S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1553–1555 (2018) УДК 517.982

DOI 10.33048/semi.2018.15.128 MSC 46A03, 52A07

ТОНКИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

К.В. СТОРОЖУК

Abstract. We show that the countably-dimensional vector space C_{00} of all sequences with finite support contains a convex cone K that does not include straight lines and is closed Archiemedean but not closed in the Mackey topology τ corresponding to the duality $\langle C_{00}|F\rangle$, where F is a hyperplane in the algebraic dual space $C_{00}^{\#}$.

Keywords: cone, duality of topology vector spaces.

Архимедова замкнутость (далее просто архимедовость) подмножества K локально выпуклого векторного пространства W означает замкнутость пересечений K с конечномерными подпространствами.

Всякое разделяющее элементы W подпространство F в алгебраически сопряженном пространстве $W^{\#}$ линейных функционалов на W определяет топологию Макки τ_F — максимальную локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью $\langle W \mid F\rangle$.

Если $F \neq W^{\#}$, то в τ_F имеются незамкнутые архимедовы множества. В частности, каждый разрывный функционал $h \in W^{\#}\backslash F$ определяет незамкнутую гиперплоскость $\ker h$. В работе [1] установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых.

Там же установлено, что если пространство W счетномерно, то максимальная топология двойственности $\langle W \mid W^{\#}\rangle$ не допускает таких конусов. Следуя терминологии статьи [1], подпространство функционалов $F \subset W^{\#}$ назовем тонким в $W^{\#}$ подпространством, если упомянутые конусы имеются.

В этой заметке мы показываем, что в счетномерном пространстве существует тонкая гиперплоскость. В качестве счетномерного пространства мы используем пространство C_{00} всех финитных числовых последовательностей (в работе

Storozhuk, K.V., Subtle hyperplanes.

Поступила 20 сентября 2018 г., опубликована 4 декабря 2018 г.

[1] используется обозначение $\mathbb{S}_{fin}$). Сопряженное пространство $C_{00}^{\#}$ состоит из всех числовых последовательностей $f = (a_1, a_2, \ldots)$, двойственность $\langle C_{00} \mid C_{00}^{\#} \rangle$ определяется соотношением $\langle (x_n), (a_n) \rangle = \sum a_i x_i$.

Во втором сопряженном пространстве $C_{00}^{\#\#}$ имеется такой элемент L, что если числовая последовательность a_n сходится и $f = (a_n)$, то $L(f) = \lim a_n$. Для получения такого функционала достаточно продлить как-нибудь функционал $L = \lim$ с подпространства $c \subset C_{00}^{\#}$ сходящихся последовательностей на пространство $C_{00}^{\#}$ всех последовательностей.

В $C_{00}^{\#}$ определим гиперплоскость функционалов $F = \ker L$.

Все, что нам потребуется знать о элементах F, содержится в следующем условии (*): если $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in F$, то последовательность a_n либо сходится к нулю, либо не имеет конечного предела.

Теорема 1. *Гиперплоскость $F = \ker L \subset C_{00}^{\#}$ является тонкой*

Доказательство. Сначала покажем, что выпуклое архимедово замкнутое и не содержащее лучей множество

$$C = \left\{ x \in C_{00} \mid \sum_{n \geq 1} x_n = 1,\ \sup_{n \geq 1} \frac{|x_n|}{n} \leq 1 \right\}$$

не замкнуто, ибо 0 не отделяется от C никаким функционалом $f \in F$.

Пусть $f \in F$ задается последовательностью a_n. Если какая-то координата a_n равна нулю, то ясно, что элемент $z \in C_{00}$, у которого на n-й позиции единица, а на остальных местах нули, принадлежит множеству C, но не отделяется от точки 0 функционалом f. Осталось разобрать случай, когда никакие a_n не равны нулю.

Согласно условиям (*), последовательность a_n либо стремится к нулю, либо не имеет конечного предела. Легко проверить, что в обоих случаях существует такое $\delta > 0$ и последовательность пар номеров $m_k < n_k$, стремящихся к бесконечности, для которых выполнено $|a_{n_k} - a_{m_k}| \geq \delta \cdot |a_{n_k}| > 0$.

Для каждого k рассмотрим такой элемент $z^k \in C_{00}$: на всех позициях, кроме n_k и m_k координаты нулевые, на позиции с номерами m_k и n_k стоит величина $\frac{a_{n_k}}{a_{n_k} - a_{m_k}}$ (соответственно, $\frac{-a_{m_k}}{a_{n_k} - a_{m_k}}$). Элементарные оценки показывают, что обе этих величины ограничены по модулю числом $1 + \frac{1}{\delta}$. Поэтому при больших k $z^k \in C$. Итак, начало координат неотделимо от C никаким непрерывным функционалом. Теорема о строгой отделимости позволяет заключить теперь, что множество C не замкнуто в топологии C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00} \mid F \rangle$.

Пусть $p = (\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots) \in C_{00}$. Рассмотрим множество $C - p$ (сдвиг множества C на вектор $-p$), это множество лежит в гиперплоскости Π, задаваемой уравнением $\sum x_i = \frac{1}{2}$. Ясно, что $-p$ является точкой прикосновения множества $C - p$. Рассмотрим конус $K = \operatorname{cone}(C - p) \subset C_{00}$, базой этого конуса является множество $(C - p)$. (Напомним, что последнее предложение означает, что множество K является объединением всех лучей с вершиной в точке 0, проходящих через всевозможные точки множества $(C - p)$). Этот конус содержится в полупространстве, задаваемом неравенством $\sum x_i \geq 0$ и, в частности, не содержит точку $-p$. В то же время замыкание конуса эту точку содержит. Таким образом, K не замкнут в пространстве $\langle C_{00} \mid F \rangle$.

В то же время из теоремы 3.4 работы [1] следует, что конус K архимедово замкнут и не содержит прямых. Это легко проверить и непосредственно.

Итак, $F \subset C_{00}^{\#}$ — тонкая гиперплоскость. Теорема доказана. $\square$

Для нас остается открытым вопрос: всякая ли гиперплоскость в пространстве $C_{00}^{\#}$, разделяющая элементы C_{00}, является тонкой?

Автор благодарит рецензента за полезные указания.

References

[1] Gutman, A. E.; Emel'yanov, E. Yu.; Matyukhin, A. V, *Nonclosed Archimedean cones in locally convex spaces (Russian)*, Vladikavkaz. Mat. Zh. 17 (2015), no. 3, 36–43. MR3563866.

Konstantin Valer'evich Storozhuk
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: stork@math.nsc.ru