

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1485–1497 (2018)

УДК 517.97

DOI 10.33048/semi.2018.15.123

MSC 49J20

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОНКИМ РЕБРОМ
ЖЕСТКОСТИ В МОДЕЛИ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ
ТИМОШЕНКО С ТРЕЩИНОЙ

Н.П. ЛАЗАРЕВ, С. ДАС, М.П. ГРИГОРЬЕВ

АБСТРАКТ. We consider a family of variational problems describing equilibrium of plates containing a crack and rigid thin stiffener on the outer boundary. Nonlinear conditions of the Signorini type on the crack faces are imposed. For this family of problems, we formulate an optimal problem with a control parameter determining the length of the thin rigid stiffener. Meanwhile, a cost functional is specified with the help of an arbitrary continuous functional in the solution space. The existence of the solution to the optimal control problem is proved. We state the continuous dependence of the solutions with respect to the stiffener's size parameter.

Keywords: variational inequality, optimal control problem, nonpenetration condition, crack, energy functional.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто применяется способ усиления конструкций путем применения ребер жесткости, скрепляющих элементы соответствующих деталей по внешней кромке. Эффективность использования подобных способов может быть повышена на стадии математического моделирования. Вопросы оптимизации могут касаться, например: количества, размера, расположения или форм усиливающих ребер жесткости. Проблемы обоснования и исследования новых,

LAZAREV, N.P., DAS, S., GRIGORYEV, M.P., OPTIMAL CONTROL OF A THIN RIGID STIFFENER FOR A MODEL DESCRIBING EQUILIBRIUM OF A TIMOSHENKO PLATE WITH A CRACK.

© 2018 Лазарев Н.П., Дас С., Григорьев М.П.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части Госзадания (грант 1.7218.2017/6.7).

Поступила 14 июня 2018 г., опубликована 26 ноября 2018 г.

более точных математических моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние композитных тел с неоднородностями в виде включений или трещин, представляют собой важное научное направление. Это связано с тем, что наличие включений или трещин в нагружаемых твердых телах может стать причиной возникновения больших концентраций напряжений. Кроме того, механические и геометрические свойства включений могут обуславливать причины возникновения трещин, а также могут влиять на развитие уже существующих трещин. Отметим, что для тел с трещинами соответствие математической модели реальному объекту изучения зависит, в том числе, и от способа задания краевых условий на кривой (поверхности), задающей трещину.

Известно, что классический подход с линейными краевыми условиями на берегах трещины в ряде случаев может привести к физически недопустимым решениям. А именно, может оказаться так, что перемещения вблизи берегов трещины имеют физически невозможную интерпретацию [1].

Начиная с 1990-х годов, начали активно разрабатываться задачи теории трещин с условиями непроникания противоположных берегов трещины [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Используя вариационный подход, успешно исследован широкий круг задач о деформировании композитных тел, содержащих жесткие включения см., например, [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. В частности, теория двумерных задач теории упругости с тонкими жесткими включениями и возможным отслоением предложена в [18]. Термин "тонкое жесткое включение" означает, что размерность многообразия, описывающего жесткое включение, на единицу меньше, чем размерность соответствующего пространства, в котором формулируется задача. Для двумерного и трехмерного случая задача об оптимальной форме объемного жесткого включения исследована в [20]. Анализ зависимости решения задачи от вариации формы объемного включения в упругом двумерном теле с трещиной, выходящей за пределы тонкого жесткого включения проведен в [21]. Результаты о существовании тонких жестких включений оптимального размера для двумерного тела и для пластины Кирхгофа-Лява можно найти в работах [22, 23]. Отметим, что качественная связь между задачами о равновесии пластин модели Тимошенко, которые содержат тонкие и жесткие включения на внешней границе установлена в [24], а именно, показано, что задача для пластины с тонким включением является предельной для семейства задач о равновесии пластин с объемными включениями — при стремлении параметра размера объемного включения к нулю. В исследовании задач для моделей композитных тел с трещинами, применяются как линейные, так и нелинейные граничные условия см. [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

В настоящей работе исследуются задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину и тонкое жесткое включение на внешней границе пластины. Целью работы является исследование зависимости решения от вариации размера включения. Формулируется задача оптимального управления, в которой функционал качества задается с помощью произвольного непрерывного функционала в пространстве решений, а управляющий параметр характеризует размер включения. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Кроме того, установлена непрерывная зависимость решений от параметра размера включения в заданном пространстве Соболева. Формулировка указанных результатов без доказательств каких-либо утверждений была ранее приведена в сборнике трудов конференции [31].

ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНОЙ ВДОЛЬ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Сформулируем семейство задач, описывающих равновесие композитных пластин, содержащих трещину и тонкое жесткое включение на внешней границе. Пусть ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет гладкую границу $\Gamma \in C^{1,1}$. Рассмотрим семейство кривых $\{\Gamma_t\}$, зависящих от параметра $t \in [0, T]$:

$$\Gamma_t = \{(x_1, x_2) \mid -1 \leq x_1 \leq t, \quad x_2 = g(x_1)\}, \quad \bar{\Gamma}_t \subset \Gamma \quad \forall t \in [0, T],$$

где $g \in C^1(\mathbb{R})$.

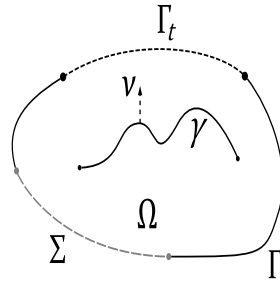


Рис. 1. Срединная плоскость пластины

Предположим, что на Γ найдется кривая Σ такая, что $\Sigma \subset \Gamma$, $meas(\Sigma) > 0$, $\bar{\Gamma}_T \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$. Обозначим через γ липшицевую кривую, удовлетворяющую следующим условиям $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\gamma} \cap \Gamma = \emptyset$. Кроме того, считаем, что область Ω может быть разбита на две области Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ так, чтобы $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $meas(\partial\Omega_i \cap \Sigma) > 0$, $i = 1, 2$. Это условие будет достаточным для выполнения неравенства Корна в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Для простоты предположим, что толщина пластины является постоянной и равной $2h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. При этом кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическую поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leq z \leq 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. Для фиксированного параметра $t \in [0, T]$ жесткое тонкое включение будет задаваться множеством $\Gamma_t \times [-1, 1]$; упругая часть пластины соответствует области Ω_γ . Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ нормаль к γ . В соответствии с направлением нормали ν , введем положительный γ^+ и отрицательный γ^- берега кривой γ . Скачок функции v на γ найдем по формуле $[v] = v|_{\gamma^+} - v|_{\gamma^-}$.

Обозначим через $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$ вектор обобщенных перемещений точек срединной поверхности ($x = (x_1, x_2) \in \Omega_\gamma$), $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — вдоль оси z , $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — углы поворота нормальных сечений.

Введем тензоры, описывающие деформацию пластины,

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий определим по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W), \quad i, j, r, l = 1, 2,$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), где ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijrl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D, \quad a_{iiij} = D\alpha, \quad a_{ijij} = a_{ijji} = D(1 - \alpha)/2, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

где D, α — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, α — коэффициент Пуассона, $0 < \alpha < 1/2$ [32]. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2k^2G$, k^2 — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, k^2, G — постоянные [32]. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(\eta, \bar{\eta}) = \int_{\Omega_\gamma} b(\eta, \bar{\eta}) dx,$$

где $\eta = (W, w, \psi)$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$,

$$b(\eta, \bar{\eta}) = \{m_{ij}(\psi)\varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) + \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(\bar{W})\}.$$

Функционал энергии имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B(\eta, \eta) - \int_{\Omega_\gamma} F\eta dx, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L_2(\Omega)^5$ — вектор, задающий внешние нагрузки. Пусть $H^1(\Omega_\gamma)$ — пространство Соболева, $H_\Sigma^{1,0}(\Omega_\gamma)$ — его подпространство, состоящее из всех функций с нулевыми следами на части Σ внешней границы Γ . Введем следующие обозначения:

$$H(\Omega_\gamma) = H_\Sigma^{1,0}(\Omega_\gamma)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma)}.$$

С помощью неравенств Корна и Пуанкаре можно доказать следующую оценку

$$(1) \quad B(\eta, \eta) \geq c\|\eta\|^2 \quad \forall \eta \in H(\Omega_\gamma),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от η (см. [33]).

Замечание 1. В силу неравенства (1) в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ стандартная норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_B$, введенной с помощью билинейной формы

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_B, \quad \|\cdot\|_B^2 = B(\cdot, \cdot).$$

Наличие жесткого включения приводит к тому, что перемещения и углы поворота на Γ_t описываются функциями специального вида. Введем пространство, характеризующее свойства жесткого включения

$$R(\Gamma_t) = \{\rho \mid \rho(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2); \quad x \in \Gamma_t\},$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ [24]. Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины без учета сил трения имеет вид [24]:

$$(2) \quad [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \quad \text{на } \gamma.$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с тонким жестким включением и трещиной сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$(3) \quad \inf_{\eta \in K_t} \Pi(\eta),$$

где

$$K_t = \{ \eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_\gamma) \mid [W]\nu \geq |[\psi]\nu| \text{ на } \gamma, \eta|_{\Gamma_t} \in R(\Gamma_t) \}$$

— множество допустимых функций. Известно, что задача (3) имеет единственное решение $\xi_t = (U_t, u_t, \phi_t) \in K_t$ и эквивалентна следующему вариационному неравенству [24]

$$(4) \quad \xi_t \in K_t, \quad B(\xi_t, \eta - \xi_t) \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi_t) dx \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_t.$$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом параграфе сформулируем задачу оптимального управления и докажем для нее существование решения задачи. Определим функционал качества $J : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$J(t) = G(\xi_t),$$

где $G(\chi) : H(\Omega_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный функционал в пространстве $H(\Omega_\gamma)$, ξ_t — решение задачи (3). В качестве примеров вспомогательных функционалов, мотивированных физическим смыслом, могут быть взяты следующие функционалы. Функционал, который характеризует отклонение от заданных обобщенных перемещений $\hat{\chi}$ имеет вид

$$G_1(\chi) = \|\chi - \hat{\chi}\|_{H(\Omega_\gamma)}.$$

Функционал, характеризующий возможность развития трещины вдоль оси Ox_1 для случая плоской трещины, которая параллельна этой же оси, имеет вид

$$G_2(\chi) = \int_{\Omega_\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \theta_{,1} b(\chi, \chi) - (\sigma_{ij}(W) w_{i,1} \theta_{,j} + m_{ij}(\psi) \psi_{i,1} \theta_{,j} + q_i(w, \psi) u_{1,i} \theta + (\theta F)_{,1} \chi) \right\} dx,$$

где $\chi = (W, w, \psi)$, $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ (см. [34]).

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$(5) \quad \text{Найти } t^* \in [0, T] \text{ такое что } J(t^*) = \sup_{t \in [0, T]} J(t).$$

Теорема 1. *Задача оптимального управления (5) имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности сегмента $[0, T]$, можно извлечь сходящуюся последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такую, что

$$t_{n_k} \rightarrow t^* \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad t^* \in [0, T].$$

Не нарушая общности, предположим, что $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k . Поскольку в противном случае, должна найтись подпоследовательность $\{t_{n_i}\}$

такая, что $t_{n_l} \equiv t^*$ и, следовательно, $J(t^*)$ — решение задачи (5). Итак, рассмотрим случай подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$, удовлетворяющей $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k .

Принимая во внимание доказанную ниже лемму 2, получаем, что решения ξ_k задач (3), соответствующие параметрам t_{n_k} , сходятся сильно к ξ_{t^*} в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. Это позволяет установить следующую сходимость

$$J(t_{n_k}) \rightarrow J(t^*).$$

Откуда следует, что

$$J(t^*) = \sup_{t \in [0, T]} J(t).$$

Теорема доказана. \square

Далее докажем две вспомогательные леммы. Первая лемма утверждает о возможности приближения произвольной функции χ принадлежащей K_{t^*} , $t^* \in [0, T)$, функциями из других множеств вида K_t , $t \in [t^*, T]$, $t^* \neq t$ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$.

Лемма 1. Пусть $t^* \in [0, T)$ — фиксированный параметр, а последовательность чисел $\{t_n\} \subset [t^*, T]$ сходится к t^* при $n \rightarrow \infty$. Тогда для произвольной функции $\chi \in K_{t^*}$ существует подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\chi_k\}$ такие, что $\chi_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\chi_k \rightarrow \chi$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим через $B_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ открытый круг достаточно малого радиуса λ с центром в точке $(t^*, g(t^*)) \in \Gamma$ такой, что $\bar{B}_\lambda \cap \bar{\gamma} = \emptyset$, $\bar{B}_\lambda \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$.

Выберем гладкую срезающую функцию $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $\text{supp } \vartheta \subset B_\lambda$ и $\vartheta \equiv 1$ в круге $B_{\lambda/2}$. Очевидно, что существует достаточно малое число δ^* такое, что $\delta^* \leq \lambda/2$, $(t^* + \delta, g(t^* + \delta)) \in B_{\lambda/2}$ для всех $0 \leq \delta \leq \delta^*$. Для фиксированного $\delta \in [0, \delta^*]$, рассмотрим координатное преобразование $y = \Phi_\delta(x)$, определенное равенством

$$(6) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - \delta\vartheta(x), \\ y_2 = x_2 + g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1). \end{cases}$$

Заданная регулярность функций g и ϑ гарантирует выполнение включения $\Phi_\delta(x) \in C^1([0, \delta^*], W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R}^2))^2$. Якобиан \mathcal{J}_δ данного отображения равен

$$\mathcal{J}_\delta = 1 - \delta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + g'(x_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right).$$

Для достаточно малых δ преобразование (6) биективно отображает область Ω_γ на себя, и кроме того, якобиан \mathcal{J}_δ положителен [7].

Покажем, что функция $\chi_\delta(x) = (W_\delta(x), w_\delta(x), \psi_\delta(x))$, определенная с помощью равенств:

$$\begin{aligned} W_\delta(x) &= W(\Phi_\delta(x)) - \left(b(g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)), \delta b\vartheta(x) \right), \\ w_\delta(x) &= w(\Phi_\delta(x)) + \left(a_1 \delta\vartheta(x) + a_2 (g(x_1) - g(x_1 - \delta\vartheta(x))) \right), \\ \psi_\delta(x) &= \psi(\Phi_\delta(x)) \end{aligned}$$

принадлежит множеству $K_{t^* + \delta}$. Действительно, класс регулярности $C^1([0, \delta^*], W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R}^2))^2$ преобразования $y = \Phi_\delta(x)$ гарантирует принадлежность

функций $\chi_\delta(x)$ пространству $H(\Omega_\gamma)$ [15]. Замечая, что функции g, ϑ , принадлежат классу $C^1(\mathbb{R})$ легко заключаем, что $\chi_\delta(x) \in H(\Omega_\gamma)$ для всех достаточно малых δ .

Далее установим, что функции $W_\delta(x), w_\delta(x), \psi_\delta(x)$ имеют подходящую структуру на $\Gamma_{t^*+\delta}$. В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} W_\delta|_{\Gamma_{t^*+\delta}} &= W\left(x_1 - \delta\vartheta(x), x_2 + g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &\quad - \left(b(g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)), \delta b\vartheta(x)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &= \left(bg(x_1 - \delta\vartheta(x)) + c_1, -b(x_1 - \delta\vartheta(x)) + c_2\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &\quad - \left(b(g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)), \delta b\vartheta(x)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &= \left(bg(x_1) + c_1, -bx_1 + c_2\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2)|_{\Gamma_{t^*+\delta}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_\delta|_{\Gamma_{t^*+\delta}} &= w\left(x_1 - \delta\vartheta(x), x_2 + g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &\quad + \left(a_1\delta\vartheta(x) + a_2(g(x_1) - g(x_1 - \delta\vartheta(x)))\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &= \left(a_0 + a_1(x_1 - \delta\vartheta(x)) + a_2g(x_1 - \delta\vartheta(x))\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &\quad + \left(a_1\delta\vartheta(x) + a_2(g(x_1) - g(x_1 - \delta\vartheta(x)))\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} \\ &= \left(a_0 + a_1x_1 + a_2g(x_1)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2)|_{\Gamma_{t^*+\delta}}; \end{aligned}$$

$$\psi_\delta|_{\Gamma_{t^*+\delta}} = \psi\left(x_1 - \delta\vartheta(x), x_2 + g(x_1 - \delta\vartheta(x)) - g(x_1)\right)|_{\Gamma_{t^*+\delta}} = (-a_1, -a_2).$$

Чтобы завершить доказательство, осталось установить, что $\chi_\delta \rightarrow \chi$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $\delta \rightarrow 0$. Сначала, проведем подробные рассуждения, касающиеся сходимости $w_\delta \rightarrow w$ в $H_\Sigma^{1,0}(\Omega_\gamma)$ при $\delta \rightarrow 0$. Для этого покажем, что $w_\delta \rightarrow w$ в $L^2(\Omega_\gamma)$ при $\delta \rightarrow 0$. Здесь мы будем следовать схеме доказательства непрерывности произвольной функции (в среднем квадратичном) в норме $L^2(B_\lambda \cap \Omega)$ [35].

В силу плотности $C(\overline{B_\lambda \cap \Omega})$ в $L_2(B_\lambda \cap \Omega)$, найдется непрерывная функция $\zeta(x)$, удовлетворяющая неравенству $\|w - \zeta\|_{L_2(B_\lambda \cap \Omega)} < \frac{\epsilon}{4}$. Кроме того, существует достаточно малое положительное число δ_0 такое, что $(\frac{3}{4})^2 < \mathcal{J}_\delta$ для всех $0 < \delta < \delta_0$. Поэтому, для достаточно малых δ , мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |w(\Phi_\delta(x)) - \zeta(\Phi_\delta(x))|^2 dx\right)^{1/2} &= \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |w(y) - \zeta(y)|^2 \mathcal{J}_\delta^{-1} dy\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |w(y) - \zeta(y)|^2 dy\right)^{1/2} < \frac{4}{3} \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Поскольку функция ζ равномерно непрерывна на $\overline{B_\lambda \cap \Omega}$, найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что $\|\zeta(\Phi_\delta(x)) - \zeta(x)\|_{L_2(B_\lambda \cap \Omega)} < \frac{\epsilon}{3}$ для всех $\delta < \delta_1$. Следовательно, для

$\delta < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ находим, что

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\Omega_\gamma} |w(\Phi_\delta(x)) - w(x)|^2 dx \right)^{1/2} &= \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |w(\Phi_\delta(x)) - w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |w(\Phi_\delta(x)) - \zeta(\Phi_\delta(x))|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |\zeta(\Phi_\delta(x)) - \zeta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\iint_{B_\lambda \cap \Omega} |\zeta(x) - w(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon. \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями можно получить следующие сильные сходимости для первых производных функции w

$$w_{,i}(\Phi_\delta(x)) \rightarrow w_{,i} \quad \text{в } L^2(\Omega_\gamma), \quad i = 1, 2, \quad \text{при } \delta \rightarrow 0;$$

Заданная регулярность функция $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ позволяет установить, что

$$w_\delta \rightarrow w, \quad w_{\delta,i} \rightarrow w_{,i} \quad \text{в } L^2(\Omega_\gamma), \quad i = 1, 2, \quad \text{при } \delta \rightarrow 0;$$

Отсюда следует, что $w_\delta(x)$ сходится к функции $w(x)$ сильно в $H_{\Sigma}^{1,0}(\Omega_\gamma)$ при $\delta \rightarrow 0$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $W_\delta(x) \rightarrow W(x)$, $\psi_\delta(x) \rightarrow \psi(x)$ в $H_{\Sigma}^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\chi_k\}$ такие, что $\chi_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\chi_k \rightarrow \chi$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. \square

Далее перейдем к формулировке леммы 2, использованной при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2. Пусть $t^* \in [0, T]$ — некоторое фиксированное число. Тогда $\xi_t \rightarrow \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $t \rightarrow t^*$, где ξ_t и ξ_{t^*} — решения задачи (3), соответствующие параметрам $t, t^* \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует положительное число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, T]$ такая, что $t_n \rightarrow t^*$, $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon_0$, где $\xi_n = \xi_{t_n}$ — решение задачи (3), соответствующее параметру t_n .

Поскольку $\chi^0 \equiv 0 \in K_t$ для всех $t \in [0, T]$, подставляя $\chi = \chi^0$ в качестве пробных функций (4) для всех $t \in (0, T]$, находим

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\xi_t, \xi_t) \leq \int_{\Omega_\gamma} F \xi_t dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда, опираясь на неравенство (1), приходим к следующей равномерной оценке

$$\|\xi_t\| \leq c, \quad t \in [0, T]$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от t . Следовательно, при необходимости заменяя последовательность $\{\xi_n\}$ ее подпоследовательностью, можно считать, что ξ_n сходится к $\tilde{\xi} = (\tilde{U}, \tilde{u}, \tilde{\phi})$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$.

Далее мы покажем, что $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$. По построению, имеем равенства $\xi_n|_{\Gamma_{t_n}} = \rho_n \in R(\Gamma_{t_n})$. В соответствии с теоремами вложения [36], можем выписать

$$(7) \quad \begin{aligned} \xi_n|_{\Gamma} &\rightarrow \tilde{\xi}|_{\Gamma} \quad \text{сильно в } L_2(\Gamma)^5 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ \xi_n|_{\gamma} &\rightarrow \tilde{\xi}|_{\gamma} \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^5 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что $\xi_n \rightarrow \tilde{\xi}$ п.в. на множествах Γ и γ . Это означает, что каждая числовая последовательность $\{b^n\}, \{c_1^n\}, \{c_2^n\}, \{a_0^n\}, \{a_1^n\}, \{a_2^n\}$, определяющая структуру ρ_n на Γ_{t_n} ограничена по абсолютной величине. Таким образом, можно извлечь подпоследовательность (сохранив прежнее обозначение) такую, что

$$(8) \quad b^n \rightarrow b, \quad a_0^n \rightarrow a_0, \quad a_i^n \rightarrow a_i, \quad c_i^n \rightarrow c_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что для последовательности $\{t_n\}$ можно говорить о выполнении хотя бы одного из двух следующих случаев. В первом случае существует подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, удовлетворяющая $t_k \rightarrow t^*, t_k \geq t^*$ при $k \in \mathbb{N}$, во втором — последовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ сходящаяся к t^* слева.

Пусть имеет место первый случай, тогда нетрудно получить следующую сильную сходимость

$$(9) \quad \xi_k|_{\Gamma_{t^*}} \rightarrow (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2)$$

в $L_2(\Gamma_{t^*})^5$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда, в силу (7) и (9), выведем, что выполнено включение $\tilde{\xi}|_{\Gamma_{t^*}} \in R(\Gamma_{t^*})$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ сходится к t^* слева, т.е. $t_k < t^*$ для $k \in \mathbb{N}$. Для фиксированного $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующего значения $t' = t_{k'}$, имеем

$$(10) \quad \xi_k|_{\Gamma_{t'}} \rightarrow (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2)$$

сильно в $L_2(\Gamma_{t'})^5$ при $k \rightarrow \infty$. Для чисел b, c_1 , указанных в (10) мы можем определить функцию \mathcal{L} на множестве Γ_{t^*} с помощью равенства $\mathcal{L} = bx_2 + c_1$.

Принимая во внимание (10) заметим, что $u_{1k} \rightarrow \mathcal{L}$ сильно в $L^2(\Gamma_{t'})$ при $k \rightarrow \infty$. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега, для $\epsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое число $k' \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|\mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} < \sqrt{\epsilon},$$

где значение $t' = t_{k'}$ соответствует числу k' . Далее, дважды применяя неравенство треугольника, находим

$$\begin{aligned} \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} &\leq \|u_{1k}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} + \|\mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} \\ &\leq \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} + \|\mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})} \\ &< 2\sqrt{\epsilon} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*})}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$(11) \quad \begin{aligned} \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*})}^2 &= \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t^*} \setminus \Gamma_{t'})}^2 + \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t'})}^2 \\ &< (2\sqrt{\epsilon} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*})})^2 + \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t'})}^2. \end{aligned}$$

Далее, поскольку для достаточно больших k справедливы оценки

$$\|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Gamma_{t^*})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|u_{1k} - \mathcal{L}\|_{L^2(\Gamma_{t'})} < \sqrt{\epsilon},$$

закключаем, что выражение (11) меньше чем 10ϵ . Таким образом, $u_{1k} \rightarrow \mathcal{L}$ сильно в $L^2(\Gamma_{t^*})$. На основе сходимости (7), устанавливаем, что $\tilde{u}_1|_{\Gamma_{t^*}} = \mathcal{L}$ п.в. на Γ_{t^*} .

Аналогично можно вывести следующие соотношения

$$\tilde{u}_2|_{\Gamma_{t^*}} = -bx_1 + c_2, \quad \tilde{u}|_{\Gamma_{t^*}} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad \tilde{\phi}|_{\Gamma_{t^*}} = (-a_1, a_2) \quad \text{п.в. на } \Gamma_{t^*}.$$

Последнее означает, что имеет место включение $\tilde{\xi}|_{\Gamma_{t^*}} \in R(\Gamma_{t^*})$. В качестве итога рассуждений для двух указанных исчерпывающих случаев, получаем, что для предельной функции выполняется $\tilde{\xi}|_{\Gamma_{t^*}} \in R(\Gamma_{t^*})$.

Остается показать, что $\tilde{\xi}$ удовлетворяет неравенству (2). Для следов, определенных на γ^+ и γ^- имеем следующие сходимости

$$U_n \rightarrow \tilde{U}, \quad \phi_n \rightarrow \tilde{\phi} \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^2,$$

при $n \rightarrow \infty$. Ввиду последних соотношений, если нужно выделяя подпоследовательности, находим, что $U_n|_\gamma \rightarrow \tilde{U}|_\gamma$, $\phi_n|_\gamma \rightarrow \tilde{\phi}|_\gamma$ п.в. на γ^\pm . Этот факт позволяет перейти к пределу в следующих неравенствах

$$[U_n]\nu \geq |[\phi_n]\nu| \quad \text{на } \gamma \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что предельное выражение примет вид

$$[\tilde{U}]\nu \geq |[\tilde{\phi}]\nu| \quad \text{на } \gamma.$$

Подытоживая предыдущие рассуждения, заключаем, что справедливо включение $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$.

Следующей целью рассуждений будет доказательство того, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$, а также, что существует последовательность решений $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n = 1, 2, \dots$ сходящаяся к ξ_{t^*} сильно в $H(\Omega_\gamma)$. Заметим, что относительно сходящейся последовательности чисел $\{t_n\}$ к t^* , можно выделить два случая. Для первого существует подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$ такая, что $t_n \rightarrow t^*$, $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$, для второго — подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$, удовлетворяющая $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для первого случая, в силу включения $\{t_{n_l}\} \subset (0, T]$, выполнено неравенство $t^* > 0$. Для удобства, обозначим эту последовательность через $\{t_n\}$. Поскольку $t_n \leq t^*$, произвольная тестовая функция $\chi \in K_{t^*}$ принадлежит всем множествам K_{t_n} . Это факт позволяет перейти к пределу $n \rightarrow \infty$ в следующих неравенствах с тестовыми функциями $\chi \in K_{t^*}$:

$$\xi_n \in K_{t_n}, \quad B(\xi_n, \chi - \xi_n) \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\chi - \xi_n) dx, \quad t_n \in (0, t^*].$$

Принимая во внимание слабую сходимость ξ_n к $\tilde{\xi}$ в $H(\Omega_\gamma)$, предельное неравенство примет вид

$$B(\tilde{\xi}, \chi - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\chi - \tilde{\xi}) dx \quad \forall \chi \in K_{t^*}.$$

Произвольность функции $\chi \in K_{t^*}$ в последнем неравенстве означает, что оно является вариационным. Единственность его решения приводит к тому, что функция $\tilde{\xi}$ является его решением, т.е. $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Таким образом, для первого случая установлено, что $\xi_n \rightarrow \xi_{t^*}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$.

Рассмотрим второй случай. Для удобства будем обозначать подпоследовательность так же, как исходную последовательность. В таком случае $t_n \rightarrow t^*$ и $t_n > t^*$, $n \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание рассуждения, сделанные в начале доказательства, вспоминаем, что $\xi_n \rightarrow \tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$. В соответствии с леммой 1, для произвольной тестовой функции $\chi \in K_{t^*}$ существует подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\chi_k\}$ таких, что $\chi_k \in K_{t_k}$ и $\chi_k \rightarrow \chi$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.

Далее осуществим предельный переход в следующих неравенствах

$$(12) \quad B(\xi_k, \chi_k - \xi_k) \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\chi_k - \xi_k) dx,$$

полученных из (4) для параметров t_k и соответствующих функций χ_k , $k = 1, 2, \dots$. Существование пределов при $k \rightarrow \infty$ в обеих частях неравенства (12) обеспечивается свойствами последовательностей $\{\chi_k\}$ и $\{\xi_n\}$. Предельное неравенство имеет вид

$$B(\tilde{\xi}, \chi - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\chi - \tilde{\xi}) dx \quad \forall \chi \in K_{t^*}.$$

Произвольность $\chi \in K_{t^*}$ означает, что последнее неравенство является вариационным. В свою очередь, его однозначная разрешимость влечет, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Значит, вне зависимости от свойств $\{t_n\}$ существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такая что $t_k \rightarrow t^*$, $\xi_k \rightarrow \xi_{t^*}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.

Чтобы завершить доказательство, остается доказать сильную сходимость $\xi_k \rightarrow \xi_{t^*}$ в $H(\Omega_\gamma)$. Подстановкой $\chi = 2\xi_t$ и $\chi = 0$ в вариационные неравенства (4) для $t \in (0, T]$, находим

$$(13) \quad \xi_t \in K_t, \quad B(\xi_t, \xi_t) = \int_{\Omega_\gamma} F\xi_t dx \quad \forall t \in (0, T].$$

Последнее соотношение вместе со слабой сходимостью $\xi_k \rightarrow \xi_{t^*}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$ дает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(\xi_k, \xi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} F\xi_k dx = \int_{\Omega_\gamma} F\xi_{t^*} dx = B(\xi_{t^*}, \xi_{t^*}).$$

В силу эквивалентности норм (см. замечание 1), легко видеть, что $\xi_k \rightarrow \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, получено противоречие с предположением: $\|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана. \square

REFERENCES

- [1] N.F. Morozov, *Mathematical Problems of the Theory of Cracks*, Nauka, Moscow, 1984. (in Russian).
- [2] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010. (in Russian).
- [3] A.M. Khludnev, *Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates*, *Europ. J. Mech. A Solids*, **32**:1 (2012), 69–75. MR2887945
- [4] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**:11 (2017), 1406–1417. MR3723598

- [5] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenکو, *Analysis of Cracks in Solids*, Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
- [6] A.M. Khludnev, G.R. Leugering, *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*, *Math. Mech. Solids*, **20**:5 (2015), 495–511. MR3343083
- [7] V.A. Kovtunenکو, *Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations*, *Z. Angew. Math. Phys.*, **54**:3 (2003), 410–423. MR2048661
- [8] N.P. Lazarev, H. Itou, N.V. Neustroeva, *Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle*, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, **33**:1 (2016), 63–80. MR3459279
- [9] V.V. Shcherbakov, *The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**:11 (2016), 1306–1317. MR3580286
- [10] V.V. Shcherbakov, *Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks*, *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**:3 (2016), Art. 71. MR3502619
- [11] A.M. Khludnev, V.V. Shcherbakov, *A note on crack propagation paths inside elastic bodies*, *Applied Mathematics Letters*, **79**:1 (2018), 80–84. MR3748614
- [12] E.V. Pyatkina, *Optimal control of the shape of a layer shape in the equilibrium problem of elastic bodies with overlapping domains*, *J. Appl. Indust. Math.*, **10**:3 (2016), 435–443. MR3588955
- [13] D. Knees, A. Schroder, *Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **35**:15 (2012), 1859–1884. MR2982470
- [14] E. Rudoy, *Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition*, *ESAIM-Math. Model. Num.*, **50**:4 (2016), 995–1009. MR3521709
- [15] M. Hintermüller, V.A. Kovtunenکو, *From shape variation to topological changes in constrained minimization: A velocity method-based concept*, *Optim. Method Softw.*, **26**:4–5 (2011), 513–532. MR2837787
- [16] V.A. Kovtunenکو, G. Leugering, *A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model*, *Siam. J. Control Optim.*, **54**:3 (2016), 1329–1351. MR3504978
- [17] A. Khludnev, M. Negri, *Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks*, *Z. Angew. Math. und Phys.*, **64**:1 (2013), 179–191. MR3023082
- [18] A.M. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **33**:16 (2010), 1955–1967. MR2744613
- [19] E.M. Rudoy, *On numerical solving a rigid inclusions problem in 2D elasticity*, *Z. Angew. Math. Phys.*, **68**:1 (2017), Art. 19. MR3592740
- [20] A.M. Khludnev, A.A. Novonty, J. Sokolowsky, A. Zochowski, *Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions*, *J. Mech. Phys. Solids.*, **57**:10 (2009), 1718–1732. MR2567570
- [21] A.M. Khludnev, *Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies*, *Arch. Appl. Mech.* **83**:10 (2013), 1493–1509. Zbl 1293.74136
- [22] N. Lazarev, G. Semenova, *An optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic two-dimensional body on the outer edge*, *J. Optim. Theory Appl.*, (2018), <https://doi.org/10.1007/s10957-018-1291-8>
- [23] N.P. Lazarev, E.M. Rudoy, *Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**:9 (2017), 1120–1127. MR3689455
- [24] N. Lazarev, T. Popova, G. Semenova, *Existence of an optimal size of a rigid inclusion for an equilibrium problem of a Timoshenko plate with Signorini-type boundary condition*, *Journal of Inequalities and Application*, (2016), Art. 18. MR3449006
- [25] F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei, *The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I. Full-field solution and asymptotics*, *J. Mech. Phys. Solids.*, **56**:3 (2008), 815–838. MR2396928
- [26] I.I. Ilina, V.V. Silvestrov, *Zadacha o tonkom zhestkom mezhfaznom vkluchenii, otsoyediniyshemsya vdol' odnoy storony ot sredy*, *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, (3) (2005), 153–166. (in Russian).
- [27] H. Itou, A.M. Khludnev, E.M. Rudoy, A. Tani, *Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**:9 (2012), 716–730. MR2973044
- [28] Z.M. Xiao, B.J. Chen, *Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion*, *Int. J. Fract.*, **108**:3 (2001), 193–205.

- [29] P.K. Mishra, S. Das, M. Gupta, *Interaction between interfacial and sub-interfacial cracks in a composite media - Revisited*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**:9 (2016), 1129–1136. MR3550601
- [30] P.K. Mishra, P. Singh, S. Das, *Study of thermo-elastic cruciform crack with unequal arms in an orthotropic elastic plane*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**:8 (2017), 886–894. MR3678126
- [31] N. Lazarev, M. Grigoryev, *Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing a Timoshenko-type plate on the outer edge*, *AIP Conference Proceedings*, **1907**:14 (2017), 030033.
- [32] B.L. Pelekh, *Teoriya Obolochek s Konechnoy Sdvigovoy Zhestkost'yu*, Kiyev: Nauk. dumka, 1973. (in Russian). Zbl 0273.73055
- [33] N.P. Lazarev, *An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack*, *Numer. Analys. Appl.*, **4**:4 (2011), 309–318. Zbl 1299.49006
- [34] N.P. Lazarev, *Differentiation of the energy functional in the equilibrium problem for a Timoshenko plate containing a crack*, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **53**:2 (2012), 299–307. MR2954021
- [35] V.P. Mikhailov, *Partial Differential Equations*, Moscow: Mir, 1978. MR0601389
- [36] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1985. MR0817985

NYURGUN PETROVICH LAZAREV
NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
48, KULAKOVSKOGO ST.,
YAKUTSK, 677000, RUSSIA
E-mail address: nyurgun@ngs.ru

SUBIR DAS
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY (BHU),
BANARAS HINDU UNIVERSITY CAMPUS,
VARANASI, 221005, INDIA
E-mail address: sdas.apm@iitbhu.ac.in

MARK PETROVICH GRIGORYEV
NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
48, KULAKOVSKOGO ST.,
YAKUTSK, 677000, RUSSIA
E-mail address: mp.grigorev@s-vfu.ru