S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1506–1512 (2018) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2018.15.125 MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ И $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ

Abstract. Koolen and Park obtained the list of intersection arrays for Shilla graphs with $b = 3$. In particular distance-regular graph with intersectuion array $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ is Shilla graphs with $b = 3$. Gavrilyuk and Makhnev investigated properties of a graph with intersectuion array $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$.

We proved that distance-regular graphs with intersectuion arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

Belousov, I.N., Makhnev, A.A., Distance-regular graphs with intersectuion arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist.

Поступила 10 октября 2018 г., опубликована 26 ноября 2018 г.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$. В [1] классифицированы графы Шилла с $b = 3$.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф Шилла с* $b = 3$*. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

Графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ являются Q-полиномиальными. Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро).

Продолжается программа изучения графов Шилла с $b = 3$. В [2] найдены возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом персечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$. В [3] доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ не существует. В работе рассматривается граф с массивами персечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$. Этот граф имеет спектр $42^1, 14^{42}, 0^{210}, -7^{90}$ и $v = 1 + 42 + 210 + 90 = 343$ вершины.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ *не существует.*

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ имеет спектр $\{60^1, 14^{45}, 0^{207}, -10^{69}\}$, $v = 1 + 60 + 225 + 36 = 322$ вершин и является Q-полиномиальным. В работе [4] доказано, что Γ не является вершинно симметричным.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ *не существует.*

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [5].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ — число вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$. Числа $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Следующий результат дает соотношения между тройными числами пересечений в случае, когда Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ.

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, Если u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[333] = \delta$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $a_3 - [133] = [123] = [132] = c_3 - \alpha$, $a_3 - [313] = [312] = [213] = c_3 - \beta$, $a_3 - [331] = [231] = [321] = c_3 - \gamma$;

(2) $\gamma - [232] = [233] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \alpha - \delta$, $\alpha - [223] = [323] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \beta - \delta$, $\beta - [322] = [332] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \gamma - \delta$;

(3) $[222] = p_{22}^{3} - \gamma - [223] = p_{22}^{3} - p_{23}^{3} + p_{33}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

1. Доказательство предложения 2

Докажем предложение 2. В леммах 1–3 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[333] = \delta$.

Лемма 1. *Верны равенства $a_3 - [133] = [123] = [132] = c_3 - \alpha$, $a_3 - [313] = [312] = [213] = c_3 - \beta$, $a_3 - [331] = [231] = [321] = c_3 - \gamma$.*

Доказательство. Фиксируем индексы 1, 3. Тогда

$[130] + [131] + [132] + [133] = p_{13}^{3} - [013]$,

$[013] + [113] + [213] + [313] = p_{13}^{3} - [103]$,

$[103] + [113] + [123] + [133] = p_{13}^{3} - [130]$,

Из [5, таблица 3] имеем

$a_3 - [133] = [123] = [132] = c_3 - \alpha$,

$a_3 - [313] = [312] = [213] = c_3 - \beta$,

$a_3 - [331] = [231] = [321] = c_3 - \gamma$. □

Лемма 2. *Верны равенства $\gamma - [232] = [233] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \alpha - \delta$, $\alpha - [223] = [323] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \beta - \delta$, $\beta - [322] = [332] - p_{23}^{3} + c_3 = p_{33}^{3} - p_{23}^{3} + 2c_3 - a_3 - 1 - \gamma - \delta$.*

Доказательство. Фиксируем индексы 2, 3. Тогда

$[230] + [231] + [232] + [233] = p_{23}^{3} - [023]$,

$[023]+[123]+[223]+[323]=p^3_{23}-[203]$,
$[302]+[312]+[322]+[332]=p^3_{23}-[230]$.
Из [5, таблица 3] имеем
$\gamma-[232]=[233]-p^3_{23}+c_3=p^3_{33}+2c_3-a_3-1-\alpha-\delta-p^3_{23}$.
Аналогично получим остальные равенства. □

Лемма 3. *Верны равенства* $[222]=p^3_{22}-\gamma-[223]=p^3_{22}-p^3_{23}+p^3_{33}+2c_3-a_3-1-\alpha-\beta-\gamma-\delta$.

Доказательство. Из [5, таблица 3] имеем
$[222]=p^3_{22}-\gamma-[223]=p^3_{22}-\gamma+(p^3_{33}-p^3_{23}+2c_3-a_3-1-\beta-\delta-\alpha)$. Отсюда
$[222]=p^3_{22}-p^3_{23}+p^3_{33}+2c_3-a_3-1-\alpha-\beta-\gamma-\delta$.
Лемма доказана. □

Из лемм 1–3 следует предложение 2.

2. Граф с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$

В этом разделе будем предполагать, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$. Тогда дуальная матрица собственных значений равна

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 42 & 210 & 90\\ 1 & 14 & 0 & -15\\ 1 & 0 & -7 & 6\\ 1 & -7 & 14 & -8\end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Для ненулевых чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*
(1) $p^1_{11}=11$, $p^1_{12}=30$, $p^1_{22}=120$, $p^1_{23}=60$, $p^1_{33}=30$*;*
(2) $p^2_{11}=6$, $p^2_{12}=24$, $p^2_{13}=12$, $p^2_{22}=131$, $p^2_{23}=54$, $p^2_{33}=24$*;*
(3) $p^3_{12}=28$, $p^3_{13}=14$, $p^3_{22}=126$, $p^3_{23}=56$, $p^3_{33}=19$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u,v,w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ, $[rst]=\left[{uvw \atop rst}\right]$, $[122]=\alpha$, $[212]=\beta$, $[221]=\gamma$ и $[333]=\delta$ Из прдложения 2 следует лемма 5.

Лемма 5. *Верны равенства:*
(1) $14-[133]=[123]=[132]=28-\alpha$*,* $14-[313]=[312]=[213]=28-\beta$*,* $14-[331]=[231]=[321]=28-\gamma$*;*
(2) $\gamma-[232]=[233]-28=4-\alpha-\delta$*,* $\alpha-[223]=[323]-28=4-\beta-\delta$*,* $\beta-[322]=[332]-28=4-\gamma-\delta$*;*
(3) $[222]=126-\gamma-[223]=130-\alpha-\beta-\gamma-\delta$.

Лемма 6. *Верны равенства*
(1) $28\alpha+28\beta-21\gamma=6\delta+532$*;*
(2) $-21\alpha+28\beta+28\gamma=6\delta+532$*;*
(3) $28\alpha-21\beta+28\gamma=6\delta+532$.

Доказательство. Для нашего графа имеем $q^1_{13}=q^1_{31}=q^3_{11}=0$. Поэтому $S_{113}(u,v,w)=S_{131}(u,v,w)=S_{311}(u,v,w)=0$. Так как $Q_{21}=0$, то слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[{uvw \atop rst}\right]$, имеющие два индекса 2, умножаются на 0, поэтому их можно опускать. Вычислим $S_{113}(u,v,w)$. При нулевых r,s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{31}Q_{33}+Q_{31}Q_{01}Q_{33}+Q_{31}Q_{31}Q_{03}=84\cdot 56+49\cdot 90$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123]+Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231]+Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312]=-49\cdot 12[312]$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{23}[132]+Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213]+Q_{31}Q_{21}Q_{13}[321]=-49\cdot 12[132]$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133]+Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313]+Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331]=49\cdot 16([133]+[313])-49\cdot 15[331]$,

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233]+Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323]+Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332]=49\cdot 6[332]$.

Отсюда $S_{113}(u,v,w)=49(96+90-12(28-\beta)-60(28-\alpha)+16(\alpha+\beta-28)-15(\gamma-14)+6(32-\gamma-\delta))=0$ и $28\alpha+28\beta-21\gamma-6\delta=40\cdot 28-15\cdot 14-186-192=65\cdot 14-378=650+260-378=532$. Итак, $28\alpha+28\beta-21\gamma=6\delta+532$.

Аналогично, $-21\alpha+28\beta+28\gamma=6\delta+532$ и $28\alpha-21\beta+28\gamma=6\delta+532$. Лемма доказана. □

Завершим доказательство теоремы 1. Ввиду леммы 6 имеем $\alpha=\beta=\gamma=(6\delta+532)/35$, $\delta=7\delta'\le 19$. Противоречие с тем, что $6\delta'+76$ не делится на 5. Теорема 1 доказана.

3. Граф с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$

В этом разделе будем предполагать, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$. Тогда дуальная матрица собственных значений графа Γ равна

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 45 & 207 & 69\\ 1 & 21/2 & 0 & -23/2\\ 1 & -1 & -23/5 & 23/5\\ 1 & -25/2 & 23 & -23/2\end{pmatrix}.$$

Лемма 7. (*лемма* 1 [4]). *Для чисел пересечения графа* Γ *верны равенства*

(1) $p^1_{11}=14$, $p^1_{21}=45$, $p^1_{32}=30$, $p^1_{22}=150$, $p^1_{33}=6$,

(2) $p^2_{12}=40$, $p^2_{13}=8$, $p^2_{32}=24$, $p^2_{33}=4$, $p^2_{22}=160$,

(3) $p^3_{12}=50$, $p^3_{22}=150$, $p^3_{13}=10$, $p^3_{23}=25$ *и* $p^3_{33}=0$.

Лемма 8. *Пусть* u,v,w — *вершины графа* Γ, $d(v,w)=3$, $d(u,v)=1$ *и* $d(u,w)=2$. *Положим* $[hij]=\begin{bmatrix} uvw\\ hij\end{bmatrix}$, $[213]=\alpha$ *и* $[332]=\beta$. *Тогда верны равенства:*

(1) $[h11]=[h33]=0$ *и* $[13h]=[31h]=0$ *для всех* $1\le h\le 3$*;*

(2) $[112]=\alpha+4$, $[113]=-\alpha+10$, $[121]=12$, $[122]=-\alpha+36$, $[123]=\alpha-3$, $[212]=-\alpha+45$*;*

(3) $[221]=-\beta+36$, $[231]=\beta+4$, $[232]=-\beta+25$, $[321]=\beta+2$, $[322]=-\beta+246$, $[223]=-\alpha+24$, $[331]=-\beta+6$, $[323]=4$ *и* $[222]=\alpha+\beta+90$.

Доказательство. Так как $d(v,w)=3$, то $[h11]=0$, а так как $p^3_{33}=0$, то $[h33]=0$ для всех $1\le h\le 3$. Далее, $d(u,v)=1$, поэтому $[13h]=[31h]=0$ для всех $1\le h\le 3$.

Остальные равенства получаются применением вышеуказанных формул с учетом равенства $p^3_{33}=0$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *В условиях леммы* 8 *верны равенства:*

(1) $S_{113}(u,v,w)=85169/40\cdot\alpha+85169/40\cdot\beta-463059/20$*;*

(2) $S_{131}(u,v,w)=-85169/40\cdot\alpha-85169/40\cdot\beta+671439/20$*;*

(3) $S_{311}(u,v,w)=-85169/40\cdot\alpha-85169/40\cdot\beta+447879/20$.

Доказательство. С помощью формул $S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right]$ и леммы 8 вычислим $S_{113}(u,v,w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{11}Q_{23}[012]+Q_{11}Q_{01}Q_{33}[103]+Q_{31}Q_{21}Q_{03}[320]=45\cdot 21\cdot 23/10-45\cdot 21\cdot 23/4+69\cdot 25/2$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{11}Q_{23}[112]+Q_{11}Q_{21}Q_{13}[121]+Q_{21}Q_{11}Q_{13}[211]=21\cdot 21\cdot 23[112]/20+21\cdot 23[121]/4=21\cdot 21\cdot 23(\alpha+4)/20+63\cdot 23$,

$Q_{11}Q_{11}Q_{33}[113]+Q_{11}Q_{31}Q_{13}[131]+Q_{31}Q_{11}Q_{13}[311]=-21\cdot 21\cdot 23[113]/8=-21\cdot 21\cdot 23(10-\alpha)/8$,

$Q_{11}Q_{21}Q_{23}[122]+Q_{21}Q_{11}Q_{23}[212]+Q_{21}Q_{21}Q_{13}[221]=-21\cdot 23([122]+[212])/10-23[221]/2=-21\cdot 23(-2\alpha+81)/10-23(-beta+36)/2$,

$Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123]+Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231]+Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312]=21\cdot 23[123]/4-25\cdot 23[231]/4-21\cdot 23\cdot 25[312]/20=21\cdot 23(\alpha-3)/4-25\cdot 23(beta+4)/4$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{23}[132]+Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213]+Q_{31}Q_{21}Q_{13}[321]=21\cdot 23[213]/4-25\cdot 23[321]/4=21\cdot 23\alpha/4-25\cdot 23(\beta+2)/4$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133]+Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313]+Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331]=-23\cdot 25\cdot 25[331]/8=-23\cdot 25\cdot 25(-\beta+6)/8$,

$Q_{21}Q_{21}Q_{23}[222]=23[222]/5=23(\alpha+\beta+90)/5$,

$Q_{21}Q_{21}Q_{33}[223]+Q_{21}Q_{31}Q_{23}[232]+Q_{31}Q_{21}Q_{23}[322]=-23[223]/2+23\cdot 5([232]+[322])/2=-23(-\alpha+24)/2+23\cdot 5(-2\beta+49)/2$.

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233]+Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323]+Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332]=-23\cdot 25[323]/4+23\cdot 125[332]/4=-23\cdot 25+23\cdot 125\beta/4$.

Отсюда $S_{113}(u,v,w)=85169\alpha/40+85169\beta/40-463059/20$.

Аналогично, получим равенства

$S_{131}(u,v,w)=-85169/40\cdot\alpha-85169/40\cdot\beta+671439/20$,

$S_{311}(u,v,w)=-85169/40\cdot\alpha-85169/40\cdot\beta+447879/20$. Лемма доказана. $\square$

Для дистанционно регулярным графа Γ с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$ параметры Крейна q^1_{13}, q^1_{31} и q^3_{11} равны 0. Поэтому $S_{113}(u,v,w)=S_{131}(u,v,w)=S_{311}(u,v,w)=0$. Но полученная система уравнений несовместна, поэтому дистанционно регулярным графа Γ с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$ не существует. Теорема 2 доказана.

References

[1] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. MR2718281

[2] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{15,12,6;1,2,10\}$, Doklady Mathematics, **84**:1 (2011), 510–514. MR2893565

[3] A.E. Brouwer, S. Sumalroj, C. Worawannotai, *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection array* $\{27,20,10;1,2,18\}$ *and* $\{36,28,4;1,2,24\}$, Australasian Journal of Combinatorics, **66**:2 (2016), 330–332. MR3556137

[4] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *Automorphisms of graphs with intersection arrays* $\{60,45,8;1,12,50\}$ *and* $\{49,36,8;1,6,42\}$, Mathematical Zametki, **101**:6 (2017), 823–831. MR3659554

[5] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr, **65** (2012), 29–47. MR2943642

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S.Kovalevskaya st.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: i_belousov@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
Vyatskii Gosudarstvennyi Universitet,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S.Kovalevskaya st.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru