheta_3, 0)$ , где  $\vartheta_3$  определяется из соотношения

$$\Delta p_2 \cos \vartheta_3 + \sin^2 \vartheta_3 = 0.$$

Уравнение имеет единственный корень  $\vartheta_3 \in (0, \pi)$ , если  $\Delta p_2 \neq 0$ , при этом

$$\begin{aligned} &\text{если } \Delta p_2 < 0, \quad \vartheta_3 \in (0, \pi/2), \quad \cos \vartheta_3 > 0; \\ &\text{если } \Delta p_2 > 0, \quad \vartheta_3 \in (\pi/2, \pi), \quad \cos \vartheta_3 < 0; \\ &\text{если } p_2 = 0, \quad \text{корень } \vartheta_3 \text{ отсутствует.} \end{aligned}$$

Матрицы линейного приближения системы (21) в точках  $\bar{O}_0$ – $\bar{O}_3$  имеют вид

$$J_0 = \Delta \begin{pmatrix} -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \Delta \begin{pmatrix} 2p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

где

$$\lambda_1 = -2 \sin^4 \vartheta_3 \left(1 + 2 \frac{\sin^2 \vartheta_3}{\Delta^2 p^2}\right) < 0.$$

Таким образом, поскольку  $p_2 \neq 0$ ,  $\bar{O}_1$  представляет собой гиперболическое седло, а точки  $\bar{O}_0$ ,  $\bar{O}_2$ ,  $\bar{O}_3$  являются полугиперболическими, и их тип определяется на основе теоремы 4.

Перепишем функцию  $\Phi(\vartheta, r)$  в виде

$$\Phi(\vartheta, r) = -2\Delta p_2 \vartheta + [2\Delta p_2 \vartheta - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta (\Delta p_2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta) - 2\Delta p_3 r^2 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta + 4\Delta r^4 \cos^4 \vartheta \sin \vartheta],$$

при этом выражение в квадратных скобках имеет 2-й порядок малости.

Чтобы исследовать точку  $O_0(0, 0)$  мы должны в наших обозначениях найти функцию  $\vartheta = \varphi(r)$  как решение уравнения  $\Phi(\vartheta, r) = 0$  и представить функцию  $\psi(r) = \Psi(\varphi(r), r)$  в виде

$$\Psi(\varphi(r), r) = \alpha_m r^m + \dots, \alpha_m \neq 0.$$

Мы видим, что  $\varphi(r) \equiv 0$ . В таком случае

$$\Psi(\varphi(r), r) = -4\Delta r^3 + 4\Delta r^5.$$

На основе теоремы 4 заключаем, что точка  $O_0(0, 0)$  будет узлом, если  $p_2 > 0$ , и седлом, если  $p_2 < 0$ .

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что точка  $O_2(\pi, 0)$  будет узлом, если  $p_2 < 0$ , и седлом, если  $p_2 > 0$ .

Чтобы исследовать точку  $\bar{O}(\vartheta_3, 0)$ , сделаем в системе (21) замену  $\vartheta \rightarrow \vartheta + \vartheta_3$ . Получим систему

$$\dot{\vartheta} = \Phi^*(\vartheta, r) \equiv \Phi(\vartheta + \vartheta_3) = \lambda_1 \vartheta + \dots, \quad \dot{r} = \Psi^*(\vartheta, r) \equiv \Psi(\vartheta + \vartheta_3).$$

В данном случае функция  $\varphi^*(r)$ , являющаяся решением уравнения  $\Phi^*(\vartheta, r) = 0$ , имеет вид<sup>1</sup>

$$\varphi^*(r) = \frac{p_3 \sin^3 \vartheta_3}{p_2 (\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)} r^2 + \dots,$$

а требуемое разложение функции  $\psi^*(r)$  записывается в виде

$$\psi^*(r) = \Psi^*(\varphi^*(r), r) = -\frac{2 \sin^6 \vartheta_3 (\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)}{\Delta^3 p_2^4} r^3 + \dots$$

Принимая в внимание, что  $\lambda_1 < 0$ , заключаем, что точка  $\bar{O}_3(0, 0)$  будет узлом, если  $\Delta > 0$ , и седлом, если  $\Delta < 0$ .

На рис. 9 приведены различные варианты распределения особых точек системы (21) на отрезке  $[0, \pi]$ .

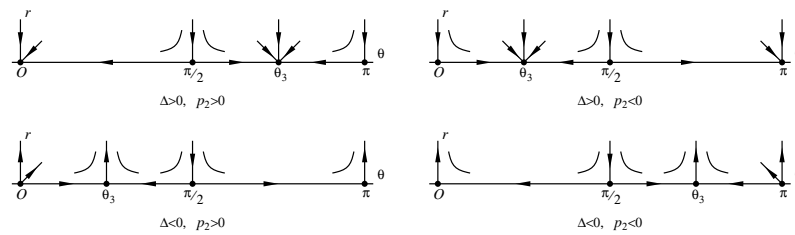


Рис. 9. Особые точки системы системы (21) на оси  $\{r = 0\}$  в случае  $p_2 \neq 0$

Видно, что при  $\Delta > 0$  особая точка системы  $O(0, 0)$  системы (20) будет устойчивым узлом.

<sup>1</sup>Мы использовали систему *Mathematica*.



Если  $\Delta < 0$ , мы получаем новый тип особой точки, окрестность которой содержит четыре седловых сектора и один неустойчивый узловой сектор, рис. 10, 11.

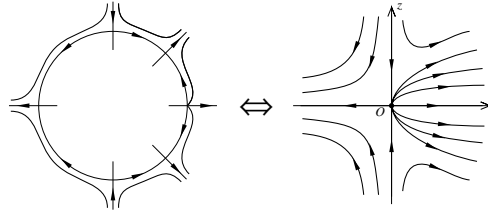


Рис. 10. Раздутие и локальный фазовый портрет системы (20) в случае  $p_1 = 0, p_2 > 0$

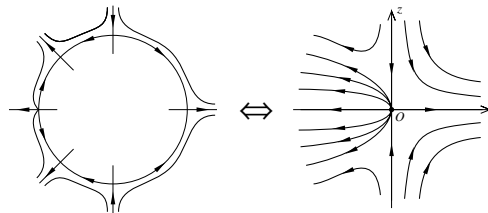


Рис. 11. Раздутие и локальный фазовый портрет системы (20) в случае  $p_1 = 0, p_2 < 0$

Вторая особая точка  $O_1(1, 0)$  системы (20) имеет матрицу линейного приближения

$$J_1 = \Delta \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & p_2 + p_3 - 2 \end{pmatrix}$$

и является гиперболическим узлом или седлом, если  $p_2 + p_3 \neq 2$ , и полугиперболическим узлом или седлом если  $p_2 + p_3 = 2$ .

Мы получаем два фазовых портрета  $\sigma_{34}$ – $\sigma_{35}$ , которые являются новыми для системы (2), рис. 12.

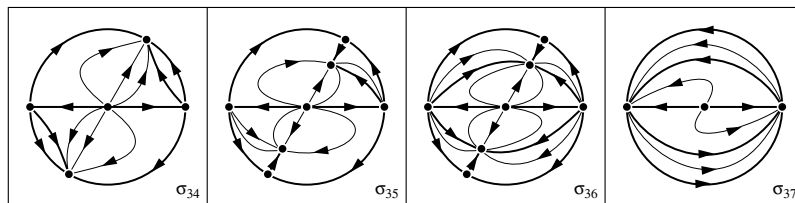


Рис. 12. Фазовые портреты системы (19) в случае  $p_1 = 0, p_2 \neq 0$  ( $\sigma_{34}, \sigma_{35}$ ) и в случае  $p_1 = p_2 = 0, p_3 > 2$  ( $\sigma_{36}$ ); фазовый портрет системы (26) в случае  $p_1 = 0, p_2 < 0$  ( $\sigma_{37}$ )

Пусть  $p_1 = 0, p_2 = 0$ .  
Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_3 + 2)xy^2 - 4\Delta y^3, \\ \dot{y} &= y + \Delta(p_3 - 2)y^3, \\ F_5^2(x, y) &= 4\Delta y^3(y - x), \quad G_5(u) = 4\Delta u^3(u - 1); \end{aligned}$$

$$(22) \quad \dot{u} = -4\Delta u^3(1 - u), \quad \dot{z} = -z^3 - \Delta(p_3 + 2)u^2z + 4\Delta u^3z.$$

Для исследования точки покоя  $O(0, 0)$  используем раздутие с весами  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  (см. рис. 3(2)):  $u = r \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$ .

Получим систему

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -\cos \vartheta \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \Delta(p_3 - 2) \cos^2 \vartheta), \\ \dot{r} &= -r(4\Delta \cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta + \Delta(p_3 + 2) \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta) + 4\Delta r^2 \cos^3 \vartheta. \end{aligned}$$

Система (23) имеет на оси  $\{r = 0\}$  точки покоя  $\bar{O}_0(0, 0)$ ,  $\bar{O}_1(\pi/2, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$ . Кроме того, если  $\Delta(p_3 - 2) < 0$ , имеется ещё две точки покоя  $\bar{O}_4(\vartheta_4, 0)$ ,  $\bar{O}_5(\vartheta_5, 0)$ , где  $\vartheta_4$ ,  $\vartheta_5$  — корни уравнения

$$\sin^2 \vartheta + \Delta(p_3 - 2) \cos^2 \vartheta = 0.$$

Все эти точки элементарны и могут быть исследованы с помощью стандартного линейного анализа. Перебор возникающих возможностей позволяет заключить, что точка  $O(0, 0)$  будет топологическим узлом, если  $\Delta > 0$ , и седлом, если  $\Delta < 0$ ,  $p_3 - 2 \leq 0$ .

Если  $\Delta < 0$ ,  $p_3 - 2 > 0$  мы получаем новый вариант строения окрестности точки покоя типа линейный ноль в системе (22), представленный на рис. 13.

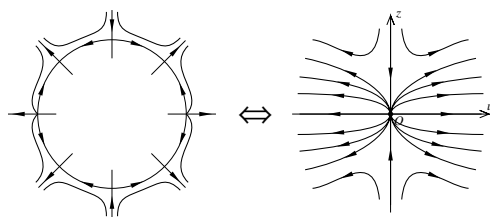


Рис. 13. Раздутие и локальный фазовый портрет системы (22) в случае  $\Delta < 0$ ,  $p_3 > 2$

Вторая точка покоя системы (22)  $O_1(1, 0)$  при  $\Delta < 0$ ,  $p_3 > 2$  будет гиперболическим седлом.

Получаем новый фазовый портрет  $\sigma_{36}$ , рис. 12.

Случай 6.

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(6\mu^2 x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha) x y^2 + p_3 y^3), \\ F_6(x, y) &= \Delta \alpha y^2 (6x^2 + y^2), \quad G_6(u) = \Delta \alpha u^2 (6 + u^2), \quad \alpha = \pm 1, \quad \mu > 1. \end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$\dot{u} = \Delta \alpha u^2 (6 + u^2), \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta \mathcal{P}_6(1, u)).$$

Уравнение  $G_6(u) = 0$  имеет единственный вещественный корень  $u = 0$  кратности 2. Вместе с тем  $y$  не является общим множителем многочленов  $\mathcal{P}_6(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_6(x, y)$ , так как  $\mu \neq 0$ . Поэтому единственная особая точка  $u = 0$  на экваторе будет седло-узлом, о котором идёт речь в теореме 5. Новых фазовых портретов в случае 6 не появляется.

Случай 7.

Система (2) имеет вид

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta \mathcal{P}_7(x, y) \equiv x + \Delta(p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 x y^2 - \alpha y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta \mathcal{Q}_7(x, y) \equiv y + \Delta(p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3), \\ F_7(x, y) &= \Delta \alpha y^4, \quad G_7(u) = \Delta \alpha u^4, \quad \alpha = \pm 1. \end{aligned}$$

Система (4) имеет вид

$$(25) \quad \dot{u} = \Delta \alpha u^4, \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta \mathcal{P}_7(1, u)).$$

$7_+ : \alpha = 1$ .

Система (24) имеет вид

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta(p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 x y^2 - y^3), \\ \dot{y} &= y + \Delta(p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3), \\ F_7(x, y) &= \Delta y^4, \quad G_7(u) = \Delta u^4. \end{aligned}$$

Система (25) имеет вид

$$(27) \quad \dot{u} = \Delta u^4, \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta(p_1 + p_2 u + p_3 u^2 - u^3)).$$

Уравнение  $G_7(u) = 0$  имеет единственный корень  $u = 0$  кратности 4. Если  $y$  является общим множителем многочленов  $\mathcal{P}_7(x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_7(x, y)$ , имеем  $p_1 = 0$ , система (27) имеет вид

$$(28) \quad \dot{u} = \Delta u^4, \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta p_2 u + \Delta p_3 u^2 - \Delta u^3).$$

Точка  $O(0, 0)$  имеет тип линейный ноль. Пусть  $p_2 \neq 0$ . Тогда применяем раздутье  $u = r^2 \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  с весами  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  (рис. 3(1)).

Получим

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -2 \cos \vartheta \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \Delta p_2 \cos \vartheta) - 2 \Delta p_3 r^2 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta + \Delta r^4 \cos^4 \vartheta \sin \vartheta, \\ \dot{r} &= -r \sin^2 \vartheta (\sin^2 \vartheta + \Delta p_2 \cos \vartheta) - \Delta p_3 r^3 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \Delta r^5 \cos^3 \vartheta. \end{aligned}$$

Система (29) имеет на оси  $\{r = 0\}$  точки покоя  $\bar{O}_0(0, 0)$ ,  $\bar{O}_1(\pi/2, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$ ,  $\bar{O}_3(\vartheta_3, 0)$ , где  $\vartheta_3$  определяется из уравнения

$$\Delta p_2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta = 0.$$

Матрицы линейного приближения в этих точках суть

$$J_0 = \Delta \begin{pmatrix} -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \Delta \begin{pmatrix} 2p_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_1 = 2 \cos \vartheta_3 \sin^2 \vartheta_3 (\Delta p_2 - 2 \cos \vartheta_3) = -2 \sin^2 \vartheta_3 (\sin^2 \vartheta_3 + 2 \cos^2 \vartheta_3) < 0$ .

Равновесие  $\bar{O}_1(\vartheta_1, 0)$  является простым седлом.

Точки  $\bar{O}_0(, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$ ,  $\bar{O}_3(\vartheta_3, 0)$  являются полугиперболическими, и их тип определяется на основе теоремы 4.

Поскольку прямые  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = \pi$  инвариантны, нетрудно видеть, что полу-гиперболические состояния равновесия  $\bar{O}_0(0, 0)$ ,  $\bar{O}_2(\pi, 0)$  будут седло-узлами, при этом

если  $\Delta \geq 0$ ,  $p_2 > 0$ , в полуплоскости  $r > 0$  лежат седловые секторы;

если  $\Delta \geq 0$ ,  $p_2 < 0$ , в полуплоскости  $r > 0$  лежат узловые секторы.

Чтобы исследовать точку  $\bar{O}(\vartheta_3, 0)$ , сделаем в системе (29) замену  $\vartheta \rightarrow \vartheta + \vartheta_3$ . Получим систему

$$\dot{\vartheta} = \Phi^*(\vartheta, r) \equiv \Phi(\vartheta + \vartheta_3) = \lambda_1 \vartheta + \dots, \quad \dot{r} = \Psi^*(\vartheta, r) \equiv \Psi(\vartheta + \vartheta_3).$$

В данном случае функция  $\vartheta = \varphi^*(r)$ , являющаяся решением уравнения  $\Phi^*(\vartheta, r) = 0$ , имеет вид<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \varphi^*(r) = & \frac{p_3 \sin^3 \vartheta_3}{p_2(\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)} r^2 + \\ & + \frac{\sin^5 \vartheta_3 (\Delta^4 p_2^4 (p_2 + 4p_3^2) + \Delta^2 p_2^2 (4p_2 + 7p_3^2) \sin^3 \vartheta_3 + 2(2p_2 + p_3^2) \sin^4 \vartheta_3)}{2\Delta p_2^3 (\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)^3 \vartheta_3} r^4 + \dots, \end{aligned}$$

а требуемое разложение функции  $\psi^*(r) = \Psi^*(\varphi(r), r)$  записывается в виде

$$\psi^*(r) = \Psi^*(\varphi^*(r), r) = -\frac{\sin^8 \vartheta_3 (\Delta^2 p_2^2 + 2 \sin^2 \vartheta_3)}{2\Delta^4 p_2^5} r^5 + \dots$$

Принимая в внимание, что  $\lambda_1 < 0$ , заключаем, что точка  $\bar{O}_3(0, 0)$  будет узлом, если  $p_2 > 0$ , и седлом, если  $p_2 < 0$ .

Возможные варианты распределения особых точек системы (29) и раздутья особой точки типа линейный ноль системы (28) совпадают с приведёнными на рис. 4, 5.

Рассматриваемая особая точка является единственной на экваторе Пуанкаре системы (26). Получаем новый фазовый портрет  $\sigma_{37}$ , рис. 12.

Если  $p_2 = 0$ ,  $p_3 \neq 0$ , рассматриваем систему

$$\dot{u} = \Delta u^4, \quad \dot{z} = -z(z^2 + \Delta p_3 u^2 - \Delta u^3).$$

Применяем раздутье  $u = r \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$  (см. рис. 3(2)). Рассуждая аналогично предыдущему, заключаем, что если  $\Delta p_3 > 0$ , имеем фазовый портрет  $\sigma_{25}$ , если  $\Delta p_3 < 0$ , имеем фазовый портрет  $\sigma_{37}$ .

Если  $p_2 = p_3 = 0$ , то для исследования точки  $O(0, 0)$  системы (27) следует применить раздутье с весами  $(\alpha, \beta) = (2, 3)$  (см. рис. 3(3)).

Проще однако заметить, что в данном случае система (27) сводится к системе

$$(30) \quad \dot{x} = x - \Delta y^3, \quad \dot{y} = y,$$

интегралом которой является рациональная функция

$$H(x, y) = \frac{2x}{y} + \Delta y^2.$$

С помощью интеграла  $H(x, y)$  мы без труда восстанавливаем глобальный фазовый портрет системы (30). Бесконечно удалённая особая точка является седло-узлом, фазовый портрет имеет тип  $\sigma_{25}$ .

Изучение случая, когда  $\alpha = -1$ , не приводит к появлению новых фазовых портретов.

<sup>2</sup>Мы использовали систему *Mathematica*.

Случай 8.

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \Delta\mathcal{P}_8(x, y) \equiv x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 - 3\alpha\mu)x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3), \\ \dot{y} &= y + x + \Delta\mathcal{Q}_8(x, y) \equiv y + \Delta(\alpha x^3 + p_1x^2y + (p_2 + 3\alpha\mu)xy^2 + p_3y^3), \\ F_8(x, y) &= \Delta\alpha(x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4), \\ G_8(u) &= \Delta\alpha(1 + 6\mu u^2 + u^4), \quad \alpha = \pm 1, \quad \mu > -1/3, \quad \mu \neq 1/3.\end{aligned}$$

Уравнение  $G_8(u) = 0$  в рассматриваемом случае может иметь только простые корни. Поэтому бесконечно удалённые точки могут быть только гиперболическими или полугиперболическими. Новых фазовых портретов в случае 8 не появляется.

Случай 9.

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \Delta\mathcal{P}_9(x, y) \equiv x + \Delta(p_1x^3 + (p_2 - \alpha)x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3), \\ \dot{y} &= y + x + \Delta\mathcal{Q}_9(x, y) \equiv y + \Delta(\alpha x^3 + p_1x^2y + (p_2 + \alpha)xy^2 + p_3y^3), \\ F_9(x, y) &= \Delta\alpha(x^2 + y^2)^2, \quad G_9(u) = \Delta\alpha(1 + u^2)^2, \quad \alpha = \pm 1.\end{aligned}$$

Уравнение  $G_9(u) = 0$  в рассматриваемом случае не имеет действительных корней. Поэтому бесконечно удалённые точки отсутствуют. Мы попадаем в область действия теоремы 3: имеются лишь уже известные фазовые портреты  $\sigma_{26}$ ,  $\sigma_{27}$ .

Случай 10.

Система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \Delta\mathcal{P}_{10}(x, y) \equiv x + \Delta(p_1x^3 + p_2x^2y + p_3xy^2), \\ \dot{y} &= y + \Delta\mathcal{Q}_{10}(x, y) \equiv y + \Delta(p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3), \\ F_{10}(x, y) &= 0, \quad G_{10}(u) = 0.\end{aligned}\tag{31}$$

Уравнение  $G_{10}(u) = 0$  в рассматриваемом случае является тождеством. Поэтому бесконечно удалённые особые точки заполняют весь экватор, любая прямая, проходящая через начало координат, является инвариантной.

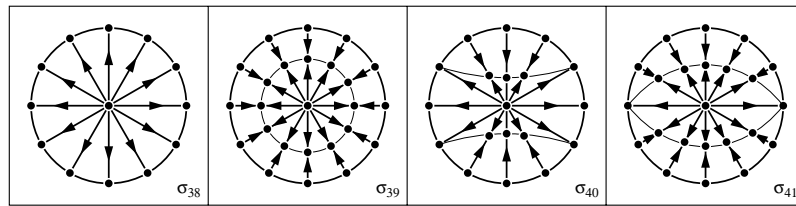


Рис. 14. Фазовые портреты системы (31)

Система (31) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + \Delta(p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2)), \\ \dot{y} &= y(1 + \Delta(p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2)).\end{aligned}$$

Нетривиальные конечные точки покоя системы (31) принадлежат множеству

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \Delta(p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2) = 0\},$$

которое в зависимости от коэффициентов  $\Delta$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  может быть пустым, либо эллипсом, либо гиперболой, либо парой параллельных прямых. Фазовые портреты  $\sigma_{38}$ – $\sigma_{41}$  приведены на рис. 14.

Окончательно из проведённых рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 7.** *Кубическая система типа Дарбу (2) имеет 41 тип фазовых портретов, обозначенных нами как  $\sigma_1$ – $\sigma_{41}$ . Схемы фазовых портретов приведены на рис. 1, 6, 7, 11, 13.*

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные критические замечания.

#### REFERENCES

- [1] A. Bendjeddou, J. Llibre, T. Salhi, *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Dif. Equ. **254**:8 (2013), 3530–3537. MR3020886
- [2] E.P. Volokitin, V.M. Cheresiz, *Qualitative investigation of the planar polynomial Darboux-type systems. (Russian. English summary)*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1170–1186. MR3592221
- [3] E.P. Volokitin, V.M. Cheresiz, V. M., *Dynamics of the cubic Darboux systems (Russian. English summary)*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 889–902. MR3703585
- [4] A.N. Berlinskii, *Qualitative study of the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{y+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{x+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ . (Russian)*, Differentsial'nye Uravnenija, **2** (1966), 353–360. (English transl. Differential Equations. **2** (1968), 174–178.) MR0197850
- [5] Ye, Yan Qian, et al., *Theory of Limit Cycles*, Trans. Math. Monogr. **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986. MR0854278
- [6] A. Cima, J. Llibre, *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*, J. Math. Anal. Appl. **147**:2 (1990), 420–448. MR1050216
- [7] V.I. Arnold, *Supplementary Chapters to the Theory of Ordinary Differential Equations*, Moscow: Nauka, 1978. (English transl. Berlin, Heidelberg and New York: Springer, 1983.) MR0526218
- [8] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer, 2006. MR2256001
- [9] A.A. Andronov, et al., *Qualitative Theory of Dynamic Systems of the Second Order (Russian)*, Moscow: Nauka, 1966. (English transl. J. Wiley, New York, 1973). MR0199506

VOLOKITIN EVGENII PAVLOVICH  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS  
 4, ACAD. KOPTYUG AVENUE,  
 NOVOSIBIRCK, 630090, RUSSIA  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 2, PIROGOVA STR.,  
 NOVOSIBIRCK, 630090, RUSSIA  
*E-mail address:* volok@math.nsc.ru

CHERESIZ VLADIMIR MIKHAILOVICH  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 4 ACAD. KOPTYUG AVENUE  
 NOVOSIBIRCK, 630090, RUSSIA  
*E-mail address:* vladimir.cheresiz@gmail.com