S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1595–1604 (2018) УДК 512.542

DOI 10.33048/semi.2018.15.132 MSC 20D06, 20B15,20D30, 20E28

УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА ДЛЯ ПРИМИТИВНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИЕВЫХ ТИПОВ G_2, F_4 И E_6

В.В. КОРАБЛЕВА

Abstract. For a finite group G, subgroups M_1 and M_2 of G and any $i \in \mathbb{N}$, the subgroups $(M_1, M_2)^i$ and $(M_2, M_1)^i$ of $M_1 \cap M_2$ are defined, inductively on i, as follows:

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1},\ (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2},$$

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_2, M_1)^i)_{M_1},\ (M_2, M_1)^{i+1} = (M_1, M_2)^i_{M_2}.$$

Here, for $H \leq G$, H_G denotes $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Denote by Π the set of all triples (G, M_1, M_2) such that G is a finite group, M_1 and M_2 are distinct conjugate maximal subgroups of G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$, and $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. The triples (G, M_1, M_2) and (G', M_1', M_2') from Π are equivalent if there exists an isomorphism from G to G' mapping M_1 to M_1' and M_2 to M_2'. The present paper is a continuation of the investigations by A.S. Kondrat'ev and V.I. Trofimov on a description of the set Π. It is obtained the description up to equivalence all triples (G, M_1, M_2) from Π in the case when G is a finite simple group of Lie type G_2, F_4 or E_6, and M_1 is a parabolic maximal subgroup of G.

Keywords: finite simple group of Lie type, primitive parabolic permutation representation, maximal subgroup, mutual cores, strong version of Sims conjecture.

Korableva, V.V., A strong version of the Sims conjecture for primitive parabolic permutation representations of finite simple groups Lie types G_2, F_4 and E_6.

© 2018 Кораблева В.В.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061-П).

Поступила 1 октября 2018 г., опубликована 7 декабря 2018 г.

1. Введение

Следуя [2], для конечной группы G, подгрупп M_1 и M_2 из G и любого $i \in \mathbb{N}$ индукцией по i следующим образом определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из пересечения $M_1 \cap M_2$, называемые i-ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2},$$

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_2, M_1)^i)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i)_{M_2}.$$

Напомним, что подгруппа $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ называется ядром подгруппы H группы G.

В [2] была установлена справедливость следующей усиленной версии гипотезы Симса: *если G – конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, то подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G.*

В 2014 г. А.С. Кондратьев и В.И. Трофимов (см. [3]) поставили задачу описания множества Π всех троек (G, M_1, M_2) таких, что G — конечная группа, M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. При этом тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π считаются эквивалентными, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Отметим, что если $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, то произведение $(M_1, M_2)^2(M_2, M_1)^2$ является p-группой для некоторого простого числа p (см. [3, Ч. I, предложение 1.1(a)]). Решение данной задачи существенно усилит результаты из [2]. В [3] рассмотрены следующие случаи этой задачи: группа G не является почти простой группой; группа G имеет простой знакопеременный цоколь; группа G имеет простой цоколь $Soc(G)$ лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — непараболическая подгруппа в $Soc(G)$.

Автор продолжает работу в этом направлении и исследует случай, когда G — простая группа исключительного лиева типа и M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G.

В данной работе построены ряды

$$1 = (M_1, M_2)^s < \ldots < (M_1, M_2)^2 < O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1)$$

и

$$1 = (M_2, M_1)^m < \ldots < (M_2, M_1)^2 < O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2)$$

для всех троек $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, где G — группа $G_2(q)$, $F_4(q)$ или $E_6(q)$ для степени q простого числа p и M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G.

Каждый член этих рядов порождается корневыми подгруппами группы G, а соответствующие корни для этих подгрупп явно выписываются. Для вычислений привлекалась компьютерная система *GAP* (см. [10]). Использовались результаты автора [4, 5, 6].

Основной результат работы — описание с точностью до эквивалентности всех троек (G, M_1, M_2) из Π в случае, когда G — конечная простая группа лиева типа G_2, F_4 или E_6 и M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G. В параграфах 2, 3, 4 сформулированы и доказаны теоремы 1, 2, 3, в которых рассмотрены лиевы типы F_4, E_6, G_2 соответственно.

Используемые в дальнейшем обозначения из общей теории групп в основном стандартны, их можно найти в [9]. Напомним некоторые из них. Если A и B группы, то через $A.B$ (соответственно $A : B$) обозначается расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы A с помощью группы B, через A^m обозначается прямое произведение m групп, каждая из которых изоморфна группе A. При обозначении групп через m обозначается циклическая группа порядка m.

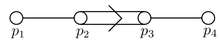
Определения и обозначения, связанные с группами лиева типа, взяты из [7]. Пусть G — конечная простая группа лиева типа над конечным полем $GF(p^n)$ характеристики p, W — ее группа Вейля, H — ее подгруппа Картана, Φ — ее система корней, $\pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ — множество простых корней в Φ и Φ^+ — множество положительных корней в Φ относительно π. Известно, что $G = \langle x_r(a) \mid a \in GF(p^n), r \in \Phi\rangle$ и для любого корня $r \in \Phi$ корневая подгруппа $X_r = \{x_r(a) \mid a \in GF(p^n)\}$ изоморфна аддитивной группе поля $GF(p^n)$. Для любого корня r из Φ элемент $n_r(a)$ группы G задается равенством $n_r(a) = x_r(a) \cdot x_{-r}(-a^{-1}) \cdot x_r(a)$. Пусть $N = \langle H, n_r(1) \mid r \in \Phi\rangle$, где H — подгруппа Картана в G. Существует гомоморфизм φ из N на W такой, что $\phi(n_r) = w_r$ для всех $r \in \Phi$. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа H. Таким образом, $N/H \cong W$. Для любого $k \in \{1, \dots, l\}$ обозначим через Φ_k множество корней из Φ, натянутых на $\pi \setminus \{p_k\}$, и положим $\Phi_k^+ = \Phi^+ \cap \Phi_k$. В группе G имеется с точностью до сопряжения l параболических максимальных подгрупп P_k $(1 \le k \le l)$. Известно разложение Леви группы P_k: $P_k = U_k L_k$, где $U_k = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_k^+\rangle$ — унипотентный радикал и $L_k = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_k\rangle$ — дополнение Леви в P_k.

Рассмотрим представление группы G подстановками множества Γ левых смежных классов группы G по подгруппе P_k, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс hP_k в ghP_k. Стабилизатором точки $P_k \in \Gamma$ при действии группы G на Γ является подгруппа P_k. Рассмотрим теперь действие группы P_k на множестве Γ. Орбиты Γ_j при этом действии P_k на Γ имеют вид $\Gamma_j = \{hP_k \mid h \in P_k h_j P_k\}$, где $G = \bigcup_{j=1}^{b} P_k h_j P_k$. Стабилизатором точки $hP_k \in \Gamma$ при действии группы P_k на Γ является пересечение двух подгрупп: P_k и стабилизатора точки hP_k в группе G, т. е. $P_k \cap hP_k h^{-1}$.

Будем обозначать порождающие фундаментальные отражения w_{p_j} группы Вейля W через $[j]$, $1 \le j \le l$. Тогда каждый элемент w из W, представленный в виде произведения $w = w_{p_{i_1}} w_{p_{i_2}} ... w_{p_{i_s}}$ фундаментальных отражений, можно записать в виде $[i_1 i_2 \dots i_s]$, и в такой записи $[\ ]$ — единица из W. Действие сопряжением элемента n_r на множестве $\{X_s \mid s \in \Phi\}$ можно отождествить с действием элемента w_r из W на множестве Φ; при этом подгруппу $n_r X_s n_r^{-1}$ будем обозначать через $w_r X_s w_r^{-1}$ или ${}^{w_r}X_s$. В группе W будем рассматривать подгруппы $W_k = \langle [i] \mid 1 \le i \le l, i \ne k\rangle$. Для любого $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ существует биективное отображение $P_k \setminus G/P_k \mapsto W_k \setminus W/W_k$ множества двойных смежных классов группы G по параболической подгруппе P_k на множество двойных смежных классов ее группы Вейля W по подгруппе W_k. При этом отображении классу $P_k n_r P_k$ из $P_k \setminus G/P_k$ соответствует класс $W_k w_r W_k$ из $W_k \setminus W/W_k$. Можно получить разложение $W = \bigcup_{j=1}^{b} W_k y_j W_k$ группы W на двойные смежные классы по подгруппе W_k, где каждый представитель y_j является единственным элементом в классе $W_k y_j W_k$, который имеет наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений (см. [8, 12.7.3]). Эти элементы y_j и будем использовать для нахождения подгрупп $M_2 = yM_1y^{-1}$, $M_1 \cap M_2$, $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$, $i \in \mathbb{N}$.

2. $G = F_4(p^n)$

Система корней Φ типа F_4 с диаграммой Дынкина



имеет множество положительных корней Φ^+, состоящее из элементов (см. [1])

$$\begin{array}{lll}
r_1 = p_1, & r_9 = p_2 + 2p_3, & r_{17} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4, \\
r_2 = p_2, & r_{10} = p_2 + p_3 + p_4, & r_{18} = p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\
r_3 = p_3, & r_{11} = p_1 + p_2 + 2p_3, & r_{19} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + p_4, \\
r_4 = p_4, & r_{12} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4, & r_{20} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\
r_5 = p_1 + p_2, & r_{13} = p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{21} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4, \\
r_6 = p_2 + p_3, & r_{14} = p_1 + 2p_2 + 2p_3, & r_{22} = p_1 + 2p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\
r_7 = p_3 + p_4, & r_{15} = p_1 + p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{23} = p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\
r_8 = p_1 + p_2 + p_3, & r_{16} = p_2 + 2p_3 + 2p_4, & r_{24} = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4.
\end{array}$$

Занумеруем корни r из Φ числами от 1 до 48 так: присвоим номер i положительному корню r_i, соответствующему отрицательному корню $-r_i$ присвоим номер $24 + i$. Элементы $x_{r_i}(a)$ и $x_{-r_i}(a)$ из $F_4(p^n)$ обозначим через $x_i(a)$ и $x_{i+24}(a)$ соответственно, $1 \leq i \leq 24$. Корневую подгруппу $\{x_j(a) \mid a \in GF(p^n)\}$ обозначим через X_j, $1 \leq j \leq 48$.

Для $k = 1, 2, 3, 4$ с помощью [10] получим разложение $W = \bigcup_{j=1}^{b} W_k y_j W_k$ группы Вейля W на двойные смежные классы по подгруппе W_k, где каждый представитель y_j является единственным элементом в классе $W_k y_j W_k$, который имеет наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений. Получим элементы y_j:

(1) если $k = 1$, то $y_1 = [1]$, $y_2 = [12321]$, $y_3 = [12324321]$, $y_4 = [123214321324321]$, $y_5 = [\ ]$;
(2) если $k = 2$, то $y_1 = [2]$, $y_2 = [232]$, $y_3 = [2132]$, $y_4 = [232432]$, $y_5 = [2132132]$, $y_6 = [2132432]$, $y_7 = [2321432]$, $y_8 = [21321432]$, $y_9 = [2132132432]$, $y_{10} = [2321432132]$, $y_{11} = [21323432132]$, $y_{12} = [213213432132]$, $y_{13} = [2321432132432]$, $y_{14} = [21321432132432]$, $y_{15} = [2132132432132432]$, $y_{16} = [21321324321323432132]$, $y_{17} = [\ ]$;
(3) если $k = 3$, то $y_1 = [3]$, $y_2 = [323]$, $y_3 = [3243]$, $y_4 = [321323]$, $y_5 = [3214323]$, $y_6 = [3213243]$, $y_7 = [3234323]$, $y_8 = [32134323]$, $y_9 = [3213234323]$, $y_{10} = [3234321323]$, $y_{11} = [32143213243]$, $y_{12} = [321343213243]$, $y_{13} = [3213234321323]$, $y_{14} = [32132343213243]$, $y_{15} = [3213243213234323]$, $y_{16} = [32132343213234321323]$, $y_{17} = [\ ]$;
(4) если $k = 4$, то $y_1 = [4]$, $y_2 = [43234]$, $y_3 = [43213234]$, $y_4 = [432132343213234]$, $y_5 = [\ ]$.

Случай $p > 2$. Из работы автора [5] следует, что для нахождения рядов взаимных ядер для подгрупп M_1 и M_2 в тройке (G, M_1, M_2) из Π, где $G = F_4(p^n)$, p нечетно, и M_1, M_2 — различные сопряженные параболические максимальные подгруппы в G, достаточно рассматривать в качестве M_1 только параболические максимальные подгруппы P_2 и P_3.

Нам понадобится

Лемма 1 ([5]). *Для $G = F_4(p^n)$, $p > 2$ и $k \in \{2, 3\}$ фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U_k, имеет вид*

(1) $U_2 > Y_2 > Y_3 > 1$ *при* $k = 2$, *где* $U_2 = \langle X_i \mid i \in \{2, 5, 6\} \cup [8, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{14, 17\} \cup [19, 24]\rangle$, $Y_3 = \langle X_i \mid i \in \{23, 24\}\rangle$;

(2) $U_3 > Y_2 > Y_3 > Y_4 > 1$ *при* $k = 3$, *где* $U_3 = \langle X_i \mid i \in \{3\} \cup [6, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{9, 11\} \cup [13, 24]\rangle$, $Y_3 = \langle X_i \mid i \in \{19\} \cup [21, 24]\rangle$, $Y_4 = \langle X_i \mid i \in \{22, 23, 24\}\rangle$.

Для каждого $k \in \{2, 3\}$ полагаем $M_1 = P_k$ и для всех $j \in \{1, 2, \dots, 16\}$ находим с помощью [10] и леммы 1 сопряженную подгруппу $M_2 = y_j P_k y_j^{-1}$, пересечение $M_1 \cap M_2$ и нетривиальные взаимные ядра $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ $(i = 1, 2, \dots)$. Условию $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ удовлетворяют только две тройки: $(F_4(p^n), P_2, yP_2y^{-1})$ при $y = [2]$ и $(F_4(p^n), P_3, yP_3y^{-1})$ при $y = [3]$.

Согласно теореме Стейнберга [7, 12.5.1] любой автоморфизм группы исключительного лиева типа равен произведению внутреннего, диагонального, полевого и графового автоморфизмов. Параболические подгруппы P_2 и P_3 не сопряжены в $F_4(p^n)$ (см. [7, 8.3.3]). Группа диагональных автоморфизмов группы $F_4(p^n)$ тривиальна (см. [7, 8.6]). Полевой автоморфизм стабилизирует корневые подгруппы (см. [7, 8.3.4]), а ввиду леммы 1 подгруппы P_2 и P_3 порождаются разными корневыми подгруппами. Нетривиальный графовый автоморфизм группы $F_4(p^n)$ существует только при $p = 2$ (см. [7, 12.3.3]). Поэтому тройки $(F_4(p^n), P_2, yP_2y^{-1})$ при $y = [2]$ и $(F_4(p^n), P_3, yP_3y^{-1})$ при $y = [3]$ при нечетном p не эквивалентны.

Случай $p = 2$. Справедлива

Лемма 2 ([6]). *Пусть $G = F_4(2^n)$. Тогда фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U_k, имеет вид*

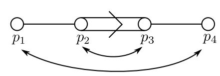
(1) $U_1 > Y_2 > Y_3 > 1$ *при* $k = 1$, *где* $U_1 = \langle X_i \mid i \in \{1, 5, 8, 11, 12, 14, 15\} \cup [17, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{8, 12, 15, 17, 19, 21, 24\}\rangle$, $Y_3 = X_{24}$;

(2) $U_2 > Y_2 > Y_3 > Y_4 > Y_5 > 1$ *при* $k = 2$, *где* $U_2 = \langle X_i \mid i \in \{2, 5, 6\} \cup [8, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17\} \cup [19, 24]\rangle$, $Y_3 = \langle X_i \mid i \in \{14, 17\} \cup [19, 24]\rangle$, $Y_4 = \langle X_i \mid i \in \{17, 19, 21, 23, 24\}\rangle$, $Y_5 = \langle X_{23}, X_{24}\rangle$;

(3) $U_3 > Y_2 > Y_3 > Y_4 > Y_5 > 1$ *при* $k = 3$, *где* $U_3 = \langle X_i \mid i \in \{3\} \cup [6, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{9, 11\} \cup [13, 24]\rangle$, $Y_3 = \langle X_i \mid i \in \{13, 15, 17, 19\} \cup [21, 24]\rangle$, $Y_4 = \langle X_i \mid i \in \{19\} \cup [21, 24]\rangle$, $Y_5 = \langle X_{19}, X_{21}\rangle$;

(4) $U_4 > Y_2 > Y_3 > 1$ *при* $k = 4$, *где* $U_4 = \langle X_i \mid i \in \{4, 7, 10, 12, 13\} \cup [15, 24]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{16, 18\} \cup [20, 24]\rangle$, $Y_3 = X_{21}$.

Согласно [7, 12.3.3] существует подстановка $(1, 4)(2, 3)(5, 7)(6, 9)(8, 16)(10, 11)$ $(12, 18)(13, 14)(15, 20)(17, 22)(19, 23)(21, 24)$ множества Φ^+ положительных корней, индуцированная инволютивной симметрией диаграммы Дынкина типа F_4



.

Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $F_4(2^n)$ отображает параболические максимальные подгруппы P_1 и P_2 в параболические максимальные подгруппы P_4 и P_3 соответственно. Поэтому достаточно рассмотреть случаи $M_1 = P_1$ и $M_1 = P_2$.

Если $M_1 = P_1$ и M_2 — сопряженная с M_1 подгруппа с помощью элемента из множнства $\{y_1 = [1],\ y_2 = [12321],\ y_3 = [12324321],\ y_4 = [123214321324321]\}$, то вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ все тривиальны.

Пусть $M_1 = P_2$. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ находим с помощью [10] и леммы 2 сопряженную подгруппу $M_2 = y_j P_2 y_j^{-1}$, пересечение $M_1 \cap M_2$ и нетривиальные взаимные ядра $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Условию $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ удовлетворяют только две тройки: $(F_4(2^n), P_2, yP_2y^{-1})$ при $y = [2]$ и $(F_4(2^n), P_3, yP_3y^{-1})$ при $y = [3]$. Заметим, что тройка $(F_4(2^n), P_2, yP_2y^{-1})$ при $y = [2]$ эквивалентна тройке $(F_4(2^n), P_3, yP_3y^{-1})$ при $y = [3]$ в силу существования инволютивного графового автоморфизма группы $F_4(2^n)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, где $G = F_4(p^n)$ для некоторого простого числа p и M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G. Тогда $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ и справедливы следующие утверждения:*

(*a*) *если $p > 2$, то тройка (G, M_1, M_2) эквивалентна одной из следующих неэквивалентных троек:*

(*a*1) *(G, P_2, yP_2y^{-1}) для $y = [2]$, при этом*

$$\begin{aligned}
(M_1, M_2)^2 &< O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1),\\
(M_2, M_1)^2 &< O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2),\\
(M_1, M_2)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{23, 24\}\rangle \cong p^{2n},\\
O_p((M_1, M_2)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{14, 17\} \cup [19, 24]\rangle \cong p^{8n},\\
(M_2, M_1)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{22, 24\}\rangle \cong p^{2n},\\
O_p((M_2, M_1)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{11, 15, 18, 19\} \cup [21, 24]\rangle \cong p^{8n},\\
M_1 \cap M_2 &= \langle X_i \mid i \in \{1, 3\} \cup [5, 24]\rangle\langle H, X_4, X_{28}\rangle \cong\\
&\cong (p^n.(p^{2n}.(p^{2n}.(p^{6n}.(p^{5n}.p^{6n}))))) : \langle H, X_4, X_{28}\rangle;
\end{aligned}$$

(*a*2) *(G, P_3, yP_3y^{-1}) для $y = [3]$, при этом*

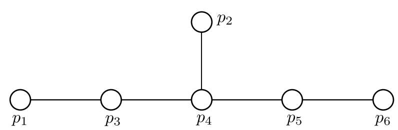
$$\begin{aligned}
(M_1, M_2)^2 &< O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1),\\
(M_2, M_1)^2 &< O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2),\\
(M_1, M_2)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{19\} \cup [21, 24]\rangle \cong p^{5n},\\
O_p((M_1, M_2)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{9, 11\} \cup [13, 24]\rangle \cong p^{2n} \times p^{3n}.p^{9n},\\
(M_2, M_1)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{17, 20, 21, 23, 24\}\rangle \cong p^{5n},\\
O_p((M_2, M_1)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{2, 5, 10, 12, 14\} \cup [16, 24]\rangle \cong p^{2n} \times p^{3n}.p^{9n},\\
M_1 \cap M_2 &= \langle X_i \mid i \in \{2\} \cup [4, 24]\}\rangle\langle H, X_1, X_{25}\rangle \cong\\
&\cong (p^{2n}.(p^{3n}.(p^{4n}.(p^{5n}.p^{8n})))) : \langle H, X_1, X_{25}\rangle;
\end{aligned}$$

(b) *если $p = 2$, то тройка (G, M_1, M_2) эквивалентна тройке (G, P_2, yP_2y^{-1}) для $y = [2]$, при этом*

$$
\begin{aligned}
(M_1, M_2)^2 &< O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1),\\
(M_2, M_1)^2 &< O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2),\\
(M_1, M_2)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{17, 19, 21, 23, 24\}\rangle \cong 2^{5n},\\
O_p((M_1, M_2)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17\} \cup [19, 24]\rangle \cong 2^{5n} \times 2^{3n}.2^{6n},\\
(M_2, M_1)^2 &= \langle X_i \mid i \in \{15, 19, 21, 22, 24\}\rangle \cong 2^{5n},\\
O_p((M_2, M_1)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{3, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\} \cup [21, 24]\rangle \cong\\
&\cong 2^{5n} \times 2^{3n}.2^{6n},\\
M_1 \cap M_2 &= \langle X_i \mid i \in \{1, 3\} \cup [5, 24]\}\langle H, X_4, X_{28}\rangle \cong\\
&\cong (2^{3n}.(2^{4n}.(2^{7n}.2^{8n}))) : \langle H, X_4, X_{28}\rangle.
\end{aligned}
$$

3. $G = E_6(p^n)$

В системе корней Φ типа E_6 с диаграммой Дынкина



обозначим корень $\sum_{i=1}^{6} \beta_i p_i$ через $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6$. Тогда множество Φ^+ положительных корней состоит из элементов (см. [1])

$$
\begin{array}{llll}
r_1 = 100000, & r_{10} = 000110, & r_{19} = 011110, & r_{28} = 011211,\\
r_2 = 010000, & r_{11} = 000011, & r_{20} = 010111, & r_{29} = 112210,\\
r_3 = 001000, & r_{12} = 101100, & r_{21} = 001111, & r_{30} = 111211,\\
r_4 = 000100, & r_{13} = 011100, & r_{22} = 111110, & r_{31} = 011221,\\
r_5 = 000010, & r_{14} = 010110, & r_{23} = 101111, & r_{32} = 112211,\\
r_6 = 000001, & r_{15} = 001110, & r_{24} = 011210, & r_{33} = 111221,\\
r_7 = 101000, & r_{16} = 000111, & r_{25} = 011111, & r_{34} = 112221,\\
r_8 = 010100, & r_{17} = 111100, & r_{26} = 111210, & r_{35} = 112321,\\
r_9 = 001100, & r_{18} = 101110, & r_{27} = 111111, & r_{36} = 122321.
\end{array}
$$

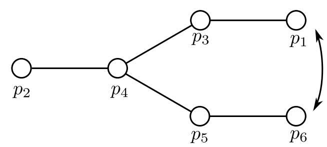
Нумеруем корни, корневые элементы и корневые подгруппы для группы $E_6(p^n)$ аналогично предыдущему параграфу.

Из работы [5] следует, что для нахождения рядов взаимных ядер для подгрупп M_1 и M_2 в тройке (G, M_1, M_2) из Π, где $G = E_6(p^n)$ и M_1, M_2 — различные сопряженные параболические максимальные подгруппы в G, достаточно рассматривать в качестве M_1 только параболическую максимальную подгруппу P_4. Нам понадобится

Лемма 3 ([5]). *Для $G = E_6(p^n)$ фрагмент главного ряда группы P_4, входящий в ее унипотентный радикал U_4, имеет вид $U_4 > Y_2 > Y_3 > 1$, где $U_4 = \langle X_i \mid i \in \{4, 8, 9, 10\} \cup [12, 36]\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{24, 26\} \cup [28, 36]\rangle$, $Y_3 = \langle X_{35}, X_{36}\rangle$.*

Положим $M_1 = P_4$. В работе [4] получено разложение $W = \bigcup_{j=1}^{37} W_4 y_j W_4$ группы Вейля W на двойные смежные классы по подгруппе W_4, где каждый представитель y_j является единственным элементом в классе $W_4 y_j W_4$, который имеет наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений.

Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, 37\}$ находим с помощью [10] и леммы 3 сопряженную подгруппу $M_2 = y_j P_4 y_j^{-1}$, пересечение $M_1 \cap M_2$ и нетривиальные взаимные ядра $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Условию $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ удовлетворяют только три тройки: $(E_6(p^n), P_4, y_j P_4 y_j^{-1})$ при $j = 1, 2, 3$. Выпишем эти элементы y_1, y_2, y_3 из [4]: $y_1 = [4]$, $\quad y_2 = [4254]$, $\quad y_3 = [4234]$. Согласно [7, 12.2.3] существует подстановка $(1,6)(3,5)(7,11)(9,10)(12,16)(13,14)(17,20)$ $(18,21)(22,25)(26,28)(29,31)(32,33)$ множества Φ^+ положительных корней , индуцированная инволютивной симметрией диаграммы Дынкина типа E_6



.

Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $E_6(p^n)$ отображает параболическую максимальную подгруппу ${}^{[4254]}P_4$ на параболическую максимальную подгруппу ${}^{[4234]}P_4$, а подгруппу P_4 оставляет на месте. Поэтому тройка $(E_6(p^n), P_4, y_2 P_4 y_2^{-1})$ эквивалентна тройке $(E_6(p^n), P_4, y_3 P_4 y_3^{-1})$. Тройки $(E_6(p^n), P_4, y_1 P_4 y_1^{-1})$ и $(E_6(p^n), P_4, y_2 P_4 y_2^{-1})$ не эквивалентны, так как ввиду [4] порядки пересечений $P_4 \cap y_1 P_4 y_1^{-1}$ и $P_4 \cap y_2 P_4 y_2^{-1}$ не равны. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, где $G = E_6(p^n)$ для некоторого простого числа p и M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G. Тогда $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ и тройка (G, M_1, M_2) эквивалентна одной из следующих неэквивалентных троек*

(a) *$(G, P_4, y P_4 y^{-1})$ для $y = [4]$, при этом*

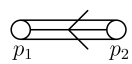
$$\begin{aligned}
(M_1, M_2)^2 &< O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1),\\
(M_2, M_1)^2 &< O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2),\\
(M_1, M_2)^2 &= \langle X_{35}, X_{36} \rangle \cong p^{2n},\\
O_p((M_1, M_2)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{24, 26\} \cup [28, 36] \rangle \cong p^{11n},\\
(M_2, M_1)^2 &= \langle X_{34}, X_{36} \rangle \cong p^{2n},\\
O_p((M_2, M_1)^1) &= \langle X_i \mid i \in \{19, 22, 25, 27, 29\} \cup [31, 36] \rangle \cong p^{11n},\\
M_1 \cap M_2 &= \langle X_i \mid i \in \{2, 3, 5\} \cup [7, 36] \rangle \langle H, X_1, X_{37}, X_6, X_{42} \rangle \cong\\
&\cong (p^n.(p^{2n}.(p^{4n}.(p^{8n}.(p^{8n}.p^{10n}))))) : \langle H, X_1, X_{37}, X_6, X_{42} \rangle;
\end{aligned}$$

(*b*) (G, P_4, yP_4y^{-1}) *для* $y = [4254]$, *при этом*

$$(M_1, M_2)^2 < O_p((M_1, M_2)^1) < O_p(M_1),$$
$$(M_2, M_1)^2 < O_p((M_2, M_1)^1) < O_p(M_2),$$
$$(M_1, M_2)^2 = \langle X_{35}, X_{36}\rangle \cong p^{2n},$$
$$O_p((M_1, M_2)^1) = \langle X_i \mid i \in \{24, 26\} \cup [28, 36]\rangle \cong p^{11n},$$
$$(M_2, M_1)^2 = \langle X_{32}, X_{34}\rangle \cong p^{2n},$$
$$O_p((M_2, M_1)^1) = \langle X_i \mid i \in \{3, 7, 21, 23, 25, 27, 29, 32, 34, 35, 36\}\rangle \cong p^{11n},$$
$$M_1 \cap M_2 = \langle X_i \mid i \in \{3, 6, 7, 9, 11, 12, 13\} \cup [15, 36]\rangle\langle H, X_i \mid i \in$$
$$\{1, 37, 2, 38, 5, 41\}\rangle \cong (p^{4n}.(p^{9n}.p^{16n})) : \langle H, X_1, X_{37}, X_2, X_{38}, X_5, X_{41}\rangle.$$

4. $G = G_2(p^n)$

В случае системы корней типа G_2 множество Φ^+ состоит из элементов $r_1 = p_1, r_2 = p_2, r_3 = p_1 + p_2, r_4 = 2p_1 + p_2, r_5 = 3p_1 + p_2, r_6 = 3p_1 + 2p_2$, а диаграмма Дынкина имеет вид



.

Нумерацию корней, корневых элементов и корневых подгрупп для группы $G_2(p^n)$ проводим аналогично предыдущим параграфам.

С помощью [10] найдем разложение $W = \bigcup_{j=1}^{4} W_1 y_j W_1$ группы Вейля W на двойные смежные классы по подгруппе W_1, где каждый представитель y_j является единственным элементом в классе $W_1 y_j W_1$, который имеет наименьшую длину при разложении в произведение фундаментальных отражений. Получим элементы $y_1 = [1]$, $y_2 = [121]$, $y_3 = [12121]$ $y_4 = [\ ]$.

Случай $p \neq 3$. Из работ автора [5, 6] следует, что для нахождения рядов взаимных ядер для подгрупп M_1 и M_2 в тройке (G, M_1, M_2) из Π, где $G = G_2(p^n)$, $p \neq 3$ и M_1, M_2 — различные сопряженные параболические максимальные подгруппы в G, достаточно рассматривать в качестве M_1 только параболическую максимальную подгруппу P_1. Нам понадобится

Лемма 4 ([5],[6])**.** *Для* $G = G_2(p^n)$, $p \neq 3$, *фрагмент главного ряда группы* P_1, *входящий в ее унипотентный радикал* U_1, *имеет вид* $U_1 > Y_2 > Y_3 > 1$, *где* $U_1 = \langle X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 5, 6\}\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{4, 5, 6\}\rangle$, $Y_3 = \langle X_5, X_6\rangle$.

Положим $M_1 = P_1$. Будем использовать элементы y_1, y_2, y_3 для построения с помощью [10] и леммы 4 сопряженнных подгрупп $M_2 = y_j P_1 y_j^{-1}$, взаимных ядер $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Оказывается, что условию $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ не удовлетворяет ни одна из указанных подгрупп M_2.

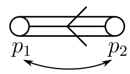
Случай $p = 3$. Справедлива

Лемма 5 ([6])**.** *Для* $G = G_2(3^n)$ *при* $k \in \{1, 2\}$ *фрагмент главного ряда группы* P_k, *входящий в ее унипотентный радикал* U_k, *имеет вид* $U_k > Y_2 > Y_3 > 1$, *где*

(1) *при* $k = 1$
$U_1 = \langle X_i \mid i \in \{1, 3, 4, 5, 6\}\rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{4, 5, 6\}\rangle$, $Y_3 = X_4$;

(2) *при* $k = 2$
$U_2 = \langle X_i \mid i \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \rangle$, $Y_2 = \langle X_i \mid i \in \{3, 4, 6\} \rangle$, $Y_3 = X_6$.

Согласно [7, 12.4.1] существует подстановка $(1, 2)(3, 5)(4, 6)$ множества Φ^+ положительных корней, индуцированная инволютивной симметрией диаграммы Дынкина типа G_2



.

Соответствующий этой подстановке графовый автоморфизм группы $G_2(3^n)$ отображает параболическую максимальную подгруппу P_1 на параболическую максимальную подгруппу P_2. Поэтому для построения рядов взаимных ядер достаточно рассмотреть подгруппу P_1.

Положим $M_1 = P_1$. Будем использовать элементы y_1, y_2, y_3 для построения с помощью [10] и леммы 5 сопряженнных подгрупп $M_2 = y_j P_1 y_j^{-1}$, взаимных ядер $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Оказывается, что условию $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ не удовлетворяет ни одна из указанных подгрупп M_2. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если* $(G, M_1, M_2) \in \Pi$*, то группы* G *и* $G_2(p^n)$ *не изоморфны.*

References

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Ch. IV, V, VI*, Paris: Hermann, 1968. MR0240238

[2] A.S. Kondrat'ev, V.I. Trofimov, *Stabilizers of graph's vertices and a strengthened version of the Sims conjecture*, Dokl. Math., **59**:1 (1999), 113-115. MR1702503

[3] A.S. Kondrat'ev, V.I. Trofimov, *Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture*, I, Proc. Steklov Inst. Math., Vol.**289** (2015), Suppl. 1, S146–S155, MR3379277; II, Proc. Steklov Inst. Math., Vol. **295** (2016), Suppl. 1, S89-S100, MR3559174; III, Proc. Steklov Inst. Math., Vol. **299** (2017), Suppl. 1, S113-S122, MR3590931; IV, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **24**:3 (2018), 109-132.

[4] V.V. Korableva, *Parabolic permutation representations of groups* $E_6(q)$ *and* $E_7(q)$. Sbornik nauchn. trudov “Combinatorial and computational methods in mathematics”, Omsk: OmGU, 1999, 160-189.

[5] V.V. Korableva, *On chief factors of parabolic maximal subgroups of finite simple groups of normal Lie type*, Sib. Math. J., **55**:4 (2014), 622–638. MR3242594

[6] V.V. Korableva, *On the chief factors of parabolic maximal subgroups of special finite simple groups of exceptional Lie type*, Sib. Math. J., **58**:6 (2017), 1034–1041. MR3783874

[7] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*. London: John Wiley and Sons, 1972. MR0407163

[8] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*. London: John Wiley and Sons, 1993. MR0240238

[9] J.N. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[10] *The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, Ver. gap3-jm, 2017.

Vera Vladimirovna Korableva
Chelyabinsk State University,
Bratiev Kashirinykh St., 129,
Chelyabinsk, 454001, Russia
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskaya st.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: vvk@csu.ru