S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1498–1505 (2018) УДК 512.552.4, 512.554.1
DOI 10.33048/semi.2018.15.124 MSC 16R10, 17A30

ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ ШПЕХТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР

И.М. ИСАЕВ

Abstract. We constructed the example of the join Spechtian varieties of algebras over a field of characteristic zero which is not finitely based.

Keywords: linear algebra, Spechtian variety, nonfinitely based variety of algebras.

1. Введение

Пусть Φ — поле характеристики нуль. Многообразие $\mathfrak{M}$ линейных Φ-алгебр называется конечно базируемым, если в классе всех линейных Φ-алгебр оно выделяется конечным набором тождеств (этот набор называется базисом тождеств многообразия $\mathfrak{M}$). Многообразие $\mathfrak{M}$ называется шпехтовым [1], если всякое его подмногообразие конечно базируемо. Хорошо известна знаменитая теорема А. Р. Кемера о шпехтовости произвольного многообразия ассоциативных Φ-алгебр [2]. В то же время существуют примеры не конечно базируемых (а значит, нешпехтовых) многообразий неассоциативных Φ-алгебр [3, 4, 5, 6]. В 1977 году Г. В. Дорофеев доказал теорему о шпехтовости многообразия, являющегося объединением двух шпехтовых многообразий [3]. Некоторые результаты и открытые вопросы по данной теме сформулированы в работе [7]. На самом деле в [3] доказано, что объединение двух шпехтовых многообразий удовлетворяет условию минимальности для подмногообразий и утверждается, что отсюда вытекает шпехтовость объединения. В настоящей работе доказано, что это не так. А именно, строится пример двух шпехтовых многообразий Φ-алгебр, объединение которых не является конечно базируемым (а значит, не является шпехтовым).

Isaev, I.M., On the join of Spechtian varieties of algebras.

Поступила 1 августа 2018 г., опубликована 26 ноября 2018 г.

2. Многообразие Полина

Пусть $\mathfrak{P}$ — многообразие Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$x(yz) = 0. \tag{1}$$

Тождества Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству (1) впервые рассмотрел в своей работе С. В. Полин [8]. Поэтому многообразие Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству (1), мы будем называть многообразием Полина. Рассмотрим свободную алгебру R этого многообразия от счетного числа порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Произвольный одночлен алгебры R имеет вид $x_i R_{x_{i_1}} \dots R_{x_{i_k}}$, где R_x — оператор правого умножения на элемент x. Мы будем записывать этот одночлен следующим образом: $x_i x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Как всегда $[x, y] = xy - yx$, и под записью элемента $x_1[x_2, x_3]x_4$ из R понимается следующее: $x_1[x_2, x_3]x_4 = x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_2x_4$, и везде в аналогичных случаях коммутатор в R раскрывается таким же образом.

В работе [4] рассматриваются алгебры вида $\overline{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$ и умножение элементов $\overline{V}$ определяются правилом $(v_1+e_1)(v_2+e_2) = v_1e_2$ для $v_1, v_2 \in V$ и $e_1, e_2 \in E$ (под v_1e_2 понимается действие преобразования e_2 на вектор v_1). В этой работе доказано, что $\overline{V} \in \mathfrak{P}$ и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежит в идеале тождеств ассоциативного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ лежит в идеале тождеств алгебры $\overline{V}$ [4].

Пусть $A_1 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$ и $A_2 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}\rangle_\Phi$ — четырехмерные Ф-алгебры, ненулевые произведения базисных элементов которых задаются правилом: $v_i e_{ij} = v_j$.

В работе [9] найдены базисы тождеств пространств $E_1 = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_\Phi$. Следовательно, алгебры A_1 и A_2 имеют внутри $\mathfrak{P}$ следующие базисы тождеств:

базис A_1:

$$x_1x_2[x_3, x_4] = 0, \tag{2}$$

базис A_2:

$$x_1[x_2, x_3]x_4 = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим алгебру $A_3 = \langle v_1, v_2 + e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$. Ясно, что A_3 — подалгебра алгебры A_1.

Лемма 1. *Алгебра A_3 имеет внутри $\mathfrak{P}$ базис тождеств, состоящий из многочленов:*

$$x_1[x_2, x_3]x_4 - x_4[x_2, x_3]x_1 = 0, \tag{4}$$

$$s_3 = x_1[x_2, x_3] + x_2[x_3, x_1] + x_3[x_1, x_2] = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Легко проверить, что тождества (4), (5) выполняются в алгебре A_3. Поскольку характеристика основного поля Ф равна нулю, для доказательства леммы достаточно проверить, что всякое полилинейное тождество алгебры A_3 следует внутри $\mathfrak{P}$ из тождеств (4), (5). Несложно проверить, что в алгебре A_3 нет нетривиальных тождеств степени 2, и всякое тождество степени 3 является следствием тождества (5). Заметим также, что тождество (2) является следствием тождества (5) (достаточно подставить $x_1 = y_1y_2$

и перенумеровать переменные). Пусть f — произвольное полилинейное тождество алгебры A_3 степени $n \geq 4$. По модулю тождеств (1), (2), (4), (5) тождество f преобразуется к виду $f = \alpha_2 x_3[x_1, x_2]x_4 \ldots x_n + \alpha_3 x_2[x_1, x_3]x_4 \ldots x_n + \cdots + \alpha_n x_2[x_1, x_n]x_3 \ldots x_{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_n$. Подставим $x_i = v_1$, $x_1 = \cdots = \widehat{x_i} = \cdots = x_n = v_2 + e_{11}$. Получим $\beta_i v_1 = 0$, $\beta_i = 0$. Подставим теперь $x_s = e_{21}$ $(s \neq 1)$, $x_1 = x_2 = \cdots = \widehat{x}_s = \cdots = x_n = v_2 + e_{11}$ (запись $\widehat{x}_s$ означает, что переменная x_s отсутствует в данном месте). Получим $f = \alpha_s v_2[e_{11}, e_{21}]e_{11} \ldots e_{11} = -\alpha_s v_1 = 0$, $\alpha_s = 0$. Тем самым лемма доказана. □

3. Примеры двух шпехтовых многообразий

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}_2 = \operatorname{Var} A_2$ — многообразие, порожденное алгеброй A_2. Тогда $\mathfrak{M}_2$ — шпехтово многообразие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственное подмногообразие $\mathfrak{M}_2$. Проверим, что $\mathfrak{M}$ — конечно базируемо. Так как $\mathfrak{M}_2$ задается тождествами (1), (3), то конечную базируемость $\mathfrak{M}$ достаточно доказывать по модулю тождеств (1) и (3). Можно считать, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида:

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_{ij} x_i x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_i \ldots \widehat{x}_j \ldots x_n x_j = 0.$$

Пусть $\alpha_{ij} \neq 0$. Подставим $x_i = y_1 y_2$. Получим, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида:

$$\sum_{1 \leq j \leq n,} \alpha_{ij} y_1 y_2 x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_i \ldots \widehat{x}_j \ldots x_n x_j = 0.$$

Переобозначив очевидным образом переменные, получим, что в $\mathfrak{M}$ выполняется нетривиальное тождество вида:

$$\sum_{s=2}^{n-1} \alpha_s x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_s \ldots [x_s, x_n] + \beta x_1 x_2 \ldots x_n = 0. \tag{6}$$

Пусть $m = \max\limits_{\alpha_s \neq 0} s$. Доказательство конечной базируемости $\mathfrak{M}$ будем вести индукцией по m.

База индукции: если m не существует, то есть все $\alpha_s = 0$, то ввиду нетривиальности f имеем: $\beta \neq 0$, многообразие $\mathfrak{M}$ нильпотентно, а значит конечно базируемо.

Переход: пусть многообразие $\mathfrak{M}$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{s=2}^{m} \alpha_s x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_s \ldots [x_s, x_n] + \beta x_1 x_2 \ldots x_n = 0,$$

причем $\alpha_m \neq 0$. Заметим, что в этом случае в $\mathfrak{M}$ выполняются тождества

$$\alpha_m x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_t \ldots [x_t, x_n] + \sum_{s=2}^{m-1} \alpha_s x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_s \ldots [x_s, x_n] + \beta x_1 x_2 \ldots x_n = 0, \tag{7}$$

где $m \leq t < n$. Как и выше при этом $\alpha_m \neq 0$. В самом деле, поменяем переменные x_t и x_m в тождестве (6). При этом слагаемое $\alpha_m x_1 x_2 \ldots \widehat{x}_t \ldots [x_m, x_n]$

станет равным $\alpha_m x_1 x_2 \dots \widehat{x}_t \dots [x_t, x_n]$, а все остальные слагаемые по модулю тождества (3) не изменятся. Тем самым тождество (7) доказано.

Замечание 1. *Из (7) вытекают тождества:*

$$x_1 x_2 \dots \widehat{x}_m \dots [x_m, x_n] = x_1 x_2 \dots \widehat{x}_{m+1} \dots [x_{m+1}, x_n] = x_1 x_2 \dots \widehat{x}_{n-1}[x_{n-1}, x_n].$$

Замечание 2. *Ввиду (3) в $\mathfrak{M}$ выполняются тождества:*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots \widehat{x}_m \dots x_{N-1}[x_m, x_N] & \\ &= x_1 x_2 \dots \widehat{x}_{m+1} \dots x_{N-1}[x_{m+1}, x_N] \\ &= x_1 x_2 \dots \widehat{x}_{N-1}[x_{N-1}, x_N] \end{aligned}$$

при $N \geq n$.

В частности, в многообразии $\mathfrak{M}$ для всех $N \geq n$ выполняются тождества

$$F = \sum_{s=2}^{m} \alpha_s x_1 x_2 \dots \widehat{x}_s \dots x_{N+1}[x_s, x_{N+1}] + \beta x_1 x_2 \dots x_{N+1} = 0, \tag{8}$$

где $\alpha_m \neq 0$.

Если все тождества $\mathfrak{M}$ следуют из тождеств степени $\leq n$, то многообразие $\mathfrak{M}$ конечно базируемо. Пусть $g = g(x_1, \dots, x_N)$ — полилинейное тождество $\mathfrak{M}$ степени $N > n$, не следующее из тождеств (1), (3), (7):

$$g = \sum_{i=1}^{N} x_i \left(\sum_{j=1}^{N} x_1 x_2 \dots \widehat{x}_i \dots \widehat{x}_j \dots x_N x_j \right) = \sum_{i=1}^{N} x_i g_i(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_N).$$

Найдется слагаемое $x_i g_i(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_N)$, не являющееся следствием тождеств (1), (3), (7). Пусть, скажем, $h = x_1 g_1(x_1, \dots, \widehat{x}_1, \dots, x_N)$ является таковым. По модулю тождеств (1), (3), (7), ввиду замечания 2 имеем:

$$\begin{aligned} h = \beta_m x_1 x_2 \dots \widehat{x}_m \dots x_{N-1}[x_m, x_N] & \\ &+ \sum_{s=2}^{m-1} \beta_s x_1 x_2 \dots \widehat{x}_s \dots x_{N-1}[x_s, x_N] + \gamma x_1 x_2 \dots x_N, \end{aligned}$$

причем набор $\overline{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$ не пропорционален набору $\overline{\beta} = (\beta_2, \dots, \beta_m, \gamma)$. Рассмотрим многочлен $g_1 = g - \frac{\beta_m}{\alpha_m} F$. Так как $\overline{\alpha}$ не пропорционален $\overline{\beta}$, то g_1 — ненулевой многочлен вида

$$\begin{aligned} g_1 = \sum_{s=2}^{m-1} \gamma_s x_1 x_2 \dots \widehat{x}_s \dots x_{N-1}[x_s, x_N] & \\ &+ \delta x_1 x_2 \dots x_N + \sum_{i=2}^{N} x_i g_i(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_N), \end{aligned}$$

являющийся тождеством многообразия $\mathfrak{M}$. В многочлене g_1 по построению не все γ_s равны нулю, либо $\delta \neq 0$. Подставим $x_1 = y_1 y_2$ в g_1. Получим, что в многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется нетривиальное тождество

$$g_2 = g_1(y_1 y_2, x_2, \dots, x_N) = \sum_{s=2}^{m-1} \gamma_s y_1 y_2 x_2 \dots \widehat{x}_s \dots x_N [x_s, x_N] + \delta y_1 y_2 x_2 \dots x_N.$$

Переобозначив очевидным образом переменные и воспользовавшись тождеством (3) получаем, что в многообразии $\mathfrak{M}$ выполняется нетривиальное тождество

$$G = \sum_{s=2}^{m-1} \gamma_s x_1 x_2 \dots \widehat{x}_s \dots x_N [x_s, x_{N+1}] + \delta x_1 x_2 \dots x_{N+1} = 0.$$

По предположению индукции $\mathfrak{M}$ конечно базируемо в этом случае. Теорема доказана.

□

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{M}_3 = \operatorname{Var} A_3$ *— многообразие, порожденное алгеброй* A_3*. Тогда* $\mathfrak{M}_3$ *— шпехтово многообразие.*

Доказательство. Схема доказательства теоремы 2 во многом аналогична доказательству теоремы 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственное подмногообразие $\mathfrak{M}_3$. Проверим, что $\mathfrak{M}$ конечно базируемо. Так как $\mathfrak{M}_3$ задается тождествами (1), (4), (5), а также в $\mathfrak{M}_3$ выполняется тождество (2), то конечную базируемость $\mathfrak{M}$ достаточно доказывать по модулю тождеств (1), (2), (4), (5).

Можно считать, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству степени $n \geq 4$ вида:

$$\alpha_2 x_3 [x_1, x_2] x_4 \dots x_n + \alpha_3 x_2 [x_1, x_3] x_4 \dots x_n + \dots + \alpha_n x_2 [x_1, x_n] x_3 \dots x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n.$$

Пусть $m = \max\limits_{\alpha_s \neq 0} s$. Доказательство конечной базируемости $\mathfrak{M}$ будем вести индукцией по m.

База индукции: если m не существует, то есть все $\alpha_s = 0$, то ввиду нетривиальности f получим, что для некоторого i коэффициент $\beta_i \neq 0$. Подставляя вместо $x_i = y_1 y_2$, получим, что многообразие $\mathfrak{M}$ нильпотентно, а значит конечно базируемо.

Переход: пусть многообразие $\mathfrak{M}$ удовлетворяет тождеству

$$\alpha_2 x_3 [x_1, x_2] x_4 \dots x_n + \dots + \alpha_m x_2 [x_1, x_m] x_3 \dots x_n + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n, \quad (10)$$

В этом тождестве $\alpha_m \neq 0$, $n \geq 4$, $n \geq m \geq 2$. Если некоторое $\beta_i \neq 0$, то подставим в (10) $x_i = y_1 y_2$. Получим, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет тождеству $y_1 y_2 x_2 \dots x_n = 0$. Значит, многообразие $\mathfrak{M}$ нильпотентно в этом случае и, следовательно, конечно базируемо. Пусть все $\beta_i = 0$. Тогда $\mathfrak{M}$ удовлетворяет тождеству вида:

$$x_2 [x_1, x_m] x_3 \dots \widehat{x}_m \dots x_n = \sum_{i=2}^{m-1} \gamma_i x_2 [x_1, x_i] x_3 \dots \widehat{x}_i \dots x_n. \quad (11)$$

Поскольку правая часть тождества (11) не изменится по модулю (1), (2) при перестановке x_m и x_t $(m \leq t \leq n)$, то

$$x_2 [x_1, x_t] x_3 \dots \widehat{x}_t \dots x_n = \sum_{i=2}^{m-1} \gamma_i x_2 [x_1, x_i] x_3 \dots \widehat{x}_i \dots x_n. \quad (12)$$

В частности, в $\mathfrak{M}$ выполняются тождества:

$$x_2[x_1, x_m]x_3 \dots \widehat{x}_m \dots x_n = x_2[x_1, x_{m+1}]x_3 \dots \widehat{x}_{m+1} \dots x_n = \dots = x_2[x_1, x_n]x_3 \dots x_{n-1}. \quad (13)$$

Из тождеств (13) вытекает, что при $N \geq n$ в $\mathfrak{M}$ также выполняются тождества:

$$x_2[x_1, x_m]x_3 \dots \widehat{x}_m \dots x_N = x_2[x_1, x_{m+1}]x_3 \dots \widehat{x}_{m+1} \dots x_N = \dots = x_2[x_1, x_N]x_3 \dots x_{N-1}. \quad (14)$$

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_N)$ — полилинейное тождество степени $N > m$ многообразия $\mathfrak{M}$, не следующее из (1), (4), (5), (10). Тогда либо $\mathfrak{M}$ нильпотентно, либо ввиду тождеств (14) (по модулю тождеств (1), (4), (5)) можно считать, что $f = \sum\limits_{s=2}^{m} \gamma_s x_2[x_1, x_s]x_3 \dots \widehat{x}_s \dots x_N$, но из (10) при $\beta_i = 0$ для всех i следует тождество

$$g = \sum_{s=2}^{m} \alpha_s x_2[x_1, x_s]x_3 \dots \widehat{x}_s \dots x_N \quad (\alpha_m \neq 0).$$

Рассмотрим нетривиальное тождество $g - \dfrac{\gamma_m}{\alpha_m} f = 0$ многообразия $\mathfrak{M}$. По предположению индукции $\mathfrak{M}$ с таким тождеством конечно базируемо. Переход проделан. Теорема доказана. $\square$

4. Объединение двух шпехтовых многообразий

В этом разделе мы найдем базис тождеств объединения шпехтовых многообразий $\mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3$. Ясно, что это многообразие порождено алгеброй $A_2 \oplus A_3$.

Теорема 3. *Многообразие $\mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3 = \operatorname{Var}(A_2 \oplus A_3)$ имеет по модулю (1) следующий базис тождеств:*

$$x_1[x_2, x_3]x_4 - x_4[x_2, x_3]x_1 = 0, \quad (15)$$

$$x_1[x_2, x_3]x_4 + x_1[x_3, x_4]x_2 + x_1[x_4, x_2]x_3 = 0, \quad (16)$$

$$x_1x_2[x_3, x_4]x_5 = 0, \quad (17)$$

$$x_1[x_2, x_3]y_1y_2 \dots y_n[x_4, x_5] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие Φ-алгебр, заданное тождествами (1), (15)–(18). Заметим, что тождества (15)–(18) следуют из тождества (3). Следовательно, $A_2 \in \mathfrak{M}$. Тождества (15), (17), (18) следуют из (2) и (4). Поэтому эти тождества выполняются в A_3. Тождество (16) может быть переписано в виде

$$x_1x_2[x_3, x_4] + x_1x_3[x_4, x_2] + x_1x_4[x_2, x_3] = 0. \quad (16')$$

Поэтому (16) является следствием (2). Ввиду леммы 1 получаем, что $A_3 \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3$. Пусть $f = 0$ — произвольное тождество, выполняющееся в A_2 и A_3. Покажем, что f — следствие (1), (15)–(18). Ввиду $\operatorname{ch}\Phi = 0$ можно считать, что f — полилинейный многочлен. Преобразуем f по модулю (1), (15)–(17). Так как в A_2 нет тождеств степени ≤ 3, не следующих из (1), (15)–(17), то степень $f \geq 4$. По модулю (1) f преобразуется к виду:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i x_1 \dots \widehat{x}_i \dots x_n + \sum_{1 \leq k < s \leq n} \beta_{k,s} x_{i_1} [x_k, x_s] x_{i_2} \dots x_{i_{n-2}} + \sum_{1 \leq m < l \leq n} \gamma_{m,l} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-2}} [x_m, x_l].$$

Если во второй сумме $k \neq 1$, то при помощи тождеств (15) и (18) можно добиться, чтобы $i_2 = 1$, а потом, используя (16), поместить x_1 в коммутатор. Если в третьей сумме $m \neq 1$ и $l \neq n$, то $i_1 \neq 1$ или $i_1 \neq n$. Воспользовавшись в этом случае тождеством (18), получим, что $i_{n-2} = 1$ или $i_{n-2} = n$, а потом, применяя (16$'$), поместим x_1 или x_n в последний коммутатор. В результате по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ многочлен f преобразуется к виду:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i x_1 \dots \widehat{x}_i \dots x_n + \sum_{j=2}^{n} \beta_j x_2 [x_1, x_j] x_3 \dots \widehat{x}_j \dots x_n + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k x_2 x_3 \dots \widehat{x}_k \dots x_n [x_1, x_k] + \dots + \sum_{s=2}^{n-1} \delta_s x_1 \dots \widehat{x}_s \dots x_{n-1} [x_s, x_n].$$

Заметим, что $f = 0$ — тождество в A_2 и A_3.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что все коэффициенты $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_s$ равны нулю.

1. Подставим в f следующие элементы из A_2: $x_1 = v_1$, $x_2 = \dots \widehat{x}_s = \dots = x_n = e_{11}$, $x_s = e_{12}$, получим $-\delta_s v_2 = 0$, следовательно $\delta_s = 0$ при $s = 2, \dots, n-1$.
2. Подставим теперь в f: $x_i = v_1$, $x_1 = \dots = \widehat{x}_i = \dots = x_n = e_{11}$ из A_2, получим $\alpha_i v_1 = 0$. Значит, $\alpha_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Наконец, подставим в f следующие элементы из A_2: $x_2 = v_1$, $x_1 = x_3 = \dots \widehat{x}_k = \dots = x_n = e_{11}$, $x_k = e_{12}$, получим $\gamma_k v_2 = 0$ (при $k \neq 2$); если же $k = 2$, то подставим $x_3 = v_1$, $x_1 = x_4 = \dots = x_n = e_{11}$, $x_2 = e_{12}$, получим $\gamma_2 v_2 = 0$. В итоге, $\gamma_k = 0$ при $k = 2, 3, \dots, n$.
4. В результате имеем

$$f = \sum_{j=2}^{n} \beta_j x_2 [x_1, x_j] x_3 \dots \widehat{x}_j \dots x_n = \beta_2 x_3 [x_1, x_2] x_4 \dots x_n + \beta_3 x_2 [x_1, x_3] x_4 \dots x_n + \dots + \beta_n x_2 [x_1, x_n] x_3 \dots x_{n-1}.$$

   Подставим в f элементы из A_3: $x_1 = x_2 = \dots = \widehat{x}_s = \dots = x_n = v_2 + e_{11}$, $x_s = e_{21}$ $(s \geq 2)$, получим $\beta_s v_1 = 0$.

Следовательно, все коэффициенты β_s равны нулю при $s = 2, 3, \dots, n$. Тем самым теорема доказана.

□

Теорема 4. *Многообразие* $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(A_2 \oplus A_3)$ *не имеет конечного базиса тождеств.*

Доказательство. Обозначим через h_n элементы серии тождеств (18) многообразия $\mathfrak{M}$.

$$h_n = x_1[x_2, x_3]y_1y_2 \dots y_n[x_4, x_5] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Заметим, что все полилинейные следствия тождества h_k либо имеют степень $k+5$, либо лежат в T-идеале алгебры R, порожденном тождествами (15)–(17).

Пусть G — множество, состоящее из многочленов (1), (15)–(17) и многочленов $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$. Если бы многообразие $\mathfrak{M}$ было конечно базируемым, то все тождества этого базиса (а значит и всего многообразия $\mathfrak{M}$) следовали бы из тождеств конечного множества G. Многочлен h_n имеет степень $n+5$. Поэтому h_n следует из G только в случае, когда h_n — следствие тождеств (1), (15)–(17). Покажем, что это не так.

Рассмотрим алгебру $A \in \mathfrak{P}$ с множеством порождающих $\{w, a_i | i = 1, 2, \dots\}$ и определяющими соотношениями $a_ia_j = 0$; $w^2 = 0$; $wa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}wa_j = 0$, $a_swa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}wa_j = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$; $wa_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_k} = wa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$, где $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ — перестановка чисел $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ для любого k. Напомним, что порядок умножения в словах из многообразия $\mathfrak{P}$ определяется правилом: $x_1x_2\dots x_k = x_1R_{x_2}R_{x_3}\dots R_{x_k}$. Кроме того, все произведения в алгебре A, содержащие w по крайней мере три раза, равны нулю. В алгебре A выполняются тождества (1), (15)–(17). Подставим в h_n: $x_1 = a_1$, $x_2 = w$, $x_3 = a_2$, $y_1 = a_3, \dots, y_n = a_{n+2}$, $x_4 = w$, $x_5 = a_{n+3}$. Получим $h_n = -a_1wa_2\dots a_{n+3}w \neq 0$, так как элемент $a_1wa_2\dots a_{n+3}w$ не лежит в идеале, порожденном определяющими соотношениями алгебры A. Следовательно, тождество $h_n = 0$ не следует из тождеств (1), (15)–(17) и теорема доказана.

□

References

[1] W. Specht, *Gesetze in Ringen. I*, Mathematische Zeitschrift, **52**:5 (1950), 557–589. MR0035274

[2] A.R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra i Logika, **26**:5 (1987), 597–641. MR0985840

[3] G.V. Dorofeev, *Properties of the join of varieties of algebras*, Algebra i Logika, **16**:1 (1977), 24–39. MR0505970

[4] I.V. Lvov, *Finite-dimensional algebras with infinite bases of identities*, Sib. Math. J., **19**:1 (1978), 91–99. MR0506540

[5] Yu.N. Mal'tsev, V.A. Parfenov, *A nonassociative algebra having no finite basis for its laws*, Sib. Math. J., **18**:6 (1977), 1420–1421. MR0491866

[6] I.M. Isaev, A.V. Kislitsin, *Identities in vector spaces and examples of finite-dimensional linear algebras having no finite basis of identities*, Algebra i Logika, **52**:4 (2013), 435–460. MR3154363

[7] O.V. Shashkov, *The join of varieties with associative-commutative intersection of bounded index*, Sib. Math. J., **56**:3 (2015), 704–714. MR3442813

[8] S.V. Polin, *Identities of finite algebras*, Sib. Math. J., **17**:6 (1976), 1356–1366. MR0439715

[9] A.V. Kislitsin, *On identities of spaces of linear transformations over infinite field*, Izv. Altai State Univ., **1–2 (65)** (2010), 37–41.

Ismail Musaevich Isaev
Altai State Pedagogical Univercity,
55, Molodeznaya st.,
Barnaul, 656031, Russia
E-mail address: isaev@uni-altai.ru