

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1576–1594 (2018)

УДК 514.752.6, 517.518.855

DOI 10.33048/semi.2018.15.131

MSC 53A04

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЯМИ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. СЛОВЕЧНОВ

**ABSTRACT.** This paper presents methods for a plane curve approximation by conics. The paper is divided into two parts: 1) approximation methods for fixed ends and fixed angles conditions 2) local curve approximation at a point. In the first part, for a given arc of a plane curve with monotonic curvature, we construct a conic approximation of the same length and give a criterion for the type of this conic. In the second part, we investigate the osculating conic and obtain formulae for its geometric parameters. We also derive the characteristic differential equation for conics and derive the necessary and sufficient condition on conic's type.

**Keywords:** Plane curve approximation, osculating conics.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением исследований в области аппроксимации плоских кривых, начатых в [1]. Под аппроксимацией участка кривой понимается гладкая линия определенного класса, проходящая через концы этого участка и имеющая те же касательные векторы в них, что и рассматриваемая кривая. При выполнении дополнительного условия равенства длин дуг исходной кривой и ее аппроксимации мы будем называть ее *изометрической* аппроксимацией.

Постановка задачи об изометрической аппроксимации кривой обусловлена следующим обстоятельством. В функциональном анализе, как правило, рассматривают приближения функций на данном отрезке, а в геометрии — приближение участка кривой с закрепленными концами. Изометрическая аппроксимация в некотором смысле сочетает в себе оба подхода. Если плоскую кривую

---

SLOVESNOV, A.V., ON APPROXIMATION OF PLANE CURVES BY CONICS.

© 2018 Словеснов А.В.

Поступила 15 апреля 2018 г., опубликована 7 декабря 2018 г.

интерпретировать с точки зрения теории функций, то ее можно описать с помощью функции кривизны, зависящей от натурального параметра. В этом случае приближению участка кривой будет соответствовать приближение функции кривизны на заданном отрезке, что геометрически выражается в сохранении длины. В общем, задачу изометрической аппроксимации можно рассматривать как и задачу теории изгибаний кривых, которая имеет вполне осмысленную механическую интерпретацию. Но в нашем случае речь идет не об изгибании в смысле непрерывной деформации, а о дискретной изометрии.

В статье [1] было показано, что участок плоской линии, на котором кривизна монотонна, можно приблизить  $C^1$ -гладкой в целом кривой, состоящей из двух дуг сопряженных окружностей, с сохранением общей длины дуги. Естественным продолжением этой работы стал вопрос о существовании изометрической аппроксимации в классе кривых второго порядка. Число степеней свободы, равное пяти, позволяет использовать для приближения одну дугу (вместо двух круговых дуг) и тем самым перейти к аналитической аппроксимации (вместо полученной ранее  $C^1$ -гладкости).

Существование изометрической аппроксимации открывает новый способ построения соприкасающихся квадратик. Согласно [2] (см. главу 5, §4) существуют два классических подхода к нахождению элемента  $d$ -параметрического семейства кривых, соприкасающихся данной линии в фиксированной точке. Первый, аналитический подход, заключается в решении системы, содержащей  $d$  уравнений относительно  $d$  определяющих параметров и выражающей равенство в рассматриваемой точке функций (данной кривой и искомой аппроксимации) и их первых  $d - 1$  производных. Второй, геометрический, сводится к вычислению предельного элемента семейства аппроксимирующих кривых, проходящих через  $d$  бесконечно близких точек исходной линии (точнее, к вычислению предела при независимом стремлении  $d$  точек кривой к рассматриваемой точке). В случае соприкасания кривой с квадратиком, когда  $d = 5$ , можно указать третий, изометрический, способ. Если зафиксировать один из концов данного участка, а второй считать переменным, то для каждого положения свободного конца можно построить изометрическую аппроксимацию соответствующей длины и получить тем самым нужное однопараметрическое семейство. Предельный элемент этого семейства (при стремлении свободного конца к фиксированному), если он существует и лежит в классе квадратик, будет соприкасающимся к кривой в фиксированной точке.

Для соприкасающихся квадратик известна теорема их существования и единственности (см., например, [3], раздел I.3), однако явных формул, позволяющих определить их геометрические характеристики, автору в литературе обнаружить не удалось. Во второй части работы будут определены параметры квадратика в терминах кривизны исходной кривой и ее производных по натуральному параметру. Как следствие будет получено известное (см. [4]) дифференциальное уравнение на кривизну (как функцию натурального параметра), которое, во-первых, может служить дифференциально-характеристическим для кривых второго порядка, а во-вторых, представляет собой критерий перекасания, которое играет важную роль при исследовании семейства соприкасающихся квадратик (подробнее см. [5])

## 2. ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДУГИ КРИВОЙ

Обратимся к задаче аппроксимации участка кривой с сохранением длины дуги. Рассмотрим плоскую  $C^2$ -гладкую кривую, заданную функцией кривизны  $k(s)$ ,  $s \in [0, L]$ , зависящей от длины дуги. Зафиксируем на кривой две достаточно близкие точки  $A$  и  $B$ , соответствующие значениям натурального параметра  $s_a = 0$  и  $s_b = s$ , и обозначим касательные векторы в этих точках буквами  $\tau_a$  и  $\tau_b$ . Без потери общности мы будем считать, что точка  $A$  совпадает с началом координат, вектор  $\tau_a$  сонаправлен с осью  $Ox$ , касательный вектор  $\tau_b$  образует угол  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  с положительным направлением оси  $Ox$ , а точка  $B$  расположена в первом квадранте и имеет координаты (см. рисунок ниже)

$$(x_b, y_b) = (l + r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Будем говорить, что точки  $A, B$  находятся в общем положении, если  $A \notin l_b$ ,  $B \notin l_a$ , где  $l_a$  и  $l_b$  — касательные прямые.

**2.1. Параболическая аппроксимация.** Сначала построим параболу, проходящую через точки  $A$  и  $B$  и касающуюся векторов  $\tau_a$  и  $\tau_b$ , и вычислим длину параболической дуги  $AB$ . Обозначим буквой  $P$  точку пересечения прямых  $l_a$  и  $l_b$ , а буквами  $l$  и  $r$  — расстояния  $|AP|$  и  $|BP|$  соответственно. Вычислим последовательно направление директрисы  $d$ , фокус параболы  $F$  и расстояние  $\rho$  от фокуса до директрисы.

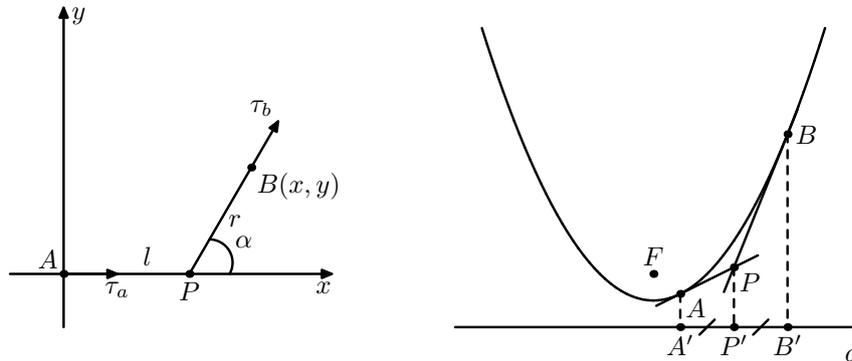


Рис. 1. Определение директрисы аппроксимирующей параболы

Свойство параболы, согласно которому длины проекций отрезков  $|AP|$  и  $|BP|$  на директрису  $d$  равны (равенство  $A'P' = B'P'$  на рисунке), позволяет вычислить направляющий вектор директрисы  $\tau_d = (\cos \beta, \sin \beta)$ :

$$|l \cos \beta| = A'P' = B'P' = |r \cos(\alpha - \beta)| \Leftrightarrow \begin{cases} l \cos \beta = r \cos(\alpha - \beta), \\ l \cos \beta = -r \cos(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Второе из полученных уравнений соответствует прямой, содержащей высоту  $PH$  треугольника  $APB$ , в котором проекции сторон  $AP$  и  $BP$  совпадают с  $PH$ . Такое расположение директрисы и касательных не реализуется для параболы, поэтому направляющий угол  $\beta$  определяется из первого уравнения:

$$l \cos \beta = r(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta = \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}}, \\ \sin \beta = \frac{l - r \cos \alpha}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}}. \end{cases}$$

Пусть  $d^\perp$  — произвольная прямая, перпендикулярная директрисе. Тогда, согласно оптическому свойству, касательная  $l_m$ , проведенная в произвольной точке параболы  $M$ , составляет равные углы с прямыми  $d^\perp$  и  $MF$ .

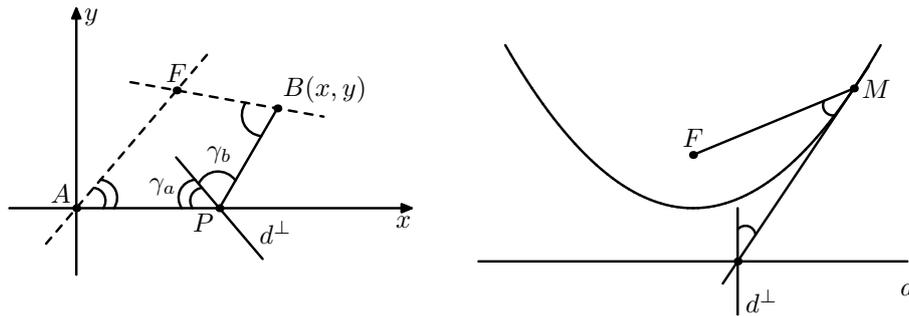


Рис. 2. Определение фокуса аппроксимирующей параболы

Следовательно, фокус параболы можно найти как пересечение прямых  $AF$  и  $BF$ , полученных из  $l_a$  и  $l_b$  вращением на углы  $\gamma_\alpha = \angle(l_a, d^\perp)$  и  $\gamma_\beta = \angle(l_b, d^\perp)$  соответственно. При этом координаты фокуса находятся из следующих соотношений

$$x_f = x_b - \frac{r^2 \cdot \sin(2\alpha - \beta)}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}}, \quad y_f = y_b + \frac{r^2 \cdot \cos(2\alpha - \beta)}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}}.$$

Чтобы восстановить директрису параболы, достаточно указать произвольную лежащую на ней точку. В качестве последней можно взять точку  $F'$ , симметричную фокусу относительно любой из касательных (удобнее с точки зрения вычислений использовать касательную  $l_a$ , совпадающую с осью  $Ox$ ). При этом расстояние между фокусом и найденной директрисой вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}} \cdot (1 + \cos(2\alpha - 2\beta)).$$

Таким образом, парабола восстановлена, и можно выписать ее уравнение второго порядка:

$$(1) \quad x^2(r^2 \sin^2 \alpha) + y^2(r \cos \alpha - l)^2 - 2xy(r \cos \alpha - l)r \sin \alpha - 4yl^2r \sin \alpha = 0.$$

Найденные геометрические характеристики параболы позволяют также вычислить абсциссы точек  $A$  и  $B$  в канонической системе координат

$$\begin{cases} \hat{x}_a = (0 - x_f) \cos \beta + (0 - y_f) \sin \beta, \\ \hat{x}_b = (x - x_f) \cos \beta + (y - y_f) \sin \beta, \end{cases}$$

а также длину параболической дуги  $AB$ :

$$L_{AB} = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2} + \frac{\rho}{2} \ln \left( \frac{x}{\rho} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2} \right) \Bigg|_{\hat{x}_a}^{\hat{x}_b}$$

## 2.2. Существование и единственность аппроксимирующей квадрики.

**Теорема 1.** Если точки  $A$  и  $B$  находятся в общем положении, участок  $\overset{\frown}{AB}$  является выпуклым, а угол поворота касательного вектора на этом участке острый, то существует единственная кривая второго порядка  $L$ , проходящая через точки  $A$  и  $B$ , касаясь в них векторов  $\tau_a$  и  $\tau_b$ , у которой длина дуги  $L_{AB}$  равна  $s$ .

*Доказательство.* Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка

$$L(x, y) = 0, \quad L(x, y) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_1x + 2c_2y + c_0$$

и введем следующее обозначение для набора коэффициентов:

$$\{c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_1, c_2, c_0\} = C_L$$

Среди всех кривых второго порядка выделим семейство  $S$ , элементы которого проходят через точки  $A$  и  $B$  и касаются в них векторов  $\tau_a$  и  $\tau_b$ . Коэффициенты  $C_L$  элементов этого семейства должны подчиняться следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} L(A) = 0 \\ L(B) = 0 \\ (\nabla L, \tau_a) = 0 \\ (\nabla L, \tau_b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{11}x_b^2 + 2c_{12}x_b y_b + c_{22}y_b^2 + 2c_1x_b + 2c_2y_b + c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ (c_{11}x_b + c_{12}y_b + c_1) \cos \alpha + (c_{22}y_b + c_{12}x_b + c_2) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Данная система является линейной с основной матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_b^2 & 2x_b y_b & y_b^2 & 2x_b & 2y_b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_b \cos \alpha & y_b \cos \alpha + x_b \sin \alpha & y_b \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Минор данной матрицы, образованный последними четырьмя столбцами, равен  $-y_b^2 \sin \alpha$  и в силу предположения  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  и общего положения точек  $A$  и  $B$  отличен от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 4, система обладает двумя свободными переменными и ее общее решение имеет вид

$$C_L = u \cdot C_{L_1} + v \cdot C_{L_2}, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

в котором  $C_{L_1}$ ,  $C_{L_2}$  — некоторые частные линейно независимые решения.

Выберем в качестве кривой  $L_1$  объединение прямых  $l_a$  и  $l_b$ , а в качестве  $L_2$  — двоянную прямую, содержащую отрезок  $AB$ :

$$L_1(x, y) = y(-x \sin \alpha + y \cos \alpha + l \sin \alpha), \quad L_2(x, y) = (xr \sin \alpha - y(l + r \cos \alpha))^2.$$

Так как кривая  $L$  описывается набором  $C_L$ , определенным с точностью до общего множителя, то наборы  $C_L$ , соответствующие семейству  $S$ , можно описать следующим равенством:

$$C_L(\gamma) = -4lr \cdot C_{L_1} \cos \gamma + C_{L_2} \sin \gamma, \quad \gamma \in [0, \pi),$$

в котором коэффициент  $-4lr$  первого слагаемого выбран в целях упрощения дальнейших выкладок. Кривая этого семейства, соответствующая значению параметра  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , совпадает с аппроксимирующей параболой (1).

Для семейства кривых  $C_L(\gamma)$  рассмотрим инвариант  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ , определяющий тип кривой, как функцию параметра  $\gamma$ :

$$\Delta(\gamma) = 2l^2r^2 \sin^2 \alpha (\sin 2\gamma - \cos 2\gamma - 1).$$

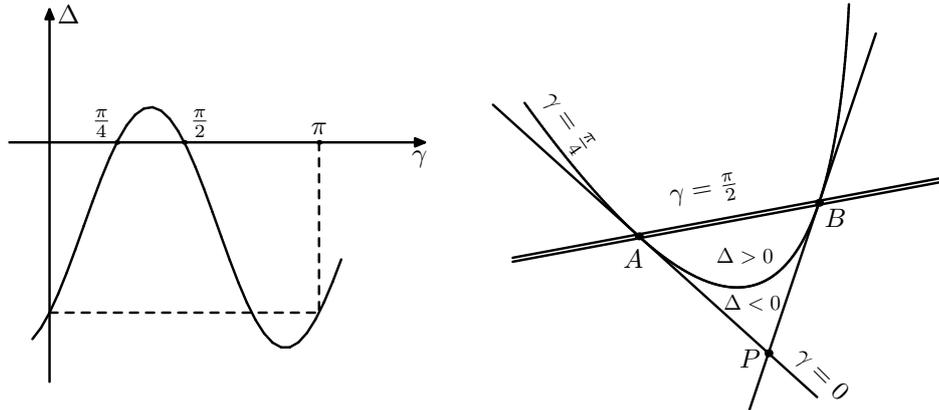


Рис. 3. Распределение аппроксимирующих квадратик

Представленный график показывает следующее распределение кривых  $L(\gamma)$ :

- при  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{4})$  кривая  $L(\gamma)$  представляет собой гиперболу, причем точки  $A$  и  $B$  лежат на одной ее ветке;
- при  $\gamma \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  кривая  $L(\gamma)$  представляет собой эллипс;
- при  $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  кривая  $L(\gamma)$  также представляет собой гиперболу, но точки  $A$  и  $B$  принадлежат разным ее веткам;
- значения  $\gamma = 0, \gamma = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{2}$  соответствуют объединению двух прямых, параболы и сдвоенной прямой.

Таким образом, треугольник  $ABP$  заполняется дугами семейства кривых  $L(\gamma)$ ,  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ , согласно схеме, представленной на рисунке 3.

Точки  $A$  и  $B$  находятся в общем положении, поэтому кривые семейства  $S$  не могут пересекаться или касаться друг друга в точках отличных от  $A, B$ . Дуги кривых  $L(\gamma)$ ,  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ , заключенные между точками  $A$  и  $B$ , охватывают друг друга, а их длины  $L_{AB}(\gamma)$  представляют собой функцию, монотонно убывающую на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , со значениями на концах  $L_{AB}(0) = AP + BP$  и  $L_{AB}(\frac{\pi}{2}) = AB$ .

Участок  $AB$  исходной кривой по предположению является выпуклым, поэтому он целиком содержится в треугольнике  $ABP$  и его длина  $s$  лежит в пределах  $[AB, AP + BP]$ . Таким образом, среди кривых  $L(\gamma)$ ,  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ , найдется единственная кривая  $L(\gamma_0)$  с длиной дуги, равной  $s$ . При  $s > L_{AB}(\frac{\pi}{4})$  аппроксимирующая кривая представляет собой гиперболу, в случае  $s < L_{AB}(\frac{\pi}{4})$  кривая  $L(\gamma_0)$  является эллипсом, а равенство  $s = L_{AB}(\frac{\pi}{4})$  соответствует параболы. □

**Замечание.** Рассмотрим теперь произвольную достаточно гладкую кривую на плоскости с данной функцией кривизны  $k(s)$ , зависящей от длины дуги  $s$ .

Будем как и прежде предполагать, что значение параметра  $s_0 = 0$  соответствует началу координат  $A$ , а касательный вектор  $\tau_a$  в точке  $A$  сонаправлен с осью  $Ox$ . Для каждой точки  $B$ , соответствующей значению параметра  $s$  построим соприкасающуюся параболу и вычислим длину параболической дуги  $L_{AB}$ . Так как координаты точки  $B$  и касательного вектора  $\tau_b$  однозначно определяются по функции  $k(s)$ , то полученную длину  $L_{AB}$  можно понимать как функцию  $L(s)$  также зависящую от длины дуги исходной кривой. Если кривизна  $k_0$  в точке  $A$  положительна, то справедливо следующее представление:

$$L(s) = s + \frac{3k_0''k_0 - 5(k_0')^2 + 9k_0^4}{2160}s^5 + O(s^6), \quad s \rightarrow 0.$$

Таким образом, если величина  $3k_0''k_0 - 5(k_0')^2 + 9k_0^4$  положительна, то при достаточно малых  $s$  длина параболической дуги будет больше длины дуги исходной кривой, и при аппроксимации кривыми второго порядка с сохранением длины с некоторого момента (при  $s \rightarrow 0$ ) будут получаться исключительно эллипсы. Если же данная величина отрицательна, то длина параболической дуги будет меньше исходной длины  $s$  и при аппроксимации с сохранением длины будут получаться гиперболы.

**2.3. Сходимость изометрической аппроксимации.** Существование изометрической аппроксимации в классе кривых второго порядка порождает новый способ построения соприкасающейся квадррики. Рассмотрим дугу  $AB$  плоской кривой  $\Gamma$ , удовлетворяющую условиям теоремы 1, и введем на ней натуральную параметризацию  $\Gamma(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , в которой  $\Gamma(0) = A$ ,  $\Gamma(L) = B$ . Для каждого значения  $s \in (0, L]$  мы можем построить изометрическую аппроксимацию  $\Gamma_s$  а рассмотреть предел  $\lim_{s \rightarrow 0+0} \Gamma(s)$ .

**Теорема 2.** *Если существует предел  $\lim_{s \rightarrow 0+0} \Gamma(s) = \Gamma_0$ , лежащий в классе кривых второго порядка, то  $\Gamma_0$  является соприкасающейся квадррикой.*

*Доказательство.* Прежде чем доказывать данное утверждение, уточним его формулировку, касающуюся существования предела. Исходную кривую  $\Gamma$  (и каждую ее изометрическую аппроксимацию  $\Gamma_s$ ) в окрестности выбранной точки  $A$  можно понимать как график функции  $y = y(x)$  ( $y_s = y_s(x)$ ) в некоторой системе координат  $Axy$ , начало которой совпадает с фиксированным концом дуги  $AB$ . В этом случае под пределом  $\lim_{s \rightarrow 0+0} \Gamma(s) = \Gamma_0$  мы понимаем равномерную сходимость функций

$$y_s(x) \rightrightarrows y_0(x), \quad s \rightarrow 0+0$$

и их производных до четвертого порядка включительно

$$y_s^{(k)}(x) \rightrightarrows y_0^{(k)}(x), \quad s \rightarrow 0+0, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

на некотором отрезке  $[0, X]$ . Уточнив формулировку, перейдем теперь к доказательству.

Если переписать условия теоремы в терминах функций  $y(x)$  и  $y_s(x)$ , то для каждого значения параметра  $s$  мы получим равенства

$$y_s(0) = y(0), \quad y'_s(0) = y'(0), \quad y_s(x(s)) = y(x(s)), \quad y'_s(x(s)) = y'(x(s)),$$

в которых с помощью  $x(s)$  обозначена абсцисса свободного конца  $B_s$ . Изометрическое свойство аппроксимации гарантирует существование промежуточной

точки пересечения  $C_s \in \overline{AB}_s$ , где имеет место равенство функций  $y(x)$  и  $y_s(x)$ . Действительно, если бы дуги  $\overline{AB}_s$  и  $\overline{AB}$  пересекались лишь в концевых точках, то одна из них охватывала бы другую и в силу выпуклости была бы длиннее (см. [6]).

Используя теорему Ролля, мы приходим к равенству производных в концах  $A$  и  $B_s$ , а также двух промежуточных точках  $D_s \in \overline{AC}_s$  и  $E_s \in \overline{C_sB}_s$ . Повторное применение той же теоремы приводит нас к существованию промежуточных точек, в которых совпадают вторые, третьи и четвертые производные функций  $y(x)$  и  $y_s(x)$ . Переходя к пределу при  $s \rightarrow 0 + 0$ , получаем равенства

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}(0), \quad k = \overline{0, 4}.$$

Таким образом, предельная квадрака  $\Gamma_0$  является соприкасающейся. □

### 3. СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ КВАДРИКИ

Рассмотрим плоскую кривую  $\Gamma$  класса  $C^4$  и зафиксируем точку общего положения  $P$ , в которой кривизна отлична от нуля. Аппроксимирующие классы прямых линий и окружностей, представляя собой двух- и трехпараметрические семейства соответственно, позволяют локально приблизить данную кривую с погрешностью второго и третьего порядка малости. Если мы расширим приближающий класс до всех кривых второго порядка, то получим пять степеней свободы, за счет которых можно добиться пятого порядка аппроксимации.

В дальнейшем изложении мы будем использовать стандартные обозначения для касательного вектора  $\tau_p$ , кривизны  $k_0$  в точке  $P$ , а также производных кривизны  $k'_0$  и  $k''_0$  по длине дуги. Для удобства мы введем декартову систему координат, расположив ее начало в точку  $P$  и направив ось абсцисс вдоль вектора  $\tau_p$ . Существование кривой второго порядка  $\Gamma_p$ , проходящей через точку  $P$ , касающейся вектора  $\tau_p$  и обладающей теми же параметрами  $k_0$ ,  $k'_0$  и  $k''_0$ , наша цель — определить ее геометрические характеристики в терминах кривизны исходной кривой.

Идея построения заключается в следующем. Предположим сначала, что тройка  $k_0, k'_0$  и  $k''_0$  находится в общем положении и будем искать соприкасающийся эллипс или гиперболу. Класс кривых второго порядка, как уже отмечалось, обладает пятью степенями свободы, две из которых в наших условиях отсекаются условиями прохождения кривой через точку  $P$  и касанием вектора  $\tau_p$ . В качестве оставшихся трех параметров мы выберем величины фокальных радиусов точки  $P$  и угол между прямыми, содержащими фокальные радиусы, и вектором  $\tau_p$  (углы должны быть равными в силу оптического свойства). Выписав заявленные равенства, мы выведем систему уравнений, которая однозначно определяет значения всех параметров.

**3.1. Вычисление параметров аппроксимирующей кривой. Аппроксимирующий эллипс.** Обозначим буквами  $F_1$  и  $F_2$  фокусы искомого эллипса и рассмотрим каноническую систему координат  $Oe'_1e'_2$ , в которой  $O$  — середина отрезка  $F_1F_2$ , единичный вектор  $e'_1$  сонаправлен с вектором  $F_2F_1$ , а единичный вектор  $e'_2$  получен вращением  $e'_1$  против часовой стрелки на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Для однозначного восстановления системы координат (при указанных соглашениях остается свобода обозначения одного из фокусов буквами  $F_1$  или  $F_2$ ) мы дополнительно потребуем, чтобы ордината точки  $P$  в системе  $Oe'_1e'_2$  была

неположительна. Обозначим также фокальные радиусы точки  $P$  буквами  $r_1$ ,  $r_2$ , а угол между прямыми, содержащими фокальные радиусы, и касательным вектором  $\tau_P$  — буквой  $\delta$ .

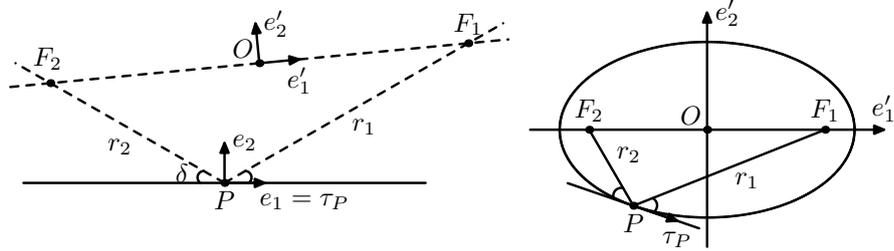


Рис. 4. Определение параметров аппроксимирующего эллипса

Выразим координаты точки  $P$  в системе  $Oe'_1e'_2$  и полуоси искомого эллипса через параметры  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\delta$ . В системе координат  $Pe_1e_2$  имеем:

$$PF_1 = r_1(\cos \delta, \sin \delta), \quad PF_2 = r_2(-\cos \delta, \sin \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2F_1 = \left( (r_1 + r_2) \cos \delta, (r_1 - r_2) \sin \delta \right), \quad PO = \frac{1}{2} \left( (r_1 - r_2) \cos \delta, (r_1 + r_2) \sin \delta \right).$$

Пусть  $2c$  — расстояние между фокусами, тогда

$$e'_1 = \frac{1}{2c} \left( (r_1 + r_2) \cos \delta, (r_1 - r_2) \sin \delta \right), \quad e'_2 = \frac{1}{2c} \left( (r_2 - r_1) \sin \delta, (r_1 + r_2) \cos \delta \right).$$

Окончательно получаем

$$x'_P = (OP, e'_1) = -(PO, e'_1) = \frac{1}{4c} \left( (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \delta + (r_2^2 - r_1^2) \sin^2 \delta \right) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c},$$

$$y'_P = (OP, e'_2) = -(PO, e'_2) = \frac{\cos \delta \sin \delta}{4c} \left( (r_1 - r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 \right) = -\frac{r_1 r_2 \sin 2\delta}{2c}.$$

Большая полуось эллипса  $a$  есть полусумма фокальных радиусов  $\frac{r_1+r_2}{2}$ , малую полуось  $b$  находим с помощью теоремы косинусов, примененной к треугольнику  $PF_1F_2$ :

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 - c^2 = \frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\pi - 2\delta))}{4} =$$

$$= \frac{2r_1 r_2 (1 - \cos 2\delta)}{4} = r_1 r_2 \sin^2 \delta \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta.$$

Вычислим также значение канонического параметра<sup>1</sup>  $\varphi$ , соответствующего точке  $P$ :

$$\begin{cases} a \cos \varphi = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c}, \\ b \sin \varphi = -\frac{r_1 r_2}{2c} \sin 2\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_1 + r_2}{2} \cos \varphi = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c}, \\ \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta \sin \varphi = -\frac{r_1 r_2}{2c} \sin 2\delta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{r_2 - r_1}{2c}, \quad \sin \varphi = -\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \delta.$$

<sup>1</sup>Под канонической параметризацией эллипса здесь и далее понимается описание  $\{(a \cos \varphi, b \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ .

Собирая все формулы, получаем:

$$(2) \quad a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad b = \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta, \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{r_2 - r_1}{2c}, \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \delta, \end{cases} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

**Аппроксимирующая гипербола.** Здесь мы будем использовать те же обозначения для параметров и канонической системы координат. В качестве дополнительного требования в данном случае выступает неотрицательность обеих координат точки  $P$  в системе  $Oe'_1e'_2$ .

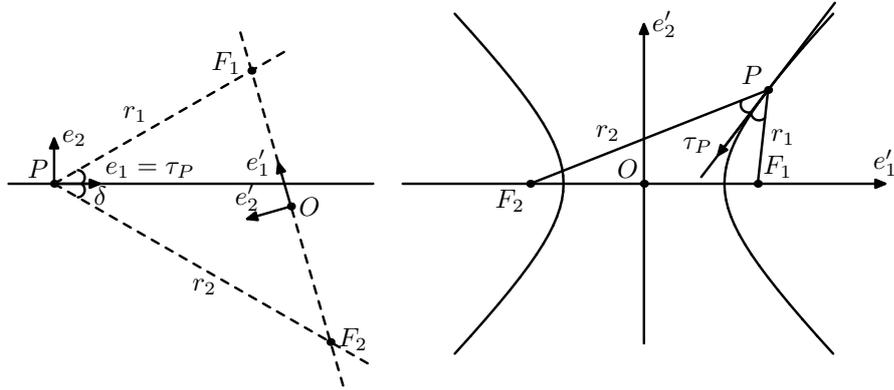


Рис. 5. Определение параметров аппроксимирующей гиперболы

В исходной системе координат  $Pe_1e_2$  имеем:

$$PF_1 = r_1(\cos \delta, \sin \delta), \quad PF_2 = r_2(\cos \delta, -\sin \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2F_1 = ((r_1 - r_2) \cos \delta, (r_1 + r_2) \sin \delta), \quad PO = \frac{1}{2}((r_1 + r_2) \cos \delta, (r_1 - r_2) \sin \delta).$$

Если  $2c$  – расстояние между фокусами, то

$$e'_1 = \frac{1}{2c}((r_1 - r_2) \cos \delta, (r_1 + r_2) \sin \delta), \quad e'_2 = \frac{1}{2c}(-(r_1 + r_2) \sin \delta, (r_1 - r_2) \cos \delta).$$

Аналогично случаю эллипса получаем координаты точки  $P$ :

$$x'_P = (OP, e'_1) = -(PO, e'_1) = -\frac{1}{4c}((r_1^2 - r_2^2) \cos^2 \delta + (r_1^2 - r_2^2) \sin^2 \delta) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c},$$

$$y'_P = (OP, e'_2) = -(PO, e'_2) = \frac{\cos \delta \sin \delta}{4c}((r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2) = \frac{r_1 r_2 \sin 2\delta}{2c}.$$

Действительная полуось гиперболы  $a$  есть полуразность фокальных радиусов  $\frac{r_2 - r_1}{2}$ , мнимую полуось  $b$  находим по теореме косинусов для треугольника  $PF_1F_2$ :

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 = c^2 - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 = \frac{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\delta) - (r_2 - r_1)^2}{4} = \\ &= \frac{2r_1 r_2 (1 - \cos 2\delta)}{4} = r_1 r_2 \sin^2 \delta \Rightarrow b = \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta. \end{aligned}$$

Вычислим также значение канонического параметра<sup>2</sup>  $t$ , соответствующего точке  $P$ :

$$\begin{cases} a \operatorname{ch} t = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c}, \\ b \operatorname{sh} t = \frac{r_1 r_2}{2c} \sin 2\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_2 - r_1}{2} \operatorname{ch} t = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4c}, \\ \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta \operatorname{sh} t = \frac{r_1 r_2}{2c} \sin 2\delta \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{ch} t = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \delta.$$

Собирая все формулы, получаем:

$$(3) \quad a = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad b = \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta, \quad \begin{cases} \operatorname{ch} t = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \\ \operatorname{sh} t = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \delta, \end{cases} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

**3.2. Вычисление кривизны и ее производных.** В данном параграфе мы найдем кривизну квадрики в произвольной точке и ее первые производные по длине дуги, выразив их значения через параметры канонического описания. Смысл, который мы вкладываем в это словосочетание, для гиперболы и эллипса мы уже обсуждали. В случае параболы мы будем подразумевать ее представление в виде

$$\{(x, y) \mid y = ax^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим каждый тип невырожденной квадрики по отдельности.

**Эллипс.** Пусть  $\rho = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$  — радиус-вектор произвольной точки  $P$ , тогда

$$\rho'_\varphi = (-a \sin \varphi, b \cos \varphi), \quad \rho''_\varphi = (-a \cos \varphi, -b \sin \varphi).$$

Кривизна эллипса может быть найдена по стандартной формуле

$$(4) \quad k = \frac{|\rho'_\varphi, \rho''_\varphi|}{|\rho'_\varphi|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Организуем вычисление ее производной по длине дуги  $k'_s$ , используя композицию функций:

$$k'_s = k'_\varphi \cdot \varphi'_s = k'_\varphi \cdot \frac{1}{s'_\varphi} = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin 2\varphi}{2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^3}.$$

Равенство (4) позволяет значительно упростить полученное выражение:

$$(5) \quad k'_s = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin 2\varphi}{2} \cdot \left(\frac{k}{ab}\right)^2 = \frac{3(b^2 - a^2)k^2}{2ab} \cdot \sin 2\varphi.$$

Продифференцировав уравнение (5), найдем вторую производную:

$$\begin{aligned} k''_{ss} &= \frac{3(b^2 - a^2)}{2ab} (2k^2 \cos 2\varphi \cdot \varphi'_s + 2kk'_s \sin 2\varphi) = \\ &= \frac{3(b^2 - a^2)}{ab} \left( \frac{k^2 \cos 2\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + kk'_s \sin 2\varphi \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое мы упростим с помощью (5):

<sup>2</sup>Под канонической параметризацией гиперболы здесь и далее понимается описание  $\{(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t), -\infty < t < +\infty\}$ , причем параметр  $a$  может быть как положительным, так и отрицательным.

$$(6) \quad k''_{ss} = \frac{3(b^2 - a^2)k^2}{ab} \cdot \frac{\cos 2\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{(k'_s)^2}{k}.$$

**Гипербола.** Рассмотрим каноническую систему координат гиперболы и вычислим значение кривизны и ее производных в точке  $P(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ . Обозначим через  $\rho$  радиус-вектор точки  $P$ , тогда

$$\rho = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t) \Rightarrow \rho' = (a \operatorname{sh} t, b \operatorname{ch} t), \quad \rho'' = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t).$$

Кривизну гиперболы находим по той же формуле

$$(7) \quad k = \frac{|\rho', \rho''|}{|\rho'|^3} = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычислим производную кривизны  $k'_s$ :

$$k'_s = k'_t \cdot t'_s = \frac{-3ab(a^2 + b^2) \operatorname{sh} 2t}{2(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^3}.$$

Используя выражение (7), мы можем выразить производную следующим образом:

$$(8) \quad k'_s = \frac{-3ab(a^2 + b^2) \operatorname{sh} 2t}{2} \cdot \left(\frac{k}{ab}\right)^2 = -\frac{3(a^2 + b^2)k^2}{2ab} \cdot \operatorname{sh} 2t.$$

Продифференцировав выражение (8), найдем вторую производную:

$$\begin{aligned} k''_{ss} &= -\frac{3(a^2 + b^2)}{2ab} (2k^2 \operatorname{ch} 2t \cdot t'_s + 2kk'_s \operatorname{sh} 2t) = \\ &= -\frac{3(a^2 + b^2)}{ab} \left( \frac{k^2 \operatorname{ch} 2t}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{\frac{1}{2}}} + kk'_s \operatorname{sh} 2t \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое мы можем упростить с помощью (8):

$$(9) \quad k''_{ss} = -\frac{3(a^2 + b^2)k^2}{ab} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2t}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{(k'_s)^2}{k}.$$

**Парабола.** Рассмотрим каноническую систему для параболы, в которой она имеет вид  $y = ax^2$ , и вычислим значение кривизны и ее производной в точке  $P(x, ax^2)$ . Обозначим через  $\rho$  радиус-вектор точки  $P$ , тогда

$$\rho = (x, ax^2) \Rightarrow \rho' = (1, 2ax), \quad \rho'' = (0, 2a).$$

Кривизну параболы находим по той же формуле

$$(10) \quad k = \frac{|\rho', \rho''|}{|\rho'|^3} = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычислим производную кривизны  $k'_s$ :

$$(11) \quad k'_s = k'_x \cdot x'_s = k'_x \cdot \frac{1}{s'_x} = 2a \frac{-\frac{3}{2}8a^2x}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}} = -6axk^2.$$

После вычисления кривизны и ее производных в канонической системе координат мы можем выразить их значения, в случае эллипса и гиперболы, через выбранные параметры — фокальные радиусы  $r_1, r_2$  и угол  $\delta$ .

**Эллипс.** Прежде всего отметим, что  $s'_\varphi = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{r_1 r_2}$ . Комбинируя уравнения (2), (4), получаем

$$(12) \quad k = ab \cdot \frac{1}{(s'_\varphi)^3} = \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta \cdot \frac{1}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r_1 + r_2}{2r_1 r_2} \sin \delta$$

Теперь преобразуем уравнение (5), используя те же равенства (2):

$$(13) \quad \begin{aligned} k'_s &= -3k^2 \frac{c^2}{ab} \sin \varphi \cos \varphi = -3k^2 \frac{c^2}{\frac{r_1+r_2}{2} \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta} \frac{-\sqrt{r_1 r_2} r_2 - r_1}{c} \cos \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow k'_s = \frac{3k^2(r_2 - r_1)}{(r_1 + r_2) \operatorname{tg} \delta}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем выражения (6) для второй производной:

$$(14) \quad \begin{aligned} k''_{ss} &= -3k^2 \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{r_1 r_2}} + 2 \frac{(k'_s)^2}{k} = -3k^2 \frac{c^2}{\frac{r_1+r_2}{2} \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(r_2 - r_1)^2}{4c^2} - \frac{r_1 r_2}{c^2} \cos^2 \delta \right) + \frac{2(k'_s)^2}{k} = -3k^2 \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 (1 + \cos^2 \delta)}{2r_1 r_2 (r_1 + r_2) \sin \delta} + \frac{2(k'_s)^2}{k}. \end{aligned}$$

**Гипербола.** Как и в случае эллипса,  $s'_t = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} = \sqrt{r_1 r_2}$ . Используя уравнения (3), (7), выводим:

$$(15) \quad k = ab \cdot \frac{1}{(s'_t)^3} = \frac{r_2 - r_1}{2} \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta \cdot \frac{1}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r_2 - r_1}{2r_1 r_2} \sin \delta.$$

Теперь последовательно перепишем выражения для производных кривизны:

$$(16) \quad k'_s = -3k^2 \frac{c^2}{\frac{r_2-r_1}{2} \sqrt{r_1 r_2} \sin \delta} \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \delta \frac{r_1 + r_2}{2c} = \frac{3k^2(r_1 + r_2)}{(r_1 - r_2) \operatorname{tg} \delta}.$$

$$(17) \quad k''_{ss} = -3k^2 \frac{(r_1 - r_2)^2 + 4r_1 r_2 (1 + \cos^2 \delta)}{2r_1 r_2 (r_2 - r_1) \sin \delta} + 2 \frac{(k'_s)^2}{k}$$

**3.3. Определение параметров аппроксимирующей квадрики.** Зафиксируем числа  $k_0 \neq 0$ ,  $k'_0$ ,  $k''_0$  и выпишем системы уравнений относительно параметров  $r_1, r_2, \delta$ , которые необходимо решить в случае аппроксимирующего эллипса или аппроксимирующей гиперболы<sup>3</sup>:

$$(18) \quad \begin{cases} k_0 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1 r_2} \sin \delta, & k'_0 = \frac{3k_0^2(r_2 - r_1)}{(r_1 + r_2) \operatorname{tg} \delta} \\ k''_0 = -3k_0^2 \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 (1 + \cos^2 \delta)}{2r_1 r_2 (r_1 + r_2) \sin \delta} + 2 \frac{(k'_0)^2}{k_0} \end{cases} \quad (\text{эллипс}),$$

$$\begin{cases} k_0 = \frac{r_2 - r_1}{2r_1 r_2} \sin \delta, & k'_0 = \frac{3k_0^2(r_1 + r_2)}{(r_1 - r_2) \operatorname{tg} \delta} \\ k''_0 = -3k_0^2 \frac{(r_1 - r_2)^2 + 4r_1 r_2 (1 + \cos^2 \delta)}{2r_1 r_2 (r_2 - r_1) \sin \delta} + 2 \frac{(k'_0)^2}{k_0} \end{cases} \quad (\text{гипербола}).$$

<sup>3</sup>В дальнейшем мы будем считать, что  $k'_0 \geq 0$ , так как знак производной зависит от направления движения по кривой.

Заметим, что вторая система получается из первой заменой переменных

$$r_1 \mapsto r_1, r_2 \mapsto -r_2, \delta \mapsto \pi - \delta,$$

поэтому мы будем рассматривать только первую, соответствующую эллипсу. Прежде чем переходить к решению системы в общем виде, разберем несколько частных случаев.

1.  $k'_0 = 0, k''_0 = 0$ . В этом случае аппроксимирующей кривой может быть только окружность. При этом система уравнений для эллипса, как и положено, приводит к равенствам

$$\cos \delta = 0, \quad r_1 = r_2 = R, \quad k_0 = \frac{1}{R},$$

а система для гиперболы оказывается несовместной.

2.  $k'_0 = 0, k''_0 \neq 0$ . В этом случае аппроксимирующая квадратика существует и единственна, а ее тип зависит от соотношения чисел  $k_0$  и  $k''_0$ . Ниже мы представим зависимость типа от безразмерной величины  $x = k''_0/k_0^3$ .

Для эллипса равенство  $k'_0 = 0$  имеет место в вершинах, в которых величина  $x$  (см. (4), (5), (6)) может принимать следующие значения:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} : k_0 = \frac{b}{a^2}, k''_0 = \frac{3(a^2 - b^2)b}{a^6} \Rightarrow x = 3 \cdot \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \in (0, +\infty);$$

$$\varphi = 0, \pi : k_0 = \frac{a}{b^2}, k''_0 = \frac{-3(a^2 - b^2)a}{b^6} \Rightarrow x = -3 \cdot \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \in (-3, 0).$$

Производная кривизны гиперболы обращается в нуль также в вершинах, где величина  $x$  является ограниченной сверху (см. (7), (8), (9))

$$t = 0 : k_0 = \frac{a}{b^2}, k''_0 = \frac{-3(a^2 + b^2)a}{b^6} \Rightarrow x = -3 \cdot \left( \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) \in (-\infty, -3).$$

В случае параболы равенство  $k'_0 = 0$  влечет за собой соотношение  $x = -3$  (см. (22)). Таким образом, мы можем резюмировать в виде таблицы все сказанное относительно типа аппроксимирующей квадратки

Гипербола	Парабола	Эллипс
$x < -3$	$x = -3$	$x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$

и утверждать ее единственность.

Рассмотрим теперь общий случай, когда  $k_0 > 0, k'_0 > 0, k''_0$  — произвольное число, и попробуем подобрать параметры, удовлетворяющие левой системе (18). Первые два уравнения позволяют выразить  $r_1, r_2$  через угол  $\delta$ . Действительно, перейдем к системе, состоящей из первого уравнения и произведения двух уравнений:

$$\begin{cases} k_0 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1r_2} \sin \delta, \\ k'_0 = \frac{3k_0^2(r_2 - r_1)}{(r_1 + r_2) \operatorname{tg} \delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1r_2} \sin \delta, \\ k'_0 k_0 = \frac{3k_0^2(r_2 - r_1) \cos \delta}{2r_1r_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_1 + r_2}{r_1r_2} = \frac{2k_0}{\sin \delta}, \\ \frac{r_2 - r_1}{r_1r_2} = \frac{2k'_0}{3k_0 \cos \delta}. \end{cases}$$

Чтобы упростить выкладки, обозначим правые части получившихся уравнений буквами  $u$  и  $v$  соответственно, тогда

$$\begin{cases} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = u, \\ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} = \frac{u}{v}, \\ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{u-v}{u+v} r_2, \\ r_2 - \frac{u-v}{u+v} r_2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{2}{u+v}, \\ r_2 = \frac{2}{u-v} \end{cases}$$

Таким образом, наша система при  $u \neq v$  имеет следующее решение:

$$\begin{cases} r_2 = \frac{2}{u-v} = \frac{1}{\frac{k_0}{\sin \delta} - \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}} \\ r_1 = \frac{2}{u+v} = \frac{1}{\frac{k_0}{\sin \delta} + \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{\frac{2k_0}{\sin \delta}}{\left(\frac{k_0}{\sin \delta}\right)^2 - \left(\frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}\right)^2} \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{\left(\frac{k_0}{\sin \delta}\right)^2 - \left(\frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}\right)^2} \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в третье уравнение левой системы (18):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3k_0^2} \left( k_0'' - 2 \frac{(k'_0)^2}{k_0} \right) &= \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 (1 + \cos^2 \delta)}{2r_1 r_2 (r_1 + r_2) \sin \delta} = \\ &= \frac{\left(\frac{2k_0}{\sin \delta}\right)^2 - 4 \left( \left(\frac{k_0}{\sin \delta}\right)^2 - \left(\frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}\right)^2 \right) (1 + \cos^2 \delta)}{2 \left(\frac{2k_0}{\sin \delta}\right) \sin \delta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3k_0} \left( k_0'' - 2 \frac{(k'_0)^2}{k_0} \right) &= k_0^2 \left( 1 - \frac{1}{\sin^2 \delta} \right) + \left( \frac{k'_0}{3k_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \delta} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{k_0}{\sin \delta} \right)^2 - \left( \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta} \right)^2 &= \frac{3k_0 k_0'' - 5(k'_0)^2 + 9k_0^4}{9k_0^2} \end{aligned}$$

Так как функция  $\left(\frac{k_0}{\sin \delta}\right)^2 - \left(\frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}\right)^2$  монотонно убывает на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  и принимает все действительные значения, то полученное уравнение имеет единственное решение  $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Итак, для эллипса и гиперболы мы имеем две различные системы для фокальных радиусов

$$(19) \quad \begin{cases} \text{эллипс} \\ r_2 = \frac{1}{\frac{k_0}{\sin \delta} - \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}} \\ r_1 = \frac{1}{\frac{k_0}{\sin \delta} + \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{гипербола} \\ r_2 = \frac{1}{\frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta} - \frac{k_0}{\sin \delta}} \\ r_1 = \frac{1}{\frac{k_0}{\sin \delta} + \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta}} \end{cases}$$

и одно общее уравнение для угла  $\delta$ :

$$(20) \quad \left( \frac{k_0}{\sin \delta} \right)^2 - \left( \frac{k'_0}{3k_0 \cos \delta} \right)^2 = \frac{3k_0 k_0'' - 5(k'_0)^2 + 9k_0^4}{9k_0^2}.$$

Если правая часть этого уравнения положительна, то существует единственный эллипс, с заданными  $k_0, k'_0, k_0''$ ; если отрицательна — единственная гипербола.

Уравнение  $3k_0 k_0'' - 5(k'_0)^2 + 9k_0^4 = 0$  соответствует параболическому случаю (см. (22)). Покажем, что в этом случае можно подобрать аппроксимирующую

параболу. Для этого достаточно показать, что для любых чисел  $k_0 > 0, k'_0 > 0$  существуют числа  $a, x$  удовлетворяющие системе уравнений (10),(11). Найдем ее явное решение:

$$\begin{cases} k_0 = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ k'_0 = -6axk_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{(9k_0^4 + (k'_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{54k_0^5}, \quad x = -\frac{9k'_0k_0^3}{(9k_0^4 + (k'_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Объединим полученные результаты и сформулируем общее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $P$  – некоторая точка кривой  $\Gamma$  класса гладкости  $C^4$ , в которой кривизна и ее первые две производные по длине дуги равны соответственно  $k_0 > 0, k'_0$  и  $k''_0$ . Тогда существует единственная соприкасающаяся квадрика  $\Gamma_p$ , тип которой определяется знаком выражения  $3k''_0k_0 - 5(k'_0)^2 + 9k_0^4$ .

**3.4. Характеристическое уравнение кривизны квадрик.** Используя описанную технику, мы можем получить дифференциальное уравнение относительно кривизны квадрики как функции длины дуги (эквивалентное уравнению (21) из работы [4]). Несмотря на то, что уравнение было открыто в самом начале 20 века и относится к классической дифференциальной геометрии, оно, по мнению автора, остается малоизвестным и заслуживает дополнительного освещения.

**Эллипс/гипербола.** Для вывода этого уравнения относительно кривизны эллипса обратимся еще раз к равенству (6), продифференцируем его длине дуги и преобразуем в соответствии с равенствами (4)-(6):

$$\begin{aligned} k^{(3)} = \frac{3(b^2 - a^2)}{ab} \cdot \left( \frac{\cos 2\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} 2kk' - \frac{2k^2 \sin 2\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{(b^2 - a^2)k^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi}{2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \right) + 2 \frac{2kk'k'' - (k')^3}{k^2} = \frac{2k'}{k} \left( k'' - \frac{2(k')^2}{k} \right) - \\ - \frac{4k'}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \frac{k'}{3k} \left( k'' - \frac{2(k')^2}{k} \right) + 2 \frac{2kk'k'' - (k')^3}{k^2}. \end{aligned}$$

Используя уравнение (20), мы можем избавиться от параметров  $a, b$  и  $\varphi$  и получить уравнение, не зависящему от конкретных значений этих параметров:

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = r_1 \cdot r_2 = \frac{9k^2}{3kk'' - 5(k')^2 + 9k^4} \Rightarrow \\ k^{(3)} = \frac{7k'}{3k} \left( k'' - \frac{2(k')^2}{k} \right) - 4k' \cdot \frac{3kk'' - 5(k')^2 + 9k^4}{9k^2} + 2 \frac{2kk'k'' - (k')^3}{k^2} \Rightarrow \\ (21) \quad k^{(3)} = \frac{k'(45kk'' - 40(k')^2 - 36k^4)}{9k^2} \Leftrightarrow 9k^2k^{(3)} = k'(45kk'' - 40(k')^2 - 36k^4). \end{aligned}$$

Для гиперболы аналогичный вывод приводит к тому же уравнению.

**Парабола.** Вторая производная кривизны параболы выражается через  $k$  и  $k'$ . Действительно, продифференцируем равенство (11) по длине дуги:

$$k''_{ss} = -6a \left( \frac{k^2}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}} + 2xkk'_s \right) = \frac{-6ak^2}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{(k'_s)^2}{k}.$$

Домножим получившееся уравнение на  $k$  и исключим параметр  $a$  с помощью уравнения (10):

$$\begin{aligned}kk''_{ss} &= 2(k'_s)^2 - 3k^3 \cdot \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= 2(k'_s)^2 - 3k^3 \cdot \frac{k(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2(k'_s)^2 - 3k^4(1+4a^2x^2).\end{aligned}$$

Выразим  $ax$  из уравнения (11) и подставим в последнее равенство:

$$kk''_{ss} = 2(k'_s)^2 - 3k^4 \left(1 + 4 \cdot \frac{(k'_s)^2}{36k^4}\right) = \frac{5(k'_s)^2}{3} - 3k^4.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение для кривизны параболы имеет вид

$$(22) \quad 3k''k - 5(k')^2 + 9k^4 = 0.$$

Покажем, что кривизна параболы удовлетворяет также полученному ранее уравнению (21). Для этого выразим из последнего уравнения вторую производную и найдем третью:

$$k'' = \frac{5(k')^2 - 9k^4}{3k} \Rightarrow k^{(3)} = \frac{k'(10kk'' - 5(k')^2 - 27k^4)}{3k^2}.$$

Разложив дробь на две составляющих

$$k^{(3)} = \frac{k'(45kk'' - 40(k')^2 - 36k^4)}{9k^2} - \frac{5(3k''k - 5(k')^2 + 9k^4)}{9k^2},$$

мы видим, что вторая компонента (в случае параболы) равна нулю и, следовательно, кривизна удовлетворяет уравнению (21). Заметим, что постоянная кривизна также является решением этого уравнения, поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Для того, чтобы функция  $k$ ,  $k \in C^3(\mathbb{R})$ , была функцией кривизны некоторой квадрики, зависящей от натурального параметра, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$9k^2k^{(3)} = k'(45kk'' - 40(k')^2 - 36k^4).$$

При этом тип невырожденного решения (случаи эллипса, гиперболы или параболы) определяются начальными данными  $k_0, k'_0, k''_0$  в соответствии с таблицей

$3k''_0k_0 - 5(k'_0)^2 + 9k_0^4$	$> 0$	$< 0$	$= 0$
Квадрика	Эллипс	Гипербола	Парабола

*Доказательство.* Необходимость была обоснована выше, покажем достаточность утверждения. Для этого рассмотрим некоторую  $C^3$ -гладкую функцию  $f(s)$ , определенную на интервале  $(a, b)$  и удовлетворяющую нашему уравнению. Если она отлична от нуля во всех точках интервала, то по теореме единственности для ДУ она должна совпадать с кривизной некоторой квадрики. Покажем, что если найдется точка  $s_0$ , в которой  $f(s)$  равна нулю, то функция  $f(s)$  должна быть тождественно нулевой. Предположим противное: существует  $s_1$ , в которой  $f(s_1) \neq 0$  и выберем ближайший к ней нуль функции  $s_2$  (для определенности  $s_2 > s_1$ ). Определим

$$k_0 = f(s_1), k'_0 = f'(s_1), k''_0 = f''(s_1)$$

и построим квадртку с кривизной  $k(s)$  и заданными начальными условиями. Теперь рассмотрим множество  $M = \{s \in [s_1, s_2) \mid k(s) = f(s), k'(s) = f'(s), k''(s) = f''(s)\}$ . По теореме единственности для ДУ оно открыто, по непрерывности функций  $f$  и  $k$  оно замкнуто, а поскольку  $f(s_1) = k(s_1)$ , то оно непусто. Таким образом,  $M$  является открыто-замкнутым и из связности полуинтервала  $[s_1, s_2)$  следует равенство  $M = [s_1, s_2)$ . Еще раз используя непрерывность  $f$  и  $k$ , приходим к равенству  $f(s_2) = k(s_2)$ . Так как кривизна квадртки отлична от нуля, то  $f(s_2) \neq 0$ , что противоречит предположению относительно расположения точки  $s_2$ <sup>4</sup>.  $\square$

**Замечание.** 1) Знак выражения  $3k_0''k_0 - 5(k_0')^2 + 9k_0^4$  служит критерием периодичности решения дифференциального уравнения (21). В случае эллипса мы можем, используя равенство (20) для нахождения параметра  $\delta$  и систему (19) для определения фокальных радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , восстановить полуоси эллипса с помощью формул (2). Таким образом, может быть найден период решения, равный длине эллипса и зависящий от начальных данных  $k_0$ ,  $k_0'$  и  $k_0''$ .

2) Если на кривых  $\Gamma$  и  $\Gamma_p$  выбрать натуральную параметризацию, при которой начальное положение  $s = 0$  соответствует точке  $P$ , то погрешность аппроксимации будет бесконечно малой величиной 5-го порядка:

$$|\Gamma(s) - \Gamma_p(s)| = O(s^5), \quad s \rightarrow 0.$$

Полученное ранее характеристическое дифференциальное уравнение позволяет определить на кривой точки *сверхкасания*, в которых порядок аппроксимации будет строго больше 5. Для сверхкасания необходимо совпадение третьих производных кривизн исходной линии и соприкасающейся квадртки. Последнее возможно, если кривизна исходной линии удовлетворяет (в точке) характеристическому уравнению (21).

Автор выражает глубокую признательность Сабитову И.Х. за постановку задачи и искреннюю заинтересованность в ее решении, многочисленные консультации и ценные замечания.

#### REFERENCES

- [1] I. Kh. Sabitov, A.V. Slovesnov, *Approximation of plane curves by circular arcs*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **50**:8 (2010), 1347–1356. MR2761737
- [2] G.M. Fichtengolts, *Differential and integral calculus. I*, Moscow: Fizmatlit, 1962.
- [3] Su Buchin, *Affine Differential Geometry*, Beijing: Science Press, 1983. Zbl 0539.53002
- [4] R. Perrin, *Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **31** (1903), 54–64. MR1504438
- [5] E. Ghys, S. Tabachnikov, V. Timorin, *Osculating curves: around the Tait-Kneser theorem*, The Mathematical Intelligencer, **35**:1 (2013), 61–66. MR3041992
- [6] M.Ya. Vygodskii, *Differential Geometry*, Moscow: GITTL, 1949.

<sup>4</sup>Как заметил И.Х. Сабитов, характеристическое уравнение заменой  $k = u^{-\frac{3}{2}}$  сводится к уравнению более простого вида  $u''' = 2u^{-2}$ , решение которого связано с эллиптическими функциями. Представляется, что это интересное наблюдение может привести к установлению новых связей между теорией эллиптических функций и дифференциальными уравнениями.

ALEXANDR VICTOROVICH SLOVESNOV  
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,  
1, LENINSKIE GORY,  
MOSCOW, 119991, RUSSIA  
*E-mail address:* alexslovesnov@narod.ru