S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1556–1565 (2018) УДК 519.175.4
DOI 10.33048/semi.2018.15.129 MSC 05C80

ОБ АСИМПТОТИКЕ КРАТЧАЙШЕГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ КРАЙНИМИ ВЕРШИНАМИ В ОБОБЩЕННОМ ГРАФЕ БАРАКА — ЭРДЕША

П.И. ТЕСЕМНИКОВ

Abstract. We consider a generalization of the Barak — Erdös random graph, which is a graph with an ordered set of vertices $\{0, 1, \ldots n\}$ and with directed edges from i to j for $i < j$ only, where each edge is present with a given probability $p \in (0, 1)$. In our setting, probabilities $p = p_{i,j}$ depend on distances $j - i$ and may tend to 0 as $j - i \to \infty$. We study the asymptotics for the distribution of the minimal path length between 0 and n, when n becomes large.

Keywords: random graph, Barak — Erdös directed graph, minimal distance, boundary points, graph connectivity, first-passage percolation.

1. Введение

Теория случайных графов — одна из важнейших областей современной математики. Её результаты находят своё применение во множестве практических и теоретических задач, таких как, например, задачи математической биологии (см. [3]) или теории параллельного программирования (см. [8]).

Одной из первых и, пожалуй, самой известной моделью случайных графов является модель Эрдёша — Реньи (см., например, [5]). Это модель неориентированного графа с фиксированным набором вершин и случайным множеством ребер: каждое ребро появляется независимо от других с вероятностью p. Занумеровав вершины графа Эрдёша — Реньи и направив все ребра из меньших

Tesemnikov, P.I., On the asymptotics for the minimal distance between extreme vertices in a generalised Barak — Erdös graph.

Работа подготовлена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант 17-11- 01173.

Поступила 31 октября 2018 г., опубликована 4 декабря 2018 г.

вершин в большие, мы получим ориентированный случайный граф Барака — Эрдёша(см. [2]).

Графам Барака — Эрдёша (а также их различным обобщениям) посвящено немало работ. Фосс и Константопулос в [6] исследовали свойства длины максимального пути L_n, заключенного между вершинами 0 и n, в частности, они доказали для него усиленный закон больших чисел и центральную предельную теорему.

В этой же работе авторы ввели новый математический объект — бесконечную у́рновую модель. В этой модели есть бесконечное число урн, занумерованных целыми числами от минус до плюс бесконечности. Эволюция системы начинается с одного шара, помещенного в урну под номером 0, а каждый следующий шар помещается в урну справа от шара, выбранного из имеющихся шаров случайным образом. Наибольшая длина пути в случайном графе соответствует номеру самой правой непустой корзины.

Используя это естественное соответствие между моделью Барака — Эрдёша и бесконечной урновой моделью, Рамассами и Маллейн в [9] исследовали скорость роста длины максимального пути и получили для нее аналитическое выражение.

Существует несколько вариантов обобщения модели Барака — Эрдёша. Например, Фосс, Мартин и Шмидт в [7] рассматривали графы, в которых каждому ребру e поставлена в соответствие случайная величина v_e — вес ребра e. Авторов интересовало асимптотическое поведение максимального веса путей из вершины 0 в вершину n. Отметим, что в такой постановке задача представляет собой задачу "last-passage percolation" (задача последнего просачивания).

Мы же будем работать с несколько иным обобщением модели Барака — Эрдёша, предполагая, что ребро, соединяющее две произвольные вершины i и j, появляется с вероятностью p_{j-i}, зависящей от разности $j-i$. Подобная модель была рассмотрена в работе [4]. В этой статье авторы исследовали свойства длины *максимального* пути, заключенного между двумя вершинами, расстояние между которыми неограниченно возрастает.

Для обоих вариантов обобщения авторами были получены результаты, аналогичные результатам для классической модели Барака — Эрдёша.

Нашей целью будет изучение асимптотического распределения длины *минимального* пути между двумя вершинами (0 и n) при стремлении их разности к бесконечности ($n \to \infty$), в зависимости от вида последовательности p_k. Заметим, что рассматриваемая задача тесно связана с задачей "first-passage percolation" (задача быстрейшего просачивания), рассмотренной, например, в [1].

2. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим направленный случайный граф $\mathfrak{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ с вершинами, занумерованными целыми числами ($\mathcal{V} = \mathbb{Z}$) и случайными ребрами из меньших вершин в бо́льшие. Будем считать, что ребра в графе появляются независимо друг от друга, причем при $i < j$ ребро $i \to j$ существует (происходит событие $E_{i,j}$) с вероятностью $p_{i,j}$. Также предположим, что $p_{i,j} = p_{j-i}$, то есть эти вероятности зависят только от разностей $(j - i)$. Если ребро существует, то его длину считаем равной единице.

Через $\mathfrak{G}_n$ обозначим подграф графа $\mathfrak{G}$ с множеством вершин $\{0, 1, \dots, n\}$ и теми ребрами из $\mathcal{E}$, которые связывают вершины из этого множества.

Мы будем предполагать, что имеет место сходимость $p_n \to p \in [0, 1]$.

Определение 1. *Путем $\pi = \pi_{ij}$ из вершины i в вершину j будем называть упорядоченный набор рёбер $(i_0 \to i_1, i_1 \to i_2, \dots, i_{k-1} \to i_k)$, где $i_0 = i,\ i_k = j$. Путь π существует, если существуют все составляющие его ребра, то есть если происходит событие $\bigcap\limits_{j=0}^{k-1} E_{i_j, i_{j+1}}$. Длиной $|\pi|$ пути π назовем число k, то есть сумму длин составляющих его рёбер.*

Через $\Pi_{i,j}$ обозначим множество всевозможных путей из вершины i в вершину j.

Определение 2. *Введем случайную величину $m_{ij} = \min\limits_{\pi \in \Pi_{i,j}} |\pi|$, являющуюся длиной минимального пути из вершины i в вершину j. Если $\Pi_{i,j} = \varnothing$, то положим $m_{ij} = \infty$.*

Мы будем изучать асимптотическое распределение последовательности случайных величин $\{m_{0n}\}$ при $n \to \infty$. В зависимости от вида последовательности $\{p_n\}$ можно выделить три характерных случая.

1. $m_{0n} \Rightarrow \xi$, где ξ — собственная случайная величина (здесь "$\Rightarrow$" означает сходимость по распределению).
2. $m_{0n} \xrightarrow{p} \infty$, при этом $\mathbb{P}(m_{0n} = \infty) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае с высокой вероятностью найдется путь из 0 в n, но длина любого такого пути неограниченно растет с ростом n.
3. $\mathbb{P}(m_{0n} = \infty) \to 1$ при $n \to \infty$. В этом случае с высокой вероятностью вершины 0 и n не связаны путем.

Мы найдем условия на последовательность $\{p_n\}$, при которых имеет место каждый из описанных вариантов.

Замечание 1. *Как мы упоминали ранее, предложенная нами модель допускает различные естественные обобщения. К примеру, можно рассматривать многомерный случай, когда множество вершин $\mathcal{V}$ является подмножеством $\mathbb{Z}^d$ для некоторого $d \geq 2$ с определенным на нём частичным порядком.*

Либо можно считать, что или длины ребер являются случайными, или вероятности $p_{i,j}$ зависят не только от разностей $(j - i)$, но и от самих значений i и j.

3. Основные результаты

В этом разделе мы приведем три основные теоремы и ряд связанных с ними утверждений.

Теорема 1. *Пусть $p_n \to p$ при $n \to \infty$.*

(i) *Если $p > 0$, то $m_{0n} \Rightarrow \xi$, где $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 2) = p$;*

(ii) *Если $p = 0$ и $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(p_n)$, то $m_{0n} \xrightarrow{p} 2$;*

(iii) *Если $p = 0$ и $\limsup\limits_{n \to \infty} n^\alpha p_n < \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, то*

$$\mathbb{P}\left(m_{0n} < \frac{1}{1 - \alpha}\right) \to 0.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln p_n}{\ln n} \leq -1$.
Тогда $m_{0n} \xrightarrow{p} \infty$.

Следствие 1, в частности, говорит о том, что $m_{0n} \xrightarrow{p} \infty$ при $p_n = n^{-\alpha}$ для всех $\alpha \geq 1$. Заметим, что, наложив чуть более сильные условия на последовательность p_n, можно усилить результат следствия 1.

Предложение 1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится.*
Тогда $m_{0n} \to \infty$ *с вероятностью единица.*

Далее, мы изучим вопрос связности вершин 0 и n в графе $\mathfrak{G}$ при $n \to \infty$. Справедлива

Теорема 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} np_n < \infty$;

(2) $p_n \neq 1$ *для всех натуральных* n.

Тогда $\mathbb{P}\,(m_{0n} = \infty) \to 1$ *при* $n \to \infty$*, то есть с высокой вероятностью в графе* $\mathfrak{G}_n$ *не существует пути из* 0 *в* n.

Приведем теперь достаточные условия связности вершин 0 и n в графе $\mathfrak{G}$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Предположим, что* $p_1 > 0$*. Пусть выполнено хотя бы одно из двух условий:*

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} np_n > 1$;

(2) *Найдется такой номер* k*, что* $p_k = 1$.

Тогда $\mathbb{P}\,(m_{0n} = \infty) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

4. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Введем $q_n(k) = \mathbb{P}\,(m_{0n} = k)$, тогда $q_n(1) = p_n$. Так как события E_{ij} независимы при различных парах (i, j), то $q_n(2)$ может быть вычислена явно:

$$q_n(2) = \mathbb{P}(\bar{E}_{0n}; \bigcup_{i=1}^{n-1} E_{0i}E_{in}) = (1 - p_n)\left(1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{E}_{0i} \cup \bar{E}_{in})\right)$$
$$= (1 - p_n)\left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\bar{E}_{0i} \cup \bar{E}_{in})\right) = (1 - p_n)\left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p_i p_{n-i})\right).$$

Введем множество $A = \{k : p_k = 0\}$. В случаях (i) и (ii) это множество конечно, т.е. $m := |A| < \infty$, так как иначе нарушаются условия на последовательность $\{p_n\}$.

Докажем первый пункт теоремы.

По условию: $p_n \to p > 0$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\,(\xi = 1) = \lim_{n\to\infty} q_n(1) = \lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, p)$ и $N_\varepsilon > m$ таково, что $p_n > p - \varepsilon$ при всех $n > N_\varepsilon$.

Пусть $r_\varepsilon = \min\{p_k : \ k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\} \backslash A\}$. Ясно, что $r_\varepsilon > 0$. Положим $c = \min\{p - \varepsilon, r_\varepsilon\} > 0$. Тогда:

$$\liminf_{n\to\infty} q_n(2) \geq \liminf_{n\to\infty} (1 - p_n)(1 - (1 - c^2)^{n-m-1}) = 1 - p.$$

Таким образом, пункт (i) доказан.

Перейдем к доказательству второго пункта теоремы.

Положим $\widetilde{p}_n = \min\{p_k : \ k \in \{1, \dots, n\} \backslash A\}$ и $c_n = \min\{m : \ p_m = \widetilde{p}_n\}$. Ясно, что $\widetilde{p}_n = p_{c_n}$, $c_n \leq n$ и, так как $p_n \to 0$, то $c_n \nearrow \infty$.

Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \widetilde{p}_n = \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} p_{c_n} \geq \liminf_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{2}} p_{c_n} = \infty$$

Так как, $p_i \geq \widetilde{p}_n$ для всех $i \in \{1, \dots, n-1\} \backslash A$, то:

$$q_n(2) \geq (1 - p_n) \left(1 - \left(1 - \widetilde{p}_n^2\right)^{n-m-1}\right).$$

Рассмотрим последовательность $(1 - \widetilde{p}_n^2)^{n-m-1}$. По формуле Тейлора

$$\ln \left(1 - \widetilde{p}_n^2\right)^{n-m-1} = (n - m - 1) \ln(1 - \widetilde{p}_n^2) = -(1 + o(1)) n \widetilde{p}_n^2 \to -\infty$$

Поэтому,

$$\liminf_{n\to\infty} q_n(2) \geq \liminf_{n\to\infty} (1 - p_n) \left(1 - \left(1 - \widetilde{p}_n^2\right)^{n-m-1}\right) = 1.$$

Пункт (ii) доказан.

Докажем теперь третий пункт теоремы. Для этого воспользуемся вспомогательной леммой, доказательство которой представлено в приложении.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1, \ k \geq 2, \ l \geq 0, \ n \geq k + l$. *Положим:*

$$S_n^{k,l} = \sum_{i_1=1}^{n-k-l+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-k-l+2} \dots \sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+1}^{n-l-1} \left(i_1 \dots (i_{k-1} - i_{k-2}) (n - i_{k-1} - l)\right)^{-\alpha}.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$S_n^{k,l} \leq c_\alpha n^{1-\alpha} S_n^{k-1,l+1},$$

где c_α *— константа, зависящая только от* α.

Положим $J_k = \{i = (i_1, \dots, i_{k-1}) : 0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < n\}$. Ясно, что $p_n \leq M n^{-\alpha}$ для некоторой константы M. Следовательно:

$$\begin{gathered} q_n(k) = \mathbb{P}\left(m_{0n} = k\right) \leq \mathbb{P}\left(\exists \pi_{0n} : |\pi_{0n}| = k\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in J_k} E_{0,i_1} E_{i_1,i_2} \dots E_{i_{k-1},n}\right) \leq \sum_{i \in J_k} p_{i_1} p_{i_2 - i_1} \dots p_{n - i_{k-1}} \leq \\ \leq M^k \sum_{i \in J_k} \left(i_1 (i_2 - i_1) \dots (n - i_{k-1})\right)^{-\alpha} = M^k S_n^{k,0}. \end{gathered}$$

Пользуясь прямыми комбинаторными выкладками, получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} q_n(k) \leq M^k \limsup_{n\to\infty} S_n^{k,0} \leq c_\alpha^{k-1} M^k \limsup_{n\to\infty} \frac{n^{(1-\alpha)(k-1)}}{(n - k + 1)^\alpha}.$$

Правая часть этого неравенства равна нулю при $(1 - \alpha)(k - 1) < \alpha$, что равносильно условиям $\alpha > \dfrac{k-1}{k}$ или $k < \dfrac{1}{1 - \alpha}$.

Таким образом, пункт (iii), а вместе с ним и теорема 1 доказаны. $\square$

Доказательство следствия 1. Согласно условию, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln p_n}{\ln n} \le -1$. Следовательно, найдется функция $h(n) \to 0$ такая, что $p_n \le n^{-1+h(n)}$ при всех n.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha_k \in \left(\dfrac{k-1}{k}, 1\right)$. Ясно, что $n^{\alpha_k} p_n \le n^{-1+\alpha_k+h(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что $\limsup\limits_{n\to\infty} n^{\alpha_k} p_n < \infty$. Следствие 1 доказано. □

Доказательство предложения 1. Введем событие A, которое происходит, если в графе $\mathfrak{G}$ из любой вершины выходит конечное число ребер.

Согласно нашему предположению,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(E_{k,k+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Применяя лемму Бореля-Кантелли, получаем, что $\mathbb{P}(A) = 1$.

Положим

$$S_0 = \{0\}; \quad S_{k+1} = \{j \in \mathbb{N} : \exists i \in S_k : \mathbb{I}\left(E_{i,j}\right) = 1\}, \ k \ge 0.$$

Иными словами, множество S_k представляет собой множество вершин, связанных с нулем путем длины k. Ясно, что S_k конечно при всех k.

Пусть $\omega \in A$ и $N \in \mathbb{N}$. Введем $M_N(\omega) = \max\{j : j \in S_N(\omega)\}$. В силу определения множеств S_k, для всех $n > M_N(\omega)$, любой путь, соединяющий вершины 0 и n должен иметь длину, бóльшую чем N, а значит и $m_{0n}(\omega) > N$. В силу произвольности N и ω, получаем, что $m_{0n} \to \infty$ п.н. □

Доказательство теоремы 2. Будем считать, что происходит событие A_n^k, если граф $\mathfrak{G}_n$ распадается на два не связанных между собой подграфа, разделенных вершиной k. Иными словами,

$$A_n^k = \{\mathbb{I}\left(E_{i,j}\right) = 0 \text{ для всех чисел } i \text{ и } j, \text{ таких что } 0 \le i < k \text{ и } k \le j \le n\}.$$

Положим $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_n^k$. Ясно, что $A_n \subseteq \{m_{0n} = \infty\}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} np_n$ сходится согласно нашему предположению, следовательно, набор чисел

$$r_n := \frac{p_n}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k}$$

является распределением на множестве натуральных чисел.

Пусть ξ это случайная величина с таким распределением. Тогда условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} np_n < \infty$ равносильно условию $\mathbb{E}\xi < \infty$.

Приведем теперь известный результат, необходимый нам для дальнейших рассуждений.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbb{E}|\eta| < \infty$. *Тогда существует неотрицательная функция* $g(x) \nearrow \infty$, *такая что* $\mathbb{E}\left(|\eta| g(|\eta|)\right) < \infty$.

Применим предложение 2 к случайной величине ξ и для соответствующей функции g получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ng(n)p_n < \infty.$$

Далее, положим $f(x) = xg(x)$ и $L_n = \inf\{x \in \mathbb{N} : f(x) \geq n\}$ для всех натуральных n. Ясно, что

(1) $f(L_n) \geq n$ при всех n;
(2) $L_n = o(n)$.

Всюду далее весом существующего ребра $i \to j$ будем называть число $j - i$.

Введем событие B_n, происходящее, если в графе $\mathfrak{G}_n$ все рёбра имеют вес, не больший, чем L_n, то есть

$$B_n = \{\mathbb{I}(E_{i,j}) = 0 \text{ для всех } i \text{ и } j, \text{ таких что } j - i > L_n\}.$$

Далее, рассмотрим событие F_n^k, которое происходит, если $\mathbb{I}(E_{i,j}) = 0$ для всех чисел i и j, таких что $0 \leq i < k$, $k \leq j \leq n$ и $j - i \leq L_n$.

Ясно, что $B_n \cap F_n^k \subseteq A_n^k$, а значит:

$$(*) \qquad A_n \supseteq B_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_n^k \supseteq B_n \cap \bigcup_{k=1}^{d_n} C_n^k, \text{ где } C_n^k := F_n^{kL_n}, \text{ а } d_n := \left[\frac{n}{L_n}\right].$$

Здесь мы перешли к рассмотрению событий C_n^k, так как для фиксированного n события $C_n^1, C_n^2, \ldots C_n^{d_n}, B_n$ независимы в совокупности, поскольку строятся по разным наборам независимых событий $E_{i,j}$.

В силу $(*)$ справедливо неравенство:

$$\alpha_n := \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}\left(B_n \cap \bigcup_{k=1}^{d_n} C_n^k\right) = \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{d_n} C_n^k\right).$$

Здесь

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{d_n} C_n^k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{d_n} \bar{C}_n^k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{d_n} \mathbb{P}\left(\bar{C}_n^k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{d_n}\left(1 - \mathbb{P}\left(C_n^k\right)\right).$$

Для всех $k < d_n$ вероятность $\mathbb{P}\left(C_n^k\right)$ не зависит от k и вычисляется следующим образом:

$$\gamma_n := \mathbb{P}\left(C_n^k\right) = \prod_{j=1}^{L_n} (1 - p_j)^j.$$

При $k = d_n$ верна оценка:

$$\mathbb{P}\left(C_n^{d_n}\right) \geq \gamma_n.$$

Следовательно, при $\beta_n := \mathbb{P}(B_n)$ справедливо неравенство:

$$\alpha_n \geq \beta_n\left(1 - \prod_{k=1}^{d_n}(1 - \gamma_n)\right) = \beta_n\left(1 - (1 - \gamma_n)^{d_n}\right).$$

Вычислим вероятность β_n:

$$\beta_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=L_n+1}^{n} \bigcap_{i=0}^{n-j} \bar{E}_{i,i+j}\right) = \prod_{j=L_n+1}^{n} (1 - p_j)^{n-j+1}.$$

Ясно, что согласно условию теоремы, $\beta_n > 0$ при всех n. Далее,

$$|\ln \beta_n| \le \sum_{j=L_n+1}^{n} (n-j+1)\,|\ln(1-p_j)\,| \le cn \sum_{j=L_n+1}^{n} p_j$$

для некоторой константы c.

Согласно выбору последовательности L_n, для всех n справедливо неравенство $n \le f(L_n)$. Используя монотонность функции f, получаем:

$$|\ln \beta_n| \le c \sum_{j=L_n+1}^{n} f(j)p_j \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

так как ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(j)p_j$ сходится.

Исследуем теперь поведение последовательности $(1-\gamma_n)^{d_n}$ при $n \to \infty$.

$$|\ln \gamma_n| \le \sum_{j=1}^{L_n} j|\ln(1-p_j)\,| \le c\sum_{j=1}^{L_n} jp_j.$$

Следовательно, существует предел $\ln\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\gamma_n$, причем $-\infty < \ln\gamma < 0$. Так как $d_n = \left[\dfrac{n}{L_n}\right] \to \infty$, то $(1-\gamma_n)^{d_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Окончательно имеем:

$$1 \ge \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \ge \limsup_{n\to\infty} \beta_n \left(1-(1-\gamma_n)^{d_n}\right) = 1.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Будем писать $\{i \rightsquigarrow j\}$, если в графе $\mathfrak{G}$ существует путь из вершины i в j. Положим $A_n^+ = \bigcap\limits_{j>n}\{n \rightsquigarrow j\}$ и $A_n^- = \bigcap\limits_{j<n}\{j \rightsquigarrow n\}$. Рассмотрим случайное множество

$$\mathfrak{A}(\omega) := \left\{n \in \mathbb{Z} : \omega \in A_n^+ \cap A_n^-\right\}.$$

Обозначим через $\lambda := \mathbb{P}\left(A_n^+ \cap A_n^-\right)$.

В работе [4] показано, что если $\lambda > 0$, то $\mathfrak{A}$ — бесконечное множество с вероятностью единица. В этом случае для почти всех $\omega \in \Omega$ найдется такое натуральное число $N(\omega) \in \mathfrak{A}(\omega)$, что $m_{0n}(\omega) \ne \infty$ при $n \ge N(\omega)$. Мы будем предполагать, что $N(\omega)$ — наименьшее такое натуральное число. Ясно, что $\{m_{0n} = \infty\} \subseteq \{N > n\}$. Поэтому, $\mathbb{P}(m_{0n} = \infty) \to 0$ при $n \to \infty$.

В работе [4] также показано, что при $p_1 > 0$ условие $\lambda > 0$ эквивалентно условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\prod\limits_{j=1}^{k}(1-p_j) < \infty$. В случае 2 это условие с очевидностью выполнено. Проверим его выполнение для случая 1.

Заметим, что условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\prod\limits_{j=1}^{k}(1-p_j) < \infty$ и $\sum\limits_{k=s}^{\infty}\prod\limits_{j=s}^{k}(1-p_j) < \infty$ эквивалентны при любом $s \in \mathbb{N}$. Выберем s так, чтобы неравенство $p_n n \ge C > 1$ было выполнено для всех номеров $n \ge s$. Положим $a_k = \prod\limits_{j=s}^{k}(1-p_j)$. Воспользуемся известным неравенством $\displaystyle\sum_{j=s}^{k}\frac{1}{j} \geq \ln\frac{k}{s}$ и получим, что

$$\ln a_k = \sum_{j=s}^{k} \ln(1-p_j) \leq -\sum_{j=s}^{k} p_j \leq -C\sum_{j=s}^{k}\frac{1}{j} \leq -C\ln\frac{k}{s}.$$

Следовательно, $a_k \leq \dfrac{s^C}{k^C}$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}(1-p_j) < \infty$. Теорема 3 доказана. □

5. Приложение

Доказательство леммы 1. Для доказательства нам понадобятся следующие известные из математического анализа неравенства:

(1) Пусть $a > 0,\ b > 0,\ 0 < \alpha < 1$. Тогда $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$;

(2) Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha} \leq c_\alpha n^{1-\alpha}$, где $c_\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha}$ - константа, зависящая только от α.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i(n-i))^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n-i}\right)^\alpha \leq \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(n-i)^\alpha}$$
$$= \frac{2}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{2}{(n-1)^\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+1}^{n-l-1}\frac{1}{(i_{k-1}-i_{k-2})^\alpha}\frac{1}{(n-i_{k-1}-l)^\alpha}$$
$$\leq \frac{2}{(n-i_{k-2}-l-1)^\alpha}\sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+1}^{n-l-1}\frac{1}{(i_{k-1}-i_{k-2})^\alpha}$$
$$\leq \frac{2c_\alpha(n-l-i_{k-2}-1)^{1-\alpha}}{(n-l-i_{k-2}-1)^\alpha} \leq \frac{2c_\alpha n^{1-\alpha}}{(n-l-i_{k-2}-1)^\alpha}.$$

Поэтому,

$$S_n^{k,l} \leq (2c_\alpha n^{1-\alpha})\sum_{i_1=1}^{n-k-l+1}\dots\sum_{i_{k-2}=i_{k-3}+1}^{n-l-2}\frac{1}{i_1^\alpha}\cdots\frac{1}{(n-i_{k-2}-l-1)^\alpha}$$
$$\leq (2c_\alpha n^{1-\alpha})S_n^{k-1,l+1}.$$

Лемма 1 доказана. □

В заключение автор хочет поблагодарить С. Г. Фосса и Е. И. Прокопенко за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

References

[1] A. Auffinger, M. Damron, J. Hanson, *50 years of first passage percolation*, American Mathematical Society, **68** (2018), 161.

[2] A. Barak, P. Erdös, *On the maximal number of strongly independent vertices in a random acyclic directed graph*, SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, **5**:4 (1984), 508–514. MR0763980

[3] J. Cohen, C. Newman, *Community area and food chain length: theoretical predictions*, The American Naturalist, **138**:6 (1991), 1542–1554.

[4] D. Denisov, S. Foss, T. Konstantopoulos, *Limit theorems for a random directed slab graph*, The Annals of Applied Probability, **22**:2 (2012), 702–733. MR2953567

[5] P. Erdös, A. Rényi, *On Random Graphs. I.*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **6** (1959), 290–297. MR0120167

[6] S. Foss, T. Konstantopoulos, *Extended renovation theory and limit theorems for stochastic ordered graphs*, Markov Processes and Related Fields, **9**:3 (2003), 413–468. MR2028221

[7] S. Foss , J. Martin, P. Schmidt, *Long-range last-passage percolation on the line*, The Annals of Applied Probability, **24**:1 (2014), 198–234. MR3161646

[8] M. Isopi, C. Newman, *Speed of parallel processing for random task graphs*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **47**:3 (1994), 261–276. MR1266246

[9] B. Mallein, S. Ramassamy, *Barak-Erdös graphs and the infinite-bin model*, https://arxiv.org/abs/1610.04043, 2017.

Pavel Igorevich Tesemnikov
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: tesemnikov.p@gmail.com