S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1566–1575 (2018) УДК 517.928.2
DOI 10.33048/semi.2018.15.130 MSC 34K25, 34K26

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ И С НЕСКОЛЬКИМИ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

М.А. БОБОДЖАНОВА, В.Ф. САФОНОВ

Abstract. The paper considers an integro-differential equation with the zero operator of the differential part and with several quickly changing integral kernels. The work is a continuation of the authors' research, carried out earlier for one quickly changing integral kernel. The main ideas of such a generalization and subtleties arising in the development of the algorithm of the Lomov regularization method are fully visible in the case of two quickly changing integral kernels. After constructing an equivalent integro-differential system and its regularization, the theory of normal and unique solvability of the corresponding iterative problems is developed, which is the basis of the algorithm for constructing asymptotic solutions of the original problem.

Keywords: singularly perturbed, integro-differential equations, regularization of the integral.

В настоящей работе рассматривается интегродифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds+h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

с нулевым оператором дифференциальной части и с несколькими быстро изменяющимися ядрами. Работа является продолжением исследований, проведенных ранее для одного быстро изменяющегося ядра (см., например, [4,5]). Основные идеи такого обобщения и тонкости, возникающие при разработке

Bobodzhanova, M.A., Safonov, V.F., Regularized asymptotic solutions of integrodifferential equations with a zero operator of differential part and with several quickly varying kernels.

Поступила 16 июня 2018 г., опубликована 7 декабря 2018 г.

соответствующего алгоритма метода регуляризации [1,3], полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому ради сокращения проводимых далее выкладок считаем, что в (1) $r = 2$.

§1. Эквивалентная интегродифференциальная система и ее регуляризация

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) $h(t),\ \mu_j(t) \in \mathrm{C}^\infty([0,T],\mathbb{C}), K_j(t,s) \in \mathrm{C}^\infty(0 \le s \le t \le T,\mathbb{C}),\ j = 1,2$;
2) $\mu_1(t) \ne \mu_2(t)\ \forall t \in [0,T]$;
3) $\mu_j(t) \ne 0,\ \mathrm{Re}\,\mu_j(t) \le 0,\ j = 1,2,\ \forall t \in [0,T]$.

Введем две новые неизвестные функции

$$z_j = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds,\ \ j = 1,2.$$

Дифференцируя их по t, будем иметь

$$\frac{dz_j}{dt} = K_j(t,t)y + \frac{\mu_j(t)}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds$$
$$+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds \ \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon\frac{dz_j}{dt} = \mu_j(t)z_j + \varepsilon K_j(t,t)y + \varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds,\ \ j = 1,2.$$

Вместо (1) получаем систему

$$\begin{aligned}&\varepsilon\tfrac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \varepsilon\textstyle\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(\theta)d\theta}G_1(t,s)\,w(s,\varepsilon)ds\\ &+\varepsilon\textstyle\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_2(\theta)d\theta}G_2(t,s)\,w(s,\varepsilon)ds + H(t),\ \ w(0,\varepsilon) = \begin{pmatrix} y^0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2}$$

где $w = \{y, z_1, z_2\}, H(t) = \{h(t), 0, 0\}$, а матрицы $A(t),\ A_1(t),\ G_j(t,s)$ имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & \mu_1(t) & 0\\ 0 & 0 & \mu_2(t)\end{pmatrix},\ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ K_1(t,t) & 0 & 0\\ K_2(t,t) & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$G_1(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ G_2(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial K_2(t,s)}{\partial t}\end{pmatrix}.$$

Так как спектр $\sigma(A(t)) = \{0, \mu_1(t), \mu_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ имеет два ненулевых собственных значения $\mu_j(t)$, то регуляризацию задачи (2) произведем с помощью переменных

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_j(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j = 1,2. \tag{3}$$

Для расширения $\tilde{w} = \{y(t,\tau,\varepsilon), z_1(t,\tau,\varepsilon), z_2(t,\tau,\varepsilon)\}$ получим следующую систему:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\tfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + \mu_1(t)\tfrac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1} + \mu_2(t)\tfrac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2} - A(t)\tilde{w} - \varepsilon A_1(t)\tilde{w}\\ &-\varepsilon\textstyle\sum_{j=1}^2\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)\,\tilde{w}(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon)ds = H(t),\\ &\tilde{w}(0,0,\varepsilon) = \left\{y^0, 0, 0\right\}\\ &(\tau = (\tau_1,\tau_2)\,,\ \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_1(t)))\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Однако задачу (4) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{w}=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j\left(t,s\right)\tilde{w}(s,\frac{\psi\left(s\right)}{\varepsilon},\varepsilon)ds.$$

Для регуляризации оператора $J\tilde{w}$ введем класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [1], стр.62). При этом в качестве U возьмем пространство вектор-функций $w(t,\tau)$, представимых суммами вида

$$w(t,\tau)=w_1(t)e^{\tau_1}+w_2(t)e^{\tau_2}+w_0(t),w_j(t)\in \mathrm{C}([0,T],\mathbb{C}^3),j=0,1,2. \quad (5)$$

Покажем, что класс M_ε, асимптотически инвариантен относительно оператора J. Для этого надо показать, что образ $Jw(t,\tau)$ на функциях вида (5) представим в виде ряда

$$Jw(t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(w_1^{(k)}(t)e^{\tau_1}+w_1^{(k)}(t)e^{\tau_2}+w_0^{(0)}(t))|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}, \quad (6)$$

сходящегося асимптотически к Jw (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$. Подставляя (5) в $Jw(t,\tau)$, будем иметь

$$\begin{array}{l}Jw(t,\tau)=\sum_{j=1}^2\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\sum_{k=1}^2 G_j\left(t,s\right)w_k\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_k(\theta)d\theta}ds\\ +\sum_{j=1}^2\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds.\end{array} \quad (7)$$

Преобразуем первую сумму в (7):

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\sum\limits_{k=1}^{2}G_j\left(t,s\right)w_k\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_k(\theta)d\theta}ds\\ =\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{k=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_k(\theta)d\theta}G_j\left(t,s\right)w_k\left(s\right)ds\\ =\sum\limits_{j=1}^{2}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_j(\theta)d\theta}\sum\limits_{k=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_k(\theta)-\mu_j(\theta))d\theta}G_j\left(t,s\right)w_k\left(s\right)ds\\ =\sum\limits_{j=1}^{2}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_j(\theta)d\theta}[\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_1(\theta)-\mu_j(\theta))d\theta}G_j\left(t,s\right)w_1\left(s\right)ds\\ +\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_j(\theta))d\theta}G_j\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds]\\ =e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\left[\int_0^t G_1\left(t,s\right)w_1\left(s\right)ds+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}G_1\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds\right]\\ +e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\left[\int_0^t G_2\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_1(\theta)-\mu_2(\theta))d\theta}G_2\left(t,s\right)w_1\left(s\right)ds\right].\end{array}$$

Применяя операцию интегрирования по частям, найдем, что

$$\begin{array}{l}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1\left(t,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}w_2\left(s\right)ds\\ =\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}\\ =\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\left[\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}|_{s=0}^{s=t}\right]\\ -\varepsilon e^{\frac{\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}{\varepsilon}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}ds\\ =\varepsilon\left[\frac{G_1(t,t)w_2(s)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_2(\theta)d\theta}-\frac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\right]\\ -\varepsilon e^{\frac{\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}{\varepsilon}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta}ds.\end{array}$$

И аналогично получим

$$
\begin{aligned}
&e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t G_2(t,s)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_1(\theta)-\mu_2(\theta))d\theta} w_1(s)\,ds \\
&=\varepsilon\left[\tfrac{G_2(t,t)w_1(s)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_1(\theta)d\theta} - \tfrac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_1(\theta)-\mu_2(\theta))d\theta} ds.
\end{aligned}
$$

В итоге первая сумма в (7) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} \sum_{k=1}^2 G_j(t,s)\, w_k(s)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_k(\theta)d\theta} ds \\
&= e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1(t,s)\, w_1(s)\, ds \\
&+\varepsilon\left[\tfrac{G_1(t,t)w_2(s)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_2(\theta)d\theta} - \tfrac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta} ds \\
&+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t G_2(t,s)\, w_2(s)\, ds \\
&+\varepsilon\left[\tfrac{G_2(t,t)w_1(s)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_1(\theta)d\theta} - \tfrac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_1(\theta)-\mu_2(\theta))d\theta} ds.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Преобразуем теперь вторую сумму в (7), используя операцию интегрирования по частям:

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} G_j(t,s)\, w_0(s)\, ds = \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t \tfrac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} \\
&= \varepsilon\textstyle\sum_{j=1}^2 \tfrac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\Big|_{s=0}^{s=t} - \varepsilon\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right) ds \\
&= \varepsilon\left[\textstyle\sum_{j=1}^2 \tfrac{G_j(t,t)w_0(t)}{-\mu_j(t)} - \tfrac{G_j(t,0)w_0(0)}{-\mu_j(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_j(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon\textstyle\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right) ds.
\end{aligned}
$$

Объединяя полученные результаты, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&Jw(t,\tau) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1(t,s)\, w_1(s)\, ds \\
&+\varepsilon\left[\tfrac{G_1(t,t)w_2(s)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_2(\theta)d\theta} - \tfrac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_2(\theta)-\mu_1(\theta))d\theta} \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right) ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t G_2(t,s)\, w_2(s)\, ds \\
&+\varepsilon\left[\tfrac{G_2(t,t)w_1(s)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)} e^{\frac{\int_0^s \mu_1(\theta)d\theta}{\varepsilon}} - \tfrac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)} e^{\frac{\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}{\varepsilon}}\right] \\
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\mu_1(\theta)-\mu_2(\theta))d\theta} \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right) ds \\
&+\varepsilon\left[\textstyle\sum_{j=1}^2 \tfrac{G_j(t,t)w_0(t)}{-\mu_j(t)} - \tfrac{G_j(t,0)w_0(0)}{-\mu_j(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_j(\theta)d\theta}\right] \\
&-\varepsilon\textstyle\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right) ds.
\end{aligned}
$$

Продолжая этот процесс далее, придем к разложению

$$\begin{aligned}
&Jw\left(t,\tau\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1\left(t,s\right)w_1\left(s\right)ds\\
&+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t G_2\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds\\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\left(-1\right)^m\varepsilon^{m+1}\{[\left(I_{12}^m\left(G_1\left(t,s\right)w_2\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\\
&-\left(I_{12}^m\left(G_1\left(t,s\right)w_2\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(\theta)d\theta}]\\
&+[\left(I_{21}^m\left(G_2\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\\
&-\left(I_{21}^m\left(G_2\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_2(\theta)d\theta}]\\
&+\sum_{j=1}^{2}[\left(I_{j0}^m\left(G_j\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=t}-\left(I_{j0}^m\left(G_j\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu_j(\theta)d\theta}]\},
\end{aligned}\tag{9}$$

где введены операторы:

$$\begin{aligned}
&I_{12}^0=\tfrac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)},\ I_{12}^m=\tfrac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\tfrac{\partial}{\partial s}I_{12}^{m-1},\\
&I_{21}^0=\tfrac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)},\ I_{21}^m=\tfrac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\tfrac{\partial}{\partial s}I_{12}^{m-1},\\
&I_{j0}^0=\tfrac{1}{-\mu_j(s)},\ I_{j0}^m=\tfrac{1}{-\mu_j(s)}\tfrac{\partial}{\partial s}I_{j0}^{m-1},\ j=1,2,\ m=1,2,3,\ldots.
\end{aligned}\tag{10}$$

При этом нетрудно показать (см. [2]), что ряд справа в (9) сходится к $Jw(t,\varepsilon)$ (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$. Введем операторы порядка (по ε) $R_m:U\to U:$

$$\begin{aligned}
&R_0w\left(t,\tau\right)=e^{\tau_1}\textstyle\int_0^t G_1\left(t,s\right)w_1\left(s\right)ds+e^{\tau_2}\int_0^t G_2\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds,\\
&R_{m+1}w\left(t,\tau\right)=\left(-1\right)^m\{[\left(I_{12}^m\left(G_1\left(t,s\right)w_2\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_2}\\
&-\left(I_{12}^m\left(G_1\left(t,s\right)w_2\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_1}]\\
&+[\left(I_{21}^m\left(G_2\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_1}-\left(I_{21}^m\left(G_2\left(t,s\right)w_1\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}]\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^2[\left(I_{j0}^m\left(G_j\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=t}-\left(I_{j0}^m\left(G_j\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_j}]\},\\
&m\geq 1,\ \tau=\tfrac{\psi(t)}{\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{11}$$

Тогда образ $Jw(t,\tau)$ можно записать в виде

$$Jw(t,\tau)=R_0w(t,\tau)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}w(t,\tau),\tag{12}$$

где $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Произведем теперь расширение оператора J на рядах вида

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,\tau)\tag{13}$$

с коэффициентами $w_k(t,\tau)\in U,k\geq-1$.

Определение 1. *Формальным расширением $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (13) называется оператор*

$$\tilde{J}\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\overset{def}{=}\sum_{\nu=-1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\sum_{s=-1,\,\nu-s\geq 0}^{\nu}R_{\nu-s}w_s(t,\tau). \tag{14}$$

Несмотря на то, что расширение $\tilde{J}$ оператора J определено формально, им вполне можно пользоваться (см. ниже теорему 3) при построении асимптотического решения конечного порядка по ε. Теперь легко выписать регуляризованную (по отношению к (1)), задачу:

$$\begin{array}{l}\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}\\ -\varepsilon\tilde{J}\tilde{w}=H(t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\left\{y^0,0,0\right\}.\end{array} \tag{15}$$

§2. Разрешимость итерационных задач и асимптотическая сходимость формальных решений к точному

Подставляя ряд (13) в (15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$L_0w_{-1}(t,\tau)\equiv\mu_1(t)\frac{\partial w_{-1}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial w_{-1}}{\partial\tau_2}-A(t)w_{-1}=0, w_{-1}(0,0)=0; \qquad (16_{-1})$$

$$L_0w_0(t,\tau)=-\frac{\partial w_{-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{-1}+R_0w_{-1}+H(t), w_0(0,0)=w^0; \qquad (16_0)$$

$$L_0w_1(t,\tau)=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+A_1(t)w_0+R_0w_0+R_1w_{-1}, w_1(0,0)=0; \qquad (16_1)$$

$$\cdots$$

$$L_0w_k(t,\tau)=-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{k-1}+R_0w_{k-1}+R_1w_{k-2}+...+R_kw_{-1},$$
$$w_k(0,0)=0, k\geq 1. \qquad (16_k)$$

Переходя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач (16_{-1}),..., (16_k), вычислим собственные векторы $\varphi_j(t)$ и $\chi_j(t)$ матрицы $A(t)$и $A^*(t)$ соответственно. Нетрудно проверить, что они имеют вид

$$\begin{array}{l}\varphi_0(t)=\{1,0,0\},\ \varphi_1(t)=\left\{\frac{1}{\mu_1(t)},1,0\right\},\ \varphi_2(t)=\left\{\frac{1}{\mu_2(t)},0,1\right\},\\ \chi_0(t)=\left\{1,-\frac{1}{\bar{\mu}_1(t)},-\frac{1}{\bar{\mu}_2(t)}\right\},\quad \chi_1(t)=\{0,1,0\},\ \chi_2(t)=\{0,0,1\},\end{array}$$

причем

$$\varphi_0(t),\quad \varphi_1(t),\quad \varphi_2(t)$$

соответствуют собственным значениям

$$\lambda_0(t)\equiv 0,\quad \lambda_1(t)\equiv\mu_1(t),\quad \lambda_2(t)\equiv\mu_2(t)$$

матрицы $A(t)$, а $\chi_0(t),\chi_1(t),\chi_2(t)$ — собственным значениям $\bar{\lambda}_0(t)\equiv 0$, $\bar{\lambda}_1(t)\equiv\bar{\mu}_1(t),\bar{\lambda}_2(t)\equiv\bar{\mu}_2(t)$ матрицы $A^*(t)$ соответственно.

Каждая из итерационных систем (16_k) имеет вид

$$L_0w(t,\tau)\equiv\mu_1(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_2}-A(t)w=P(t,\tau), \tag{17}$$

где $P(t)=P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+P_0(t)\in U$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)–3) и $P(t,\tau) \in U$. Для того чтобы система (17) имела решение в U необходимо и достаточно, чтобы*

$$(P_j(t), \chi_j(t)) \equiv 0, j = 0, 1, 2, \forall t \in [0, T], \tag{18}$$

Доказательство. Будем определять решение системы (17) в виде суммы (5). Подставляя (5) в (13) и приравнивая отдельно коэффициенты при e^{τ_j} и свободные члены, будем иметь

$$[\mu_j(t)I - A(t)]w_j(t) = P_j(t)\ (j = 1, 2)\,,\ \ -A(t)w_0(t) = P_0(t). \tag{19}$$

Сделаем в этих системах замены переменных $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j, w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$, где $\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ — матрица из собственных векторов оператора $A(t)$. Умножая полученные системы слева на $\Phi^{-1}(t)$ и учитывая, что$(\Phi^{-1}(t))^* = \chi(t) \equiv (\chi_0(t), \chi_1, (t), \chi_2(t))$ — матрица из собственных векторов сопряженного оператора $A^*(t)$, будем иметь

$$[\mu_j(t)I - \Lambda(t)]\xi_j(t) = \{(P_j(t), \chi_0(t)), (P_j(t), \chi_1(t)), (P_j(t), \chi_2(t))\},\ j = 1, 2,$$

$$-\Lambda\eta(t) = \{(P_0(t), \chi_0(t)), (P_0(t), \chi_1(t), (P_0(t), \chi_2(t))\}.$$

где $(,)$ — обычное скалярное произведение в комплексном трехмерном пространстве $\mathbb{C}^3$, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\mu_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) \equiv \mathrm{diag}(0, \mu_1(t), \mu_2(t))$. Запишем эти системы более подробно (аргумент t везде опускаем и обозначаем $\xi_j = \{\xi_j^1, \xi_j^2, \xi_j^3\}, \eta = \{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$) :

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j - \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j - \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \xi_j^2 \\ \xi_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_j, \chi_0) \\ (P_j, \chi_1) \\ (P_j, \chi_2) \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \tag{20_j}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0, \chi_0) \\ (P_0, \chi_1) \\ (P_0, \chi_2) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Отсюда видно, что вторая строка матрицы системы (20_1) $(j = 1)$ нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$(P_1(t), \chi_1(t)) \equiv 0;$$

при этом $\xi_1^2(t) \equiv \alpha_1(t) \in C^\infty\left([0, T], \mathbb{C}^1\right)$ — произвольная скалярная функция. И аналогично, третья строка матрицы системы (20_2) $(j = 2)$ нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$(P_2(t), \chi_2(t)) \equiv 0;$$

при этом $\xi_2^3(t) \equiv \alpha_2(t) \in C^\infty\left([0, T], \mathbb{C}^1\right)$ — произвольная скалярная функция. Поскольку в системе (21) первая строка нулевая, то для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$(P_0(t), \chi_0(t)) \equiv 0;$$

при этом $\eta^1(t) \equiv \alpha_0(t) \in C^\infty\left([0, T], \mathbb{C}^1\right)$ – произвольная скалярная функция. Таким образом, для разрешимости систем (19) (а значит, и системы (17)) необходимо и достаточно выполнения условий (18). Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия (18), то, как это видно из уравнений (20_j)и (21) (с учетом того, что $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j, w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$), система (17) имеет следующее решение в пространстве U :

$$\begin{aligned}
w(t,\tau) &= \left[\alpha_1(t)\varphi_1(t) + \tfrac{(P_1(t),\chi_0(t))}{\mu_1(t)}\varphi_0(t) + \tfrac{(P_1(t),\chi_2(t))}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\right] e^{\tau_1}\\
&+ \left[\alpha_2(t)\varphi_2(t) + \tfrac{(P_2(t),\chi_0(t))}{\mu_2(t)}\varphi_0(t) + \tfrac{(P_2(t),\chi_1(t))}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}\varphi_1(t)\right] e^{\tau_2}\\
&+ \left[\alpha_0(t)\varphi_0(t) + \tfrac{(P_0(t),\chi_1(t))}{-\mu_1(t)}\varphi_1(t) + \tfrac{(P_0(t),\chi_2(t))}{-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\right]\\
&\equiv \textstyle\sum_{j=0}^{2}\left[\alpha_j(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=0,k\neq j}^{2} p_{jk}(t)\varphi_k(t)\right] e^{\tau_j},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $\alpha_j(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$ — произвольные функции, $p_{jk}(t) \equiv \frac{(P_j(t),\chi_k(t))}{\mu_j(t)-\mu_k(t)}$, $j,k = 0,1,2$ и ради удобства обозначено $\tau_0 = 0$.

Рассмотрим теперь систему (18) при дополнительных условиях

$$\begin{aligned}
&w(0,0) = w^*,\\
&< -\tfrac{\partial w}{\partial t} + A_1(t)w + R_0 w + Q(t,\tau), \chi_j(t)e^{\tau_j} >\equiv 0, j = 1,2, \forall t \in [0,T],\\
&< -\tfrac{\partial w}{\partial t} + A_1(t)w + R_0 w + Q(t,\tau), \chi_0(t) >\equiv 0 \ \forall t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{23}$$

где $Q(t,\tau) = Q_1(t)e^{\tau_1} + Q_2(t)e^{\tau_2} + Q_0(t)$ — известная функция класса U, $w^* \in \mathbb{C}^3$ — известный постоянный вектор, а через $<,>$ обозначено скалярное (при каждом $t \in [0,T]$) произведение в пространстве U :

$$< w(t,u), v(t,u) >\equiv< \sum_{j=1}^{2} w_j(t)e^{\tau_j} + w_0(t), \sum_{j=1}^{2} v_j(t)e^{\tau_j} + v_0(t) > \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{2}(w_k(t), v_k(t)),$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)–3) и вектор-функция $P(t,\tau) \in U$ удовлетворяет условиям (18). Тогда система (17) при дополнительных условиях (22) однозначно разрешима в U.*

Доказательство. Так как выполнены условия (18), то система (17) имеет решение (22) в пространствеU, где функции $\alpha_j(t)$ пока произвольны. Подчиняя (18) начальному условию $w(0,0) = w^*$, получим равенство

$$\sum_{j=0}^{2}\left[\alpha_j(0)\varphi_j(0) + \sum_{k=0,k\neq j}^{2} p_{jk}(0)\varphi_k(0)\right] = w^*.$$

Умножая это равенство скалярно на $\chi_s(0)$, будем иметь

$$\alpha_s(0) + \sum_{s=0,s\neq j}^{2} p_{js}(0) = (w^*, \chi_s(0))$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_s(0) = (w^*, \chi_s(0)) - \sum_{s=0,s\neq j}^{2} p_{js}(0), \ s = 0,1,2. \tag{24}$$

Вычислим теперь выражение $-\frac{\partial w}{\partial t}+A_1(t)w+R_0w+Q(t,\tau)$. Учитывая (22) и вид оператора R_0, будем иметь

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{\partial w}{\partial \tau}+A_1\left(t\right)w+R_0w+Q\left(t,\tau\right)\\
&=-\textstyle\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\alpha_j\left(t\right)\varphi_j\left(t\right)\right)^{\bullet}+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}\left(p_{jk}\left(t\right)\varphi_k\left(t\right)\right)^{\bullet}\right]e^{\tau_j}\\
&-\left(\alpha_0\left(t\right)\varphi_0\left(t\right)\right)^{\bullet}+\textstyle\sum_{k=1}^{2}\left(p_{0k}\left(t\right)\varphi_0\left(t\right)\right)^{\bullet}\\
&-\textstyle\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_j\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_j\left(t\right)+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_k\left(t\right)\right]e^{\tau_j}\\
&-\alpha_0\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_0\left(t\right)+\textstyle\sum_{k=1}^{2}p_{0k}\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_k\left(t\right)\\
&+e^{\tau_1}\textstyle\int_0^t G_1\left(t,s\right)\left[\alpha_1\left(s\right)\varphi_1\left(s\right)+\sum_{k=0,k\neq 1}^{2}p_{1k}\left(s\right)\varphi_k\left(s\right)\right]ds\\
&+e^{\tau_2}\textstyle\int_0^t G_2\left(t,s\right)\left[\alpha_2\left(s\right)\varphi_2\left(s\right)+\sum_{k=0}^{1}p_{2k}\left(s\right)\varphi_k\left(s\right)\right]ds\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^{2}Q_j\left(t\right)e^{\tau_j}+Q_0\left(t\right)
\end{aligned}$$

(здесь жирной точкой обозначено дифференцирование по t). Теперь эту функцию надо подчинить условиям (23). Начнем с последнего условия. Учитывая биортонормированность систем $\{\varphi_j\left(t\right)\},\{\chi_k\left(t\right)\}$, перепишем это условие в виде

$$\dot{\alpha}_0\left(t\right)=\left(A_1\left(t\right)\varphi_0\left(t\right)-\dot{\varphi}_0\left(t\right),\chi_0\left(t\right)\right)\alpha_0\left(t\right)+q_0\left(t\right),\tag{25}$$

где обозначено:

$$q_0\left(t\right)\equiv\left(Q_0\left(t\right)-\sum_{k=1}^{2}p_{0k}\left(t\right)\dot{\varphi}_k\left(t\right)+\sum_{k=1}^{2}p_{0k}\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_k\left(t\right),\chi_0\left(t\right)\right).$$

Получено дифференциальное уравнение относительно $\alpha_0\left(t\right)$. Производя аналогичные действия при вычислении первых двух условий (23), получим интегодиферница́льные уравнения:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1\left(t\right)=\left(A_1\left(t\right)\varphi_1\left(t\right)-\dot{\varphi}_1\left(t\right),\chi_1\left(t\right)\right)\alpha_1\left(t\right)\\
&+\textstyle\int_0^t\left(G_1\left(t,s\right)\varphi_1\left(s\right),\chi_1\left(t\right)\right)\alpha_1\left(s\right)ds+q_1\left(t\right),\\
&\dot{\alpha}_2\left(t\right)=\left(A_1\left(t\right)\varphi_2\left(t\right)-\dot{\varphi}_2\left(t\right),\chi_2\left(t\right)\right)\alpha_2\left(t\right)\\
&+\textstyle\int_0^t\left(G_2\left(t,s\right)\varphi_2\left(s\right),\chi_2\left(t\right)\right)\alpha_2\left(s\right)ds+q_2\left(t\right),
\end{aligned}\tag{26}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
q_1\left(t\right)&\equiv\Bigg(Q_1\left(t\right)-\sum_{k=0,k\neq 1}^{2}p_{1k}\left(t\right)\dot{\varphi}_k\left(t\right)+\sum_{k=0,k\neq 1}^{2}p_{1k}\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_k\left(t\right)\\
&+\sum_{k=0,k\neq 1}^{2}\int_0^t p_{1k}\left(s\right)G_1\left(t,s\right)\varphi_k\left(s\right)ds,\chi_1\left(t\right)\Bigg),\\
q_2\left(t\right)&\equiv\Bigg(Q_2\left(t\right)-\sum_{k=0}^{1}p_{2k}\left(t\right)\dot{\varphi}_k\left(t\right)+\sum_{k=0}^{1}p_{2k}\left(t\right)A_1\left(t\right)\varphi_k\left(t\right)\\
&+\sum_{k=0}^{1}\int_0^t p_{2k}\left(s\right)G_2\left(t,s\right)\varphi_k\left(s\right)ds,\chi_2\left(t\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Присоединяя к уравнениям (25) и (26) начальные условия (24), найдем однозначно функции $\alpha_j\left(t\right)$, а значит, однозначно вычислим решение (22) в пространстве U системы (18) при дополнительных условиях (23). Теорема доказана.

Так же, как и в [6] (стр.70–75), можно доказать следующую теорему об асимптотической сходимости формальных решений к точным.

Теорема 3. *Пусть для системы (2) выполнены условия 1)–3). Тогда при* $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ *— достаточно мало) система (2) имеет единственное решение* $w(t, \varepsilon) \in \mathrm{C}^1([0, T], \mathbb{C}^3)$ *и имеет место оценка*

$$||w(t, \varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t)||_{C[0,T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, N = -1, 0, 1, ...,$$

где $w_{\varepsilon N}(t)-$ *сужение (при* $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$) $N-$ *ой частичной суммы ряда (13) (с коэффициентамиw*$_k$ $(t, \tau) \in U$ *удовлетворяющими итерационным задачам* (16_k)), *а постоянная* $c_N > 0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Поскольку решение $y\,(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1) является первой компонентой вектор-функции $w\,(t, \varepsilon)$, то для него (при условиях 1)–3)) также справедлива оценка

$$||y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)||_{C[0,T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, N = -1, 0, 1, ...,$$

где $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Отметим, что (в отличие от сингулярно возмущенных задач с ненулевым оператором дифференциальной части, где условия ортогональности приводят к дифференциальным уравнениям) здесь условия разрешимости итерационной задачи (17) записываются в виде системы интегродифференциальных уравнений (25),(26). И, наконец, заметим, что развитый выше алгоритм с небольшими изменениями обобщается и на системы с несколькими быстро убывающими ядрами.

References

[1] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981. [in Russian] MR0645353

[2] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhanov, *Course of higher mathematics. Singularly perturbed equations and the regularization method: textbook*, Moscow : Izdatelstvo MEI, 2012. [in Russian]

[3] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: Moscow University Press, 2011. [in Russian]

[4] Bobodzhanova M.A., *Singulyarno vozmushchennye integro differentsialnye sistemy s nulevym operatorom differentsial'noy chasti*, Vestnik MEI, **6** (2010), 63–72.

[5] Bobodzhanova M.A., Safonov V.F.,*Asymptotic analysis of singularly perturbed integrodifferential systems with the zero operator in the differential part*, Differ. Uravn., **47**:4 (2011), 519–536. MR2917754

[6] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov,*Volterra integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotic integration*, Math. Sb., **192**:8 (2001), 53–78.

Mashkhura Abdukhafizovna Bobodzhanova,
The National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14, Krasnokazarmennaya str.,
111250, Moscow, Russia
E-mail address: bobodzhanovama@mpei.ru

Valery Fedorovich Safonov,
The National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14, Krasnokazarmennaya str.,
Moscow, 111250, Russia
E-mail address: SafonovVF@mpei.ru