S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1513–1529 (2018) УДК 519.6
DOI 10.33048/semi.2018.15.126 MSC 65F15, 41A30

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА С ОБРАТНЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ В МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ПРОНИ

А.А. ЛОМОВ

Abstract. In the nonlinear eigenvalue problem of modified Prony method under small perturbations the global convergence of first inverse iteration algorithm of M. Osborne (1970) is investigated.

Keywords: difference equations, parameter identification, modified Prony method, nonlinear eigenvalue problem, inverse iteration, global convergence.

1. Введение

В 1795 г. барон Г. Р. де Прони предложил метод извлечения синусоид и экспонент из наблюдений экспериментальных зависимостей $x[k] \in \mathbb{R}$ на конечной временной сетке $k \in \overline{1, N}$. Метод Прони [1, 2] состоит из следующих двух шагов.

1. Определение показателей $\lambda_i \in \mathbb{C}$ аппроксимирующих функций $\mathrm{e}^{\lambda_i k}$, $\mathrm{e}^{\overline{\lambda_i} k}$, $i \in \overline{1, l}$ в разложении

$$x[k] \simeq \sum_{i=1}^{l} \left(c_i \mathrm{e}^{\lambda_i k} + \overline{c_i} \mathrm{e}^{\overline{\lambda_i} k} \right) \doteq z[k]. \tag{1}$$

2. Определение коэффициентов c_i.

Первый шаг Г. Р. де Прони остроумно свел к вычислению коэффициентов γ_i характеристического многочлена

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_n s^n, \tag{2}$$

Lomov, A.A., On convergence of the inverse iteration algorithm for modified Prony method.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00592).

Поступила 23 июля 2018 г., опубликована 27 ноября 2018 г.

корнями которого являются числа $\mathrm{e}^{\lambda_i} \doteq \zeta_i$. Коэффициенты γ_i соответствуют разностному уравнению, описывающему правую часть (1):

$$\gamma_0 z[k] + \gamma_1 z[k+1] + \ldots + \gamma_n z[k+n] = 0, \quad k \in \overline{1, N-n}. \tag{3}$$

В предположении достаточной точности аппроксимации (1) в качестве $z[k]$ Г. Р. де Прони брал наблюдения $x[k]$, составляя систему из n линейных уравнений с n неизвестными $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ ($\gamma_n = 1$):

$$\begin{cases} \gamma_0 x[k] + \ldots + \gamma_{n-1} x[k+n-1] + x[k+n] = 0, \\ \quad \ldots \\ \gamma_0 x[k+n-1] + \ldots + \gamma_{n-1} x[k+2n-2] + x[k+2n-1] = 0. \end{cases}$$

Для увеличения устойчивости коэффициенты γ_i вычисляются из переопределенной системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_0 x[k] + \ldots + \gamma_{n-1} x[k+n-1] + x[k+n] = e[1], \\ \quad \ldots \\ \gamma_0 x[k+M-1] + \ldots + x[k+n+M-1] = e[M] \end{cases} \tag{4}$$

с $M > n$ минимизацией квадрата нормы невязки

$$e[1]^2 + \ldots + e[M]^2 \to \min_{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}}. \tag{5}$$

Вычисление c_i сводится к проецированию вектора $x \doteq [x[1]; \ldots; x[N]]$ на линейную оболочку заданного набора экспонент. А. Хаусхолдер назвал подход (5) расширенным методом Прони [3]. Он широко известен в литературе как метод Прони [4] и активно развивается в направлении обобщений на случай наблюдений линейных функционалов от x (Generalized Prony Method) и развития вычислительных алгоритмов [5]. Особенностью метода Прони является наличие сравнительно простых решений, или в виде явных формул линейного метода наименьших квадратов [3, 4], или заменой на близкую задачу на собственные числа постоянной матрицы, сформированной из наблюдений (алгоритмы ESPRIT [6, 7], Писаренко и др. [5]).

Еще А. Хаусхолдером было высказано мнение [3], что вместо нормы невязки (5) для вычисления коэффициентов γ_i естественно использовать «более правильный» функционал $J = \|x - z\|^2$. Минимизация J по параметрам γ_i, c_i с условием (3) затруднена чрезвычайно плохой обусловленностью задачи и требует знания хорошего начального приближения коэффициентов γ_i для сходимости универсальных градиентных или квазиньютоновских алгоритмов [8, 9]. Вычислительное решение с большими радиусом и скоростью сходимости удалось найти М. Осборну [10, 11] и независимо в более быстром варианте А. О. Егоршину [12, 13]. Алгоритмы Осборна—Егоршина основаны на обратных итерациях для нахождения собственного вектора с минимальным по модулю собственным значением зависящей от параметров и наблюдений специальной матрицы в выражении для целевой функции J (раздел 2). Данный подход получил название модифицированного метода Прони [14] или вариационного метода идентификации [13].

Расчеты показывают [11], что при случайных аддитивных погрешностях в наблюдениях x модифицированный метод Прони с точки зрения отклонения и разброса оценок существенно более устойчив к возмущениям, чем метод Прони по невязке (5). Теоретически модифицированный метод приводит к оценкам γ_i, близким к асимптотически эффективным [15]. Эти факты служат оправданием для сравнительно больших вычислительных затрат в модифицированном методе.

В литературе есть много указаний на малую чувствительность алгоритмов с обратными итерациями в модифицированном методе Прони к выбору начального приближения [9, 11, 12, 14, 16]. В обзоре [9] отмечена недостаточная изученность этих алгоритмов. В [14] доказана устойчивость второго алгоритма М. Осборна [11] в неподвижной точке. В [17] доказана статистическая состоятельность решения в пределе малого времени дискретизации. В [16] обсуждалась скорость сходимости в малой окрестности минимума.

В настоящей статье на основе теории возмущений исследуется глобальная сходимость в малую окрестность экстремума исторически первого алгоритма М. Осборна с обратными итерациями [10] в модифицированном методе Прони. Для малых возмущений удается объяснить нечувствительность алгоритма [10] к начальному приближению.

2. Модифицированный метод Прони

Рассмотрим задачу аппроксимации сеточной функции $x \in \mathbb{R}^N$ решениями $z \doteq [z[1]; \dots; z[N]] \in \mathbb{R}^N$ однородного разностного уравнения (3) с вещественными коэффициентами. Будем подбирать начальные условия $[z[1], \dots, z[n]]$ и коэффициенты $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ с целью минимизации целевой функции

$$J = \|x - z\|^2 = (x - z)^{\mathrm{T}} (x - z) \to \min \tag{6}$$

при условии (3). Эту задачу будем называть модифицированной задачей Прони.

Уравнение (3) запишем в матричном виде

$$G^{\mathrm{T}} z = 0, \tag{7}$$

$$G^{\mathrm{T}} \doteq \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times N}.$$

После минимизации по начальным условиям $z[1], \dots, z[n]$ (второй шаг метода Прони) целевая функция (6) примет вид

$$J(\gamma) = x^{\mathrm{T}} G C G^{\mathrm{T}} x = \gamma^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} C V \gamma, \quad C \doteq (G^{\mathrm{T}} G)^{-1} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times(N-n)}, \tag{8}$$

$$\gamma \doteq [\gamma_0; \dots; \gamma_{n-1}; 1] \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$V \doteq \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & x[n+1] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[n+2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x[N-n] & x[N-n+1] & \dots & x[N] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times(n+1)}. \tag{9}$$

Здесь и далее запись $[a; b]$ означает матрицу $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$. Заметим, что целевая функция $J(\gamma)$ не зависит от нормы γ.

В [10] М. Осборн предложил следующий алгоритм приближенной минимизации $J(\gamma)$ (8). Матрица $V^{\mathrm{T}} C V$ неотрицательно определена. Верно разложение

$$Q \doteq V^{\mathrm{T}} C V = P \operatorname{diag}(\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_1) P^{\mathrm{T}}, \quad P^{\mathrm{T}} P = I,$$

где $P \doteq \begin{bmatrix} p_{n+1} & \ldots & p_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ — вещественная ортогональная матрица из собственных векторов. Пусть $\lambda_1(Q)$ и $p_1(Q)$ — минимальное собственное число и соответствующий собственный вектор. Предполагается, что число $\lambda_1(Q)$ некратное (это условие идентифицируемости, налагаемое на наблюдения x). Алгоритм М. Осборна [10] имеет вид

$$\gamma_{[k+1]} = p_1(Q(\gamma_{[k]})), \quad k \geqslant 0. \tag{10}$$

Для вычисления p_1 на каждом шаге k используются обратные итерации с постоянной матрицей $Q^{-1}(\gamma_{[k]})$.

В [17] со ссылкой на вычислительный эксперимент отмечено, что итерации (10) малочувствительны к выбору $\gamma_{[0]}$ и имеют предельную точку в малой окрестности точки минимума. Далее в статье доказываются эти экспериментально обнаруженные свойства в предположении малости нормы возмущений $\min_{z:(3)} \|x - z\|$.

3. Неподвижная точка алгоритма (10)

Нормы матриц $\|A\| \doteq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ согласуем с евклидовой нормой $\|x\| \doteq \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$. Пусть наблюдения $x = z_* + \eta$ порождены добавлением возмущения η к «истинному» процессу: $G^{\mathrm{T}}(\gamma_*)z_* = 0$. Поведение итераций (10) при малых возмущениях η описывается следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Пусть в области Γ, содержащей истинную точку γ_* и точки $\gamma_{[k]}$, $k \geqslant k_*$, при некотором $k_* \geqslant 0$, выполнено условие на малость $\lambda_1(Q)$ и тем самым на малость нормы возмущения $\|x - z_*\|$:*

$$\frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1. \tag{11}$$

Тогда отображение $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$ при $k \geqslant k_*$ в итерации (10) является сжимающим, следовательно, имеет единственную неподвижную точку в Γ.

Следствие 1. *Пусть в области Γ выполнено $\|C\| \leqslant a$, $\|V\| \leqslant b$. Тогда для сжатия в отображении $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$ (10) достаточно условия*

$$\sqrt{\lambda_1} < \sqrt{\varrho^2 + \lambda_2} - \varrho, \quad \varrho \doteq nab.$$

Теорема 2. *Все элементы $\gamma_{[k]}$ в итерациях (10) при $k \geqslant k_* = 1$ остаются в следующей окрестности истинной точки γ_*:*

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma_{[k]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} &\leqslant \frac{\alpha' \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|}{\lambda_{2*}}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\alpha \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|}{\lambda_{2*}}\,\varepsilon, \quad \varepsilon \doteq \|V - V_*\| = \|V(x - z_*)\|. \end{aligned} \tag{12}$$

Константа α' определена условием $\|C_{[k]}\| \leqslant \alpha'\|C_*\|$, $k \geqslant 0$, которое можно рассматривать как ограничение на начальное значение $\gamma_{[0]}$, а константа $\alpha > \alpha'$ определяется условием мажорирования слагаемых $O(\varepsilon^2)$ в (12).

Заметим, что теорема 2 гарантирует попадание в область (12) после первой итерации независимо от выполнения условий сжатия в начальной точке $\gamma_{[0]}$. Остается выяснить, при каких возмущениях ε условие сжатия из теоремы 1 будет выполнено в области (12). Это гарантирует наличие неподвижной точки итераций (10) внутри области (12).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\varepsilon < \frac{1}{5n\|C_*\|^{1/2}} \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha\,\|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|} \quad \text{и} \quad \varepsilon < \|V_*\|. \tag{13}$$

Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 1 в области (12)*:*

$$\frac{\varepsilon}{\|V_*\|} < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2}}, \quad \text{где} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_* &\doteq \frac{\sqrt{\omega^2+\lambda_2}-\omega}{\sqrt{2\|C_*\|}}, \quad \omega \doteq 4n\|C_*\| \cdot \|V_*\|,\\
f_1 &\doteq \|V_*\|^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\|V_*\| + \alpha_2\|V_*\|^2\right),\\
\alpha_0 &\doteq 1 + \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2} + \|C_*\| \cdot \|V_*\|\right)}{\lambda_2} \cdot \|V_*\|,\\
\alpha_1 &\doteq \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2} + 3\|C_*\| \cdot \|V_*\|\right)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n\|C_*\|}{\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в этой теореме оставлен открытым вопрос о соотношении правых частей неравенств (13) и (14).

Докажем теоремы 1–3 и следствие 1.

Доказательство следствия 1. Неравенство (11) будет выполнено, если заменить нормы $\|C\|$, $\|V\|$ оценками сверху; как следствие, для выполнения условия теоремы 1 достаточно неравенства

$$\frac{2\varrho\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} < 1. \tag{15}$$

Левая часть (15) монотонно растет как функция переменной $t \doteq \sqrt{\lambda_1} \in \left[0, \sqrt{\lambda_2}\right)$. Обозначим $t_* \doteq \sqrt{\varrho^2+\lambda_2} - \varrho$ корень уравнения $\dfrac{2\varrho t_*}{\lambda_2 - t_*^2} = 1$. В интервале $t \in [0, t_*]$ выполнено неравенство

$$\frac{2\varrho t}{\lambda_2 - t^2} \leqslant \frac{t}{t_*} \leqslant 1;$$

следовательно, для выполнения (15) и (11) достаточно неравенства

$$\frac{t}{t_*} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda_2}-\varrho} < 1.$$

Следствие доказано.

3.1. **Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим итерацию (10) как отображение $\gamma_{[k]} \mapsto \gamma_{[k+1]}$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Введем бесконечно малое возмущение $\gamma_{[k]} + \mathrm{d}\gamma_{[k]}$. Оно приведет к изменению результата итерации $\gamma_{[k+1]} + \mathrm{d}\gamma_{[k+1]}$. Найдем условия, при которых одна итерация будет локально сжимающим отображением в смысле неравенства $\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\|/\|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\| < 1$ всюду в $\varGamma$.

Заметим, что локальное сжатие во всех точках области $\varGamma$ влечет нелокальное сжатие $\|\Delta\gamma_{[k+1]}\|/\|\Delta\gamma_{[k]}\| < 1$. Действительно, пусть $l_{[k+1]}$ — непрерывная кривая, определяемая как образ вектора $\Delta\gamma_{[k]}$ при итерации (10), и $\left|l_{[k+1]}\right|$ — ее длина; тогда при условии локального сжатия верно $\left|l_{[k+1]}\right| = \int_{l_{[k+1]}} \|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| <$

$\|\Delta\gamma_{[k]}\|$; отсюда учитывая неравенство $\|\Delta\gamma_{[k+1]}\| \leqslant \left|l_{[k+1]}\right|$ получаем сжатие $\|\Delta\gamma_{[k+1]}\| < \|\Delta\gamma_{[k]}\|$.

Применим теорему о возмущении некратного собственного вектора [18, с. 76] к матрице $Q \doteq Q_{[k]}$, $\|\mathrm{d}Q\| = O(\epsilon)$, $\epsilon \doteq \|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\|$ — малый параметр:

$$\mathrm{d}\gamma_{[k+1]} = \mathrm{d}p_1(Q_{[k]}) = \frac{p_2^{\mathrm{T}}\mathrm{d}Q\cdot p_1}{\lambda_2-\lambda_1}\,p_2 + \ldots + \frac{p_{n+1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}Q\cdot p_1}{\lambda_{n+1}-\lambda_1}\,p_{n+1} + O(\epsilon^2).$$

Последнее равенство записывается в виде

$$\mathrm{d}\gamma_{[k+1]} = \left[\frac{p_2p_2^{\mathrm{T}}}{\lambda_2-\lambda_1} + \ldots + \frac{p_{n+1}p_{n+1}^{\mathrm{T}}}{\lambda_{n+1}-\lambda_1}\right]\cdot \mathrm{d}Q\cdot p_1 + O(\epsilon^2).$$

Матрицы $p_ip_i^{\mathrm{T}}$ есть проекторы на взаимно ортогональные подпространства, поэтому

$$\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| \leqslant \frac{\|\mathrm{d}Q\cdot p_1\|}{\lambda_2-\lambda_1} + O(\epsilon^2). \tag{16}$$

Выразим норму $\|\mathrm{d}Q\cdot p_1\|$ через $\|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\|$. Верны соотношения

$$\mathrm{d}Q = V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}C\cdot V = -V^{\mathrm{T}}C\left(\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot G + G^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}G\right)CV, \tag{17}$$

$$p_i^{\mathrm{T}}Qp_i = \lambda_i, \quad p_i^{\mathrm{T}}Qp_i \doteq \pi^{\mathrm{T}}\pi = \|\pi\|^2, \quad \pi \doteq C^{1/2}Vp_i, \quad i \in \overline{1, n+1}.$$

Из последних равенств следует $\|C^{1/2}Vp_1\| = \sqrt{\lambda_1}$ и $\|C^{1/2}V\| = \sqrt{\lambda_{n+1}(Q)}$. Также учтем соотношения $\|C^{1/2}\| = \|C\|^{1/2}$ и

$$\|C^{1/2}G^{\mathrm{T}}\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|C^{1/2}G^{\mathrm{T}}x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{x^{\mathrm{T}}GCG^{\mathrm{T}}x}}{\|x\|} = 1. \tag{18}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{d}Q\cdot p_1\| &= \|V^{\mathrm{T}}C\left(\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot G + G^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}G\right)CVp_1\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|V^{\mathrm{T}}C^{1/2}\right\|\cdot\left\|C^{1/2}\left(\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot G + G^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}G\right)C^{1/2}\right\|\cdot\left\|C^{1/2}Vp_1\right\| \leqslant \\
&\leqslant 2\left\|V^{\mathrm{T}}C^{1/2}\right\|\cdot\left\|C^{1/2}\left(\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot G\right)C^{1/2}\right\|\cdot\sqrt{\lambda_1} \leqslant \\
&\leqslant 2\sqrt{\lambda_1}\,\|C^{1/2}V\|\cdot\|C^{1/2}\|\cdot\|GC^{1/2}\|\cdot\|\mathrm{d}G\| = \\
&= 2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_{n+1}}\cdot\|C^{1/2}\|\cdot\|\mathrm{d}G\| \leqslant \\
&\leqslant 2\sqrt{\lambda_1}\,\|C\|\cdot\|V\|\cdot\|\mathrm{d}G\|.
\end{aligned} \tag{19}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{d}G\| &= \sup_{\|x\|=1}\|\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot x\| = \sup_{\|x\|=1}\|V(x)\mathrm{d}\gamma\| \leqslant \sup_{\|x\|=1}\|V_{1\div n}(x)\|\cdot\|\mathrm{d}\gamma\| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|x\|=1}\|V_{1\div n}(x)\|_2\cdot\|\mathrm{d}\gamma\| \leqslant n\cdot\|\mathrm{d}\gamma\|.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\|\cdot\|_2$ — фробениусовская норма матрицы, $V_{1\div n}(x)$ — матрица из первых n столбцов матрицы $V(x)$, и учтено, что вектор $\mathrm{d}\gamma$ имеет только n первых ненулевых элементов, а на последнем месте ноль.

С учетом (17) и (20) имеем

$$O(\|\mathrm{d}Q\|^2) = O(\|\mathrm{d}G\|^2) = O(\|\mathrm{d}\gamma\|^2) = O(\epsilon^2).$$

В результате оценка (16) принимает вид

$$\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| \leqslant \frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} \|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\| + O(\|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\|^2).$$

Следовательно, итерация (10) будет сжимающим отображением в области Γ, если во всех точках Γ выполнено

$$\frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *Ввиду последнего неравенства в цепочке* (19) *теорему 1 можно усилить, используя более слабое условие сжатия*

$$\frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \sqrt{\lambda_{n+1}} \cdot \|C\|^{1/2}}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1.$$

3.2. **Доказательство теоремы 2.** Рассмотрим матрицы $Q_{[k]} = V^{\mathrm{T}} C_{[k]} V$ и $Q_* = V_*^{\mathrm{T}} C_{[k]} V_*$, $V_* \doteq V(z_*)$. Заметим, что $\lambda_1(Q_*) = 0$ и $p_1(Q_*) = \gamma_*$ независимо от $C_{[k]} > 0$. Это ключевой момент. При малости нормы разности $E \doteq V - V_*$ матрицу $Q_{[k]}$ можно рассматривать как возмущенную Q_*. В отличие от доказательства теоремы 1 возмущение матрицы $Q_{[k]}$ здесь вызвано не изменением $\mathrm{d}\gamma_{[k]}$, а отклонением наблюдений V от V_*, $\|V - V_*\| \doteq \varepsilon$. Обозначим

$$\begin{aligned} \delta Q \doteq Q_{[k]} - Q_* = (V_* + E)^{\mathrm{T}}\, C_{[k]}\, (V_* + E) - V_*^{\mathrm{T}} C_{[k]} V_* = \\ = E^{\mathrm{T}} C_{[k]} V_* + V_*^{\mathrm{T}} C_{[k]} E + O(\varepsilon^2), \quad k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Используем неравенство (16) с заменой $\mathrm{d}Q$ на δQ:

$$\begin{aligned} &\|p_1(Q_{[k]}) - p_1(Q_*)\| = \\ &= \|\gamma_{[k+1]} - \gamma_*\| \leqslant \frac{\|\delta Q \cdot \gamma_*\|}{\lambda_{2*} - \lambda_{1*}} + O(\varepsilon^2) = \\ &= \frac{1}{\lambda_{2*}} \cdot \|\delta Q \cdot \gamma_*\| + O(\varepsilon^2), \quad k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{22}$$

С учетом равенства $V_* \gamma_* = 0$ из (21) следует

$$\|\delta Q \cdot \gamma_*\| \leqslant \left\|V_*^{\mathrm{T}} C_{[k]} E \gamma_*\right\| + O(\varepsilon^2).$$

Последнее вместе с (22) означает

$$\|\gamma_{[k+1]} - \gamma_*\| \leqslant \frac{1}{\lambda_{2*}} \cdot \left\|V_*^{\mathrm{T}} C_{[k]} E \gamma_*\right\| + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда следует, что выбором достаточно малого по норме возмущения E всегда можно добиться приближения $\gamma_{[k+1]}$ к γ_* и выполнения соотношения

$$\|C_{[k]}\| \leqslant \alpha' \|C_*\| \tag{23}$$

для $\alpha' > 1$. Пусть для заданного α' условие (23) выполнено (α' можно взять большим). Тогда

$$\begin{aligned} \|\gamma_{[k+1]} - \gamma_*\| &\leqslant \frac{\alpha'}{\lambda_{2*}} \cdot \|V_*\| \cdot \|C_*\| \cdot \|E\| \cdot \|\gamma_*\| + O(\varepsilon^2) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\lambda_{2*}} \cdot \|V_*\| \cdot \|C_*\| \cdot \|E\| \cdot \|\gamma_*\|. \end{aligned}$$

Приняв во внимание равенство $\|E\| = \varepsilon$ и заменив нумерацию $k+1, k \geqslant 0$ на $k, k \geqslant 1$, получим утверждение теоремы.

Замечание 2. *Утверждение теоремы 2 можно усилить до неравенства*

$$\frac{\|\gamma_{[k]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} \leqslant \frac{\alpha \cdot \sqrt{\lambda_{n+1}(Q_*)} \cdot \|C_*\|^{1/2} \, \|V_*\|}{\lambda_{2*}} \, \varepsilon.$$

Доказывается как и в замечании 1, ссылкой на последнее неравенство в цепочке (19).

3.3. **Вспомогательные утверждения к доказательству теоремы 3.** Получим гарантированную оценку сверху на λ_1 в области (12) через $\|\Delta C\|$ и ε, используя теорему Гершгорина о локализации собственных значений [18, гл. 2, п. 15].

Лемма 1. *Пусть* $V = V_* + E$, $\varepsilon \doteq \|E\|$, *и в* (12) $\|C\| \leqslant \|C_*\| + \|\Delta C\|$. *Тогда в области* (12) *верна гарантированная оценка*

$$\lambda_1 \leqslant \left[1 + \frac{2n\left[\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V_*\| + (\|C_*\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon\right](\|V_*\| + \varepsilon)}{\lambda_2}\right] \times \\ \times (\|C_*\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon^2.$$

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай $\Delta C = 0$. Обозначим

$$\delta Q = (V+E)^{\mathrm{T}}\, C\,(V+E) - V^{\mathrm{T}} C V = E^{\mathrm{T}} C V + V^{\mathrm{T}} C E + E^{\mathrm{T}} C E.$$

Пусть $Q = P \mathit{\Lambda} P^{\mathrm{T}}$, матрица P ортогональная, $\mathit{\Lambda} \geqslant 0$ диагональная из собственных значений, пронумерованных по возрастанию, тогда

$$P^{\mathrm{T}}\,(Q + \delta Q)\,P = \mathit{\Lambda} + P^{\mathrm{T}} \delta Q \cdot P \doteq \mathit{\Lambda} + \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \doteq \|\beta_{ij}\|.$$

Из теоремы Гершгорина следует, что возмущенное значение первого собственного числа $\lambda_1 + \delta\lambda_1$ лежит в интервале

$$\left[(\lambda_1 + \beta_{11}) \pm \sum_{j=2}^{n+1} |\beta_{1j}|\right] \subseteq \left[\lambda_1 \pm \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_{1j}|\right]. \tag{24}$$

Далее рассуждаем согласно [18, гл. 2, п. 15]. Следующие две матрицы подобны и потому имеют одинаковые собственные числа:

$$\mathit{\Lambda} + \mathcal{B} \sim \mathit{\Lambda} + \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{k} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{B} \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{k} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}.$$

Тогда (24) принимает вид

$$\lambda_1 + \delta\lambda_1 \in \left[(\lambda_1 + \beta_{11}) \pm \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\varepsilon}{k} |\beta_{1j}|\right]. \tag{25}$$

При этом

$$\beta_{11} = p_1^{\mathrm{T}}\,(E^{\mathrm{T}} C V + V^{\mathrm{T}} C E + E^{\mathrm{T}} C E)\,p_1 = p_1^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} C E p_1,$$
$$\beta_{1j} = p_1^{\mathrm{T}}\,(E^{\mathrm{T}} C V + E^{\mathrm{T}} C E)\,p_j, \quad j \geqslant 2,$$

и верна оценка

$$|\beta_{1j}| \leqslant \sqrt{\lambda_j}\, \|C\|^{1/2}\varepsilon + \|C\|\varepsilon^2 \leqslant \|C\| \left(\|V\|\varepsilon + \varepsilon^2\right). \tag{26}$$

Выбор k в (25) ограничен необходимостью разделить круги Гершгорина при $\varepsilon \to 0$, что приводит к соотношению

$$\frac{k}{\varepsilon}|\beta_{i1}| = k|\overline{\beta}_{i1}| \leqslant \tfrac{1}{2}|\lambda_i - \lambda_1| = \tfrac{1}{2}\lambda_i,$$

где $\overline{\beta}_{i1} \doteq \beta_{i1}/\varepsilon$ не зависит от ε и сомножитель $\frac{1}{2}$ может быть заменен любым числом из интервала $(0,1)$. Отсюда с учетом оценки (26) для $\beta_{i1} = \beta_{1i}$ имеем

$$k = \min_{i \geqslant 2} \frac{\lambda_i \varepsilon}{2\left(\sqrt{\lambda_i}\, \|C\|^{1/2}\varepsilon + \|C\|\varepsilon^2\right)}$$

или

$$k^{-1} = \max_{i \geqslant 2} \frac{2\left(\sqrt{\lambda_i}\, \|C\|^{1/2} + \|C\|\varepsilon\right)}{\lambda_i}.$$

С учетом монотонного убывания правой части по λ

$$k^{-1} = \frac{2\left(\sqrt{\lambda_2}\, \|C\|^{1/2} + \|C\|\varepsilon\right)}{\lambda_2}. \tag{27}$$

Тогда из (25) и (26) следует

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 &\leqslant |\beta_{11}| + n|\beta_{1j}|k^{-1}\varepsilon \leqslant \\ &\leqslant \|C\|\varepsilon^2 + 2n\left(\sqrt{\lambda_{n+1}}\, \|C\|^{1/2}\varepsilon + \|C\|\varepsilon^2\right) \frac{\left(\sqrt{\lambda_2}\, \|C\|^{1/2} + \|C\|\varepsilon\right)}{\lambda_2}\varepsilon, \end{aligned} \tag{28}$$

или

$$\delta\lambda_1 \leqslant \left[1 + \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2} + \|C\|^{1/2}\varepsilon\right)\left(\sqrt{\lambda_{n+1}} + \|C\|^{1/2}\varepsilon\right)}{\lambda_2}\right] \|C\|\varepsilon^2.$$

2) Перейдем к случаю $\Delta C \neq 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta Q = E^{\mathrm{T}}CV + V^{\mathrm{T}}CE + V^{\mathrm{T}}\Delta C \cdot V +& \\ + E^{\mathrm{T}}CE + V^{\mathrm{T}}\Delta C \cdot E + E^{\mathrm{T}}\Delta C \cdot V + E^{\mathrm{T}}\Delta C \cdot E&. \end{aligned}$$

В оценке по теореме Гершгорина (25) изменяются значения

$$\beta_{11} = p_1^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} \left(C + \Delta C\right) E p_1,$$

$$\beta_{1j} = p_1^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} \left(C + \Delta C\right) \left(V + E\right) p_j, \quad j \geqslant 2,$$

и неравенства (26) принимают вид

$$\begin{aligned} |\beta_{11}| &\leqslant \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\varepsilon^2, \\ |\beta_{1j}| &\leqslant \left(\sqrt{\lambda_j}\, \|C\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V\|\right)\varepsilon + \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\varepsilon^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\left(\|V\|\varepsilon + \varepsilon^2\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Для k^{-1} вместо (27) имеем

$$k^{-1} = \frac{2\left[\left(\sqrt{\lambda_2}\, \|C\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V\|\right) + \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\varepsilon\right]}{\lambda_2}.$$

Оценка (28) при использовании (29) переходит в оценку

$$\Delta\lambda_1 \leqslant |\beta_{11}| + n|\beta_{1j}|k^{-1}\varepsilon \leqslant (\|C\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon^2 + 2n\,(\|C\| + \|\Delta C\|) \times$$
$$\times\,(\|V\| + \varepsilon)\,\frac{\left[\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V\| + (\|C\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon\right]}{\lambda_2}\varepsilon^2 =$$
$$= \left[1 + \frac{2n\left[\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V\| + (\|C\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon\right](\|V\| + \varepsilon)}{\lambda_2}\right] \times$$
$$\times\,(\|C\| + \|\Delta C\|)\,\varepsilon^2.$$

Ввиду $\lambda_1 = 0$ из последнего неравенства получаем гарантированную оценку сверху для возмущенного значения $\lambda_1 + \Delta\lambda$. Лемма доказана. □

Предложение 1. *Неравенство* $\|\Delta\gamma\| < \frac{(\sqrt{2}-1)}{n\|C_*\|^{1/2}}$ *влечет оценку*

$$\|C^{1/2}\,[G^{\mathrm{T}}\Delta G + \Delta G^{\mathrm{T}} \cdot G + \Delta G^{\mathrm{T}}\Delta G]\,C^{1/2}\| \doteq \|M\| < 1.$$

Доказательство. Ввиду (18) и (20) верна оценка

$$\|M\| \leqslant 2\|C^{1/2}\Delta G\| + \|C\| \cdot \|\Delta G\|^2 \leqslant 2e + e^2, \tag{30}$$
$$e \doteq n\|C\|^{1/2}\|\Delta\gamma\|. \tag{31}$$

Если $\|\Delta\gamma\| < \frac{(\sqrt{2}-1)}{n\|C_*\|^{1/2}}$, то $e < \sqrt{2} - 1$ и $\|M\| \leqslant 2e + e^2 < 1$. Предложение доказано. □

Лемма 2. *В области*

$$\|\Delta\gamma\| \leqslant \frac{1}{5n\|C_*\|^{1/2}} \tag{32}$$

верна оценка

$$\|\Delta C\| \leqslant 5n\|C_*\|^{3/2}\|\Delta\gamma\| \leqslant \|C_*\|. \tag{33}$$

Доказательство. Опустим метки $*$. Сначала докажем неравенство

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\|\frac{\mu}{1-\mu}, \quad \mu = 2e + e^2, \tag{34}$$

где e задано в (31). По определению

$$\Delta C = [G^{\mathrm{T}}\Delta G + \Delta G^{\mathrm{T}} \cdot G + \Delta G^{\mathrm{T}}\Delta G + G^{\mathrm{T}}G]^{-1} - C =$$
$$= C^{1/2}\Big[C^{1/2}\,(G^{\mathrm{T}}\Delta G)\,C^{1/2} + C^{1/2}\,(\Delta G^{\mathrm{T}} \cdot G)\,C^{1/2} +$$
$$+ C^{1/2}\,(\Delta G^{\mathrm{T}}\Delta G)\,C^{1/2} + I\Big]^{-1} C^{1/2} - C \doteq$$
$$\doteq C^{1/2}\,[I + M]^{-1}\,C^{1/2} - C = C^{1/2}\Big\{[I + M]^{-1} - I\Big\}\,C^{1/2}.$$

Отсюда следует

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\|\|\,[I + M]^{-1} - I\|.$$

Для (32) условие предложения 1 выполнено, поэтому $\|M\| < \|I\| = 1$. Тогда верно

$$\|\,[I + M]^{-1}\,\| \leqslant \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Матрица $I+M$ симметрична и строго положительно определена; матрица M симметрична, $\|M\| = \max_i |\lambda_i(M)|$. Тогда

$$\begin{aligned}\| [I+M]^{-1} - I\| = \max_i \left|\lambda_i\left([I+M]^{-1} - 1\right)\right| = \\ = \max_i \left|\lambda_i\left([I+M]^{-1}\right) - 1\right| = \max_i \left|\frac{1}{1+\lambda_i(M)} - 1\right| = \\ = \max_i \left|\frac{\lambda_i(M)}{1+\lambda_i(M)}\right| \leqslant \frac{\|M\|}{1-\|M\|}.\end{aligned}$$

Получили оценку

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\| \frac{\|M\|}{1-\|M\|} \leqslant \|C\| \frac{\mu}{1-\mu},$$

где μ есть верхняя оценка для $\|M\|$. Учитывая (30), (31) можем взять $\mu = 2e + e^2$. Неравенство (34) доказано.

Далее, при $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{2}$ верно $\frac{\mu}{1-\mu} \leqslant 2\mu$. Также при $0 \leqslant e \leqslant \frac{1}{5}$ верно $2e + e^2 \leqslant \frac{5}{2}e$, $\mu = 2e + e^2 < \frac{1}{2}$ и $\frac{\mu}{1-\mu} \leqslant 2\mu \leqslant 5e \leqslant 1$, то есть

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\| \frac{\mu}{1-\mu} \leqslant 5e\|C\| = 5n\|C\|^{3/2}\|\Delta\gamma\| \leqslant \|C\|.$$

Осталось заметить, что величина e (31) попадает в интервал $0 \leqslant e \leqslant \frac{1}{5}$, если $\|\Delta\gamma\| \leqslant \frac{1}{5n\|C\|^{1/2}}$. Лемма доказана. $\square$

3.4. **Доказательство теоремы 3.** По следствию 1 для сжатия в области (12) достаточно

$$\lambda_1 < \left(\sqrt{\varrho^2 + \lambda_2} - \varrho\right)^2, \quad \varrho \doteq n\left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\left(\|V\| + \varepsilon\right). \tag{35}$$

Правая часть неравенства монотонно убывает по ϱ, поэтому можно заменить ϱ оценкой сверху с использованием (33) и $\varepsilon \leqslant \|V\|$:

$$\varrho \leqslant \omega \doteq 4n\|C\| \cdot \|V\|.$$

Для выполнения условия сжатия ввиду леммы 1 достаточно неравенства

$$\begin{aligned}\left[1 + \frac{2n\left[\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V\| + \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\varepsilon\right]\left(\|V\| + \varepsilon\right)}{\lambda_2}\right] \times \\ \times \left(\|C\| + \|\Delta C\|\right)\varepsilon^2 < \left(\sqrt{\omega^2 + \lambda_2} - \omega\right)^2\end{aligned}$$

и тем более неравенства

$$\begin{aligned}2\left[1 + \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + \|C\| \cdot \|V\| + 2\|C\|\varepsilon\right)\left(\|V\| + \varepsilon\right)}{\lambda_2}\right]\|C\|\,\varepsilon^2 < \\ < \left(\sqrt{\omega^2 + \lambda_2} - \omega\right)^2.\end{aligned}$$

Запишем неравенство в виде

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2\right)\varepsilon^2 < \frac{\left(\sqrt{\omega^2 + \lambda_2} - \omega\right)^2}{2\|C\|} \doteq \varepsilon_*^2, \tag{36}$$

где

$$\alpha_0 \doteq 1 + \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + \|C\|\cdot\|V\|\right)\|V\|}{\lambda_2},$$
$$\alpha_1 \doteq \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C\|^{1/2} + 3\|C\|\cdot\|V\|\right)}{\lambda_2},$$
$$\alpha_2 \doteq \frac{4n\|C\|}{\lambda_2}.$$

Многочлен $f(\varepsilon)$ в левой части (36) имеет положительные коэффициенты, поэтому строго монотонно растет при $\varepsilon \geqslant 0$. То же верно для многочлена

(37) $$\tilde f(\tilde\varepsilon) \doteq \left(\tilde\alpha_0 + \tilde\alpha_1\tilde\varepsilon + \tilde\alpha_2\tilde\varepsilon^2\right)\tilde\varepsilon^2 \equiv f(\varepsilon), \quad \tilde\varepsilon = \varepsilon/\|V\| \in [0,1),$$
$$\tilde\alpha_0 \doteq \alpha_0\|V\|^2, \quad \tilde\alpha_1 \doteq \alpha_1\|V\|^3, \quad \tilde\alpha_2 \doteq \alpha_2\|V\|^4.$$

На интервале $\tilde\varepsilon \in [0,1]$ для (36) достаточно неравенства

(38) $$\left(\tilde\alpha_0 + \tilde\alpha_1 + \tilde\alpha_2\right)^{1/2}\tilde\varepsilon \doteq f_1^{1/2}\tilde\varepsilon < \varepsilon_*.$$

Если $f_1^{1/2} < \varepsilon_*$, то по условию решением является $\tilde\varepsilon < 1$. Более интересен случай $f_1^{1/2} \geqslant \varepsilon_*$, для которого получаем $\tilde\varepsilon < \varepsilon_*/f_1^{1/2}$ и

$$\frac{\varepsilon}{\|V\|} < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2}}.$$

Поскольку $f_1 = \|V\|^2\left(\alpha_0 + \alpha_1\|V\| + \alpha_2\|V\|^2\right)$, а неравенство (13) в условии теоремы с учетом (12) обеспечивает выполнение (32), то теорема доказана.

4. Расчеты

Установим, какие условия на возмущения $V - V_*$ накладывает теорема 3 для гарантированной сходимости алгоритма (10) из произвольного начального приближения (с оговоркой о неопределенности константы α в (12)). Далее для двух уравнений вида (3) проиллюстрируем идентификацию коэффициентов γ_i: а) в условиях теоремы 3 и б) при больших возмущениях.

Выберем уравнения (3) второго порядка $n = 2$: 1) с парой сопряженных корней $\zeta_1 = \overline{\zeta_2}$ и 2) парой вещественных корней $\zeta_{1,2}$ характеристического многочлена (2).

Уравнение 1: $\gamma_0 = 0{,}980, \gamma_1 = -1{,}883, \gamma_2 = 1$, $\zeta_{1,2} = 0{,}942 \pm 0{,}306\mathrm{i}$.

Уравнение 2: $\gamma_0 = 0{,}957, \gamma_1 = -1{,}956, \gamma_2 = 1$, $\zeta_1 = 0{,}989$, $\zeta_2 = 0{,}967$.

Длина отрезка наблюдения $N = 200$. Для начальных условий $z'[1] = z''[1] = 0$, $z'[2] = z''[2] = 1$ решения $z', z'' \in \mathbb{R}^{200}$ соответственно первого и второго уравнений показаны на рис. 1 и 2.

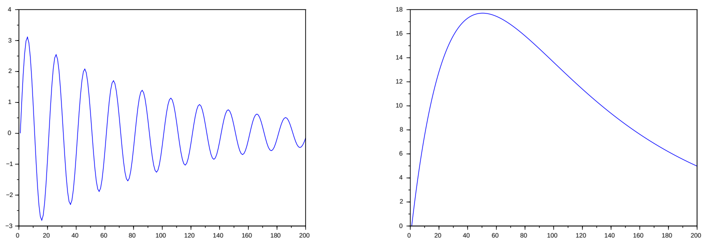

Рис. 1, 2. Решения z' (уравнение 1) и z'' (уравнение 2).

Для решения z' теорема 3 гарантирует сходимость идентифицирующего алгоритма (10) при $\varepsilon = \|V - V_*\| = \|V(x) - V(z')\| < 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ ($< 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ в неравенстве (13) и $< 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ в неравенстве (14)). Для решения z'' теорема 3 гарантирует сходимость алгоритма (10) при $\varepsilon < 3{,}7 \cdot 10^{-11}$ ($< 3{,}4 \cdot 10^{-8}$ в (13) и $< 3{,}7 \cdot 10^{-11}$ в (14)). Отметим, что условия сходимости алгоритма для уравнения 1 на несколько порядков лучше, чем для уравнения 2.

Для разрешаемых теоремой 3 норм возмущений $\varepsilon = \|V(\eta)\|$ теорема 2 при $\alpha = 2$ дает следующие относительные нормы отклонения точек идентифицирующего алгоритма от истинных значений γ_*: $\frac{\|\gamma_{[k \geqslant 1]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} < 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ (уравнение 1) и $\frac{\|\gamma_{[k \geqslant 1]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} < 4{,}0 \cdot 10^{-8}$ (уравнение 2). Для больших возмущений теорема 2 ($\alpha = 2$) дает значения $\frac{\|\gamma_{[k \geqslant 1]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} < 11{,}0$ (уравнение 1, $\sigma = 0{,}4$) и $\frac{\|\gamma_{[k \geqslant 1]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} < 16 \cdot 10^3$ (уравнение 2, $\sigma = 1{,}2$).

Проверим сходимость алгоритма (10) из разных октантов сферы в $\mathbb{R}^3$. Для этого, учитывая нечувствительность задачи к умножению $\gamma_{[0]}$ на число, будем выбирать начальное приближение $\gamma_{[0]} = \left[\gamma_{0[0]}; \gamma_{1[0]}; 1\right]$ со значениями пар элементов $\left[\gamma_{0[0]}; \gamma_{1[0]}\right]$ из множества столбцов матрицы

$$\left[1000K \quad 10K \quad K \quad 0{,}1K\right] \in \mathbb{R}^{2\times 16}, \qquad K \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого $\gamma_{[0]}$ проводилось $M = 100$ запусков алгоритма со случайными нормальными возмущениями η нулевого среднего и постоянного с. к. о. σ. Считается, что алгоритм сошелся к неподвижной точке, если для некоторого $k_f \leqslant 100$ $\|\gamma_{[k_f+1]} - \gamma_{[k_f]}\| < 10^{-11}$; решение $z_* \in \{z', z''\}$ успешно восстановлено, если $\|\hat{z} - z_*\| < \sigma\sqrt{N}/2$, где $\hat{z} \doteq [I - GCG^{\mathrm{T}}]\,x$ — оценка решения z_* по наблюдению x с матрицей $G = G(\gamma_{[k_f]})$ (второй шаг метода Прони).

В таблицах 1–4 для 16 начальных приближений $\left[\gamma_{0[0]}; \gamma_{1[0]}\right]$ и различных значений σ указаны:

- частота m_1/M сходимости к неподвижной точке;
- частота m_2/M попадания в окрестность из теоремы 2 ($\alpha = 2$);
- среднее по M число итераций m_3;
- частота m_4/M успешных восстановлений решения;
- среднее по M с. к. о. ошибки восстановления $\hat{\sigma} \doteq \|x - \hat{z}\|/\sqrt{N}$ (оценка σ).

Таблица 1: Идентификация уравнения 1 в условиях теоремы 3
$\sigma = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ ($\varepsilon = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$)

$\gamma_{0[0]}, \gamma_{1[0]}$	m_1/M	m_2/M	m_3	m_4/M	$\hat{\sigma}$
$1000, 1000$	100%	100%	3	100%	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$
$1000, -1000$					
$-1000, 1000$					
$-1000, -1000$					
$10, 10$					
$10, -10$					
$-10, 10$					
$-10, -10$					
$1, 1$					
$1, -1$					
$-1, 1$					
$-1, -1$					
$0{,}1, 0{,}1$					
$0{,}1, -0{,}1$					
$-0{,}1, 0{,}1$					
$-0{,}1, -0{,}1$					

Таблица 2: Идентификация уравнения 2 при малых возмущениях
$\sigma = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ ($\varepsilon = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$)

$\gamma_{0[0]}, \gamma_{1[0]}$	m_1/M	m_2/M	m_3	m_4/M	$\hat{\sigma}$
$1000, 1000$	100%	100%	14–18	100%	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$
$1000, -1000$	99%				
$-1000, 1000$	100%				
$-1000, -1000$					
$10, 10$					
$10, -10$					
$-10, 10$	99%				
$-10, -10$	100%				
$1, 1$					
$1, -1$					
$-1, 1$					
$-1, -1$					
$0{,}1, 0{,}1$					
$0{,}1, -0{,}1$					
$-0{,}1, 0{,}1$					
$-0{,}1, -0{,}1$					

Таблица 3: Идентификация уравнения 1 при больших возмущениях $\sigma = 0{,}40$ ($\varepsilon = 6{,}0$)

<table>
<tr><th>$\gamma_{0[0]}, \gamma_{1[0]}$</th><th>$m_1/M$</th><th>$m_2/M$</th><th>$m_3$</th><th>$m_4/M$</th><th>$\hat{\sigma}$</th></tr>
<tr><td>$1000, 1000$</td><td>99%</td><td rowspan="16">100%</td><td>16</td><td>18%</td><td>1,06</td></tr>
<tr><td>$1000, -1000$</td><td rowspan="6">100%</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">100%</td><td rowspan="2">0,39</td></tr>
<tr><td>$-1000, 1000$</td></tr>
<tr><td>$-1000, -1000$</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="2">16%</td><td rowspan="2">1,07</td></tr>
<tr><td>$10, 10$</td></tr>
<tr><td>$10, -10$</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">100%</td><td rowspan="2">0,40</td></tr>
<tr><td>$-10, 10$</td></tr>
<tr><td>$-10, -10$</td><td>99%</td><td>16</td><td>18%</td><td>1,06</td></tr>
<tr><td>$1, 1$</td><td>89%</td><td>47</td><td>2%</td><td>1,19</td></tr>
<tr><td>$1, -1$</td><td rowspan="7">100%</td><td>10</td><td rowspan="7">100%</td><td rowspan="2">0,39</td></tr>
<tr><td>$-1, 1$</td><td rowspan="6">8</td></tr>
<tr><td>$-1, -1$</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>$0{,}1, 0{,}1$</td><td rowspan="2">0,39</td></tr>
<tr><td>$0{,}1, -0{,}1$</td></tr>
<tr><td>$-0{,}1, 0{,}1$</td><td rowspan="2">0,40</td></tr>
<tr><td>$-0{,}1, -0{,}1$</td></tr>
</table>

Таблица 4: Идентификация уравнения 2 при больших возмущениях $\sigma = 1{,}2$ ($\varepsilon = 15{,}7$)

<table>
<tr><th>$\gamma_{0[0]}, \gamma_{1[0]}$</th><th>$m_1/M$</th><th>$m_2/M$</th><th>$m_3$</th><th>$m_4/M$</th><th>$\hat{\sigma}$</th></tr>
<tr><td>$1000, 1000$</td><td rowspan="3">100%</td><td rowspan="16">100%</td><td rowspan="16">17–25</td><td>39%</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td>$1000, -1000$</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-1000, 1000$</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-1000, -1000$</td><td rowspan="2">97%</td><td>40%</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td>$10, 10$</td><td>38%</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td>$10, -10$</td><td rowspan="2">100%</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-10, 10$</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-10, -10$</td><td>93%</td><td>39%</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td>$1, 1$</td><td>99%</td><td>84%</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>$1, -1$</td><td>100%</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-1, 1$</td><td>99%</td><td>47%</td><td>2,7</td></tr>
<tr><td>$-1, -1$</td><td rowspan="3">100%</td><td>42%</td><td>2,8</td></tr>
<tr><td>$0{,}1, 0{,}1$</td><td>86%</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>$0{,}1, -0{,}1$</td><td>100%</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>$-0{,}1, 0{,}1$</td><td>99%</td><td>49%</td><td>2,6</td></tr>
<tr><td>$-0{,}1, -0{,}1$</td><td>100%‘</td><td>94%</td><td>1,4</td></tr>
</table>

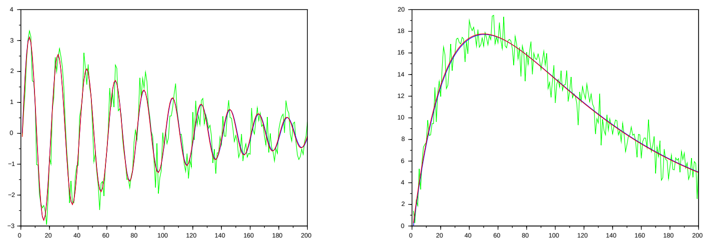

Рис. 3, 4. Наблюдения $z' + \eta'$, $\sigma = 0{,}4$ (уравнение 1) и $z'' + \eta''$, $\sigma = 1{,}2$ (уравнение 2).

Таблица 1 показывает, что в условиях теоремы 3 идентификация коэффициентов и решений уравнения 1 успешно осуществляется на всем множестве начальных приближений. Условия на малость возмущений при этом весьма жесткие.

Для уравнения 2 теорема 3 указывает допустимый уровень возмущений, сравнимый с машинным нулем. Уровень возмущений из таблицы 1 для уравнения 2 выходит за границы неравенств теоремы 3, тем не менее, идентификация осуществляется почти успешно с увеличенным средним числом итераций; при этом в отдельных экспериментах число итераций превосходит 100 (таблица 2, строки 2 и 7).

Случай «больших» возмущений, интересный для приложений, отражен в таблицах 3, 4. Все рассмотренные начальные приближения для идентификационного алгоритма в среднем выглядят равноправно, за одним неожиданным исключением в 9-й строке таблицы 3. В тех случаях, когда оценка $\hat{\sigma}$ (последний столбец таблиц) близка к истинному значению σ, оценка решения $\hat{z}$ близка к точному решению $z_* \in \{z', z''\}$.

Столбец m_2/M в таблицах показывает, что теорема 2 формально работает во всех случаях, хотя и чрезвычайно грубо для «больших» возмущений.

Заключение

Благодарю рецензента за полезные замечания и поправку, позволившую усилить утверждения теорем 1–3.

References

[1] de Prony, Baron Gaspard Riche, *Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures*, Journal de l'École Polytechnique, **1** (1795), Cahier 22, 24–76.

[2] Pereyra V., Scherer G., *Exponential data fitting*, in: Exponential Data Fitting and Its Applications, Bentham Science Publishers, (2010), 1–26.

[3] Householder A. S., *On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival cerves*, Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455, Oak Ridge, Tennessee, 1950.

[4] Marple S. L., *Digital spectral analysis with applications*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.

[5] Peter T., *Generalized Prony Method*, Dissertation zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades, Göttingen, 2013.

[6] Roy R., Kailath T., *ESPRIT — Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*, IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, **37**:7 (1989), 984–995.

[7] Potts D., Tasche M., *Parameter estimation for nonincreasing exponential sums by Prony-like methods*, Linear Algebra and its Applications, **439**:4 (2013), 1024–1039. MR3061753

[8] Kostin V. I., *On extremum points of some function* [in Russian], Upravlyaemye sistemy, Novosibirsk: Institute of Mathematics of SB AS USSR, **24** (1984), 35–42. MR0809564

[9] Petersson J., Holmström K., *A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data*, Applied Mathematics and Computation, **126**:1 (2002), 31–61. MR1868146

[10] Osborne M. R., *A class of nonlinear regression problems*, Data Representation, St. Lucia: University of Queensland Press (1970), 94–101. Zbl 0341.62058

[11] Osborne M. R., *Some special nonlinear least squares problems*, SIAM J. Numer. Anal., **12**:4 (1975), 571–592. MR0386222

[12] Egorshin A. O., Budyanov V. P., *Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer* [in Russian], Avtometriya, **1** (1973), 78–82.

[13] Egorshin A. O., *Least squares method and the fast algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method)* [in Russian], Avtometriya, **1** (1988), 30–42.

[14] Osborne M. R., Smyth G. K., *A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **12**:2 (1991), 362–382. MR1087765

[15] Lomov A. A., *On asymptotic optimality of the orthoregressional estimators*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:4 (2016), 511–519.

[16] Moor De B., *Structured total least squares and L_2 approximation problems*, Linear Algebra Appl., **188**,**189** (1993), 163–207. Zbl 0781.65028

[17] Osborne M. R., Smyth G. K., *A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting*, SIAM Journal of Scientific Computing, **16**:1 (1995), 119–138. MR1311681

[18] Wilkinson J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford: Clarendon Press, 1965. MR0184422

Andrei Aleksandrovich Lomov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lomov@math.nsc.ru