S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1605–1620 (2018) УДК 515.165.7
DOI 10.33048/semi.2018.15.133 MSC 53C26

О КОЛЬЦЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОГОМОЛОГИЙ ОДНОГО G_2-МНОГООБРАЗИЯ

И.В. ФЕДОРОВ

Abstract. We compute the rational cohomology ring of a certain G_2-manifold constructed by Joyce.

Keywords: G_2-manifold, cohomology ring, intersection theory

1. Введение

В настоящее время известно конечное (с топологической точки зрения) количество примеров компактных римановых многообразий с группой голономии G_2.

Первые примеры такого рода были построены Джойсом [1, 2] с помощью обобщённой конструкции Куммера (классический вариант которой применяется к 4-мерному тору и даёт $K3$-поверхность).

Кольцевая структура в рациональных когомологиях этих многообразий долгое время оставалась невычисленной. В [3] было предложено вычислять её с помощью теории пересечений и этот способ был продемонстрирован на одном из примеров Джойса. В принципе эта теория позволяет находить и кольцевую структуру в целочисленных когомологиях, однако уже для простейших примеров это требует больших вычислений (в [4] такой подход был продемонстрирован на примере $K3$ поверхностей, для которых форма пересечений и канонический базис в 2-когомологиях были найдены явно без привлечения классификационной теории симметрических форм).

Примеры, построенные Джойсом, получаются разрешением особенностей орбиобразий T^7/Γ. Число этих примеров конечно; сформулировать общий результат об их кольцах когомологий не получается, однако каждое многообразие

Fedorov, I.V., On the rational cohomology ring of a certain G_2-manifold.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00441).

Поступила 17 июня 2018 г., опубликована 9 декабря 2018 г.

можно исследовать отдельно. Мы вычислим кольцо рациональных когомологий для примера, в котором действие группы Γ довольно сильно отличается от случая, разобранного в [3].

Многообразиями Джойса и G_2-многообразиями, полученными как скрученные связные суммы [5, 6, 7], исчерпываются все известные примеры замкнутых римановых многообразий с голономией G_2. Кольца когомологий для многих G_2-многообразий, полученных как скрученные связные суммы, вычислены в [7].

2. Теория пересечений

Кольца когомологий многообразий Джойса можно вычислить с помощью классической теории пересечений [8].

Пусть M – ориентированное замкнутое гладкое многообразие размерности m. Тогда имеется изоморфизм Пуанкаре $D : H_\bullet(M, \mathbb{Q}) \to H^{m-\bullet}(M, \mathbb{Q})$.

Пусть K, L – вложенные ориентированные замкнутые гладкие подмногообразия многообразия M, пересекающиеся трансверсально. Тогда их пересечение есть вложенное ориентируемое замкнутое гладкое подмногообразие размерности $k + l - m$ (где k – размерность K, l – размерность L).

У каждой связной компоненты пересечения есть естественная ориентация, определяемая следующим правилом: объявим базис $\mathbf{e}$ пространства $T_p(K \cap L)$ положительным, если его можно дополнить до положительного базиса $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ пространства T_pK и до положительного базиса $\mathbf{e}, \mathbf{e}''$ пространства T_pL так, что $\mathbf{e}, \mathbf{e}', \mathbf{e}''$ – положительный базис T_pM. (Если пересечение 0-мерно, то у каждой из составляющих его точек тоже определяется положительная или отрицательная ориентация согласно этому правилу.)

Основная теорема теории пересечений говорит, что $D[K \cap L] = D[K] \smile D[L]$ (где $[K]$ означает класс гомологий, реализованный подмногообразием K, и т. д., а ориентация у $K \cap L$ определяется по вышенаписанному правилу). В частности, гомологический класс пересечения зависит только от гомологических классов пересекаемых подмногообразий.

Ориентация пересечения зависит от того, в каком порядке берутся пересекаемые подмногообразия. Поэтому операция пересечения в гомологиях антикоммутативна в том смысле, что $[K \cap L] = (-1)^{(m-k)(m-l)}[L \cap K]$.

Итак, для вычисления кольца когомологий достаточно найти базис в гомологиях, реализованный вложенными гладкими подмногообразиями, затем найти их пересечения и разложить по базису; изоморфизм Пуанкаре превратит базис гомологий в базис когомологий, а пересечение в $\smile$-произведение.

3. Построение многообразия M

Опишем рассматриваемое многообразие Джойса M [2, Example 7].

3.1. **Конечная группа диффеоморфизмов 7-тора.** Рассмотрим решётку $\Lambda := \mathbb{Z} \oplus e^{\frac{2\pi i}{3}}\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ (то есть решётку, порождённую 1 и $e^{\frac{2\pi i}{3}}$). Рассмотрим теперь решётку $\Lambda^3 \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ (где $\mathbb{Z}$ вкладывается в $\mathbb{R}$ обычным образом). Если отфакторизовать $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ по этой решётке, то получится 7-мерный тор T^7.

Координаты в $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ у нас будут z^1, z^2, z^3, x (первые три комплексные, а x вещественная). Введём ещё в каждом из трёх первых множителей вещественные координаты x^k и y^k $(k = 1, 2, 3)$, соответствующие базису $1, i$, а также координаты u^k и v^k, соответствующие базису $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Так же будем обозначать индуцированные координаты в $T^7 = \dfrac{\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}}{\Lambda^3 \times \mathbb{Z}}$.

Определим изометрии α и β пространства $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ следующим образом: $\alpha(z,x) = (e^{\frac{2\pi i}{3}}z, x + \frac{1}{3})$, $\beta(z,x) = (-\bar{z}, -x)$ (здесь $z = (z^1, z^2, z^3)$ – координаты в множителе $\mathbb{C}^3$). Эти преобразования сохраняют решётку $\Lambda^3 \subset \mathbb{C}^3$ и поэтому индуцируют сохраняющие ориентацию изометрии тора T^7, которые мы так же обозначим α и β.

Так как $\alpha^3 = \beta^2 = 1$ и $\alpha\beta\alpha = \beta$, то группа $\Gamma := \langle\alpha, \beta\rangle$ преобразований тора T^7 состоит из 6 элементов (а именно $1, \alpha, \alpha^2, \beta, \beta\alpha$ и $\beta\alpha^2$) и изоморфна диэдральной группе порядка 6.

3.2. **Неподвижные точки в этом 7-торе.** Действие Γ на T^7 не свободно. Преобразования α и α^2 не имеют неподвижных точек (они изменяют последнюю координату). Остальные 3 нетривиальные преобразования имеют неподвижные точки, которые задаются следующими условиями:

$$\text{для } \beta\text{:} \quad \begin{cases} x = 0 \text{ или } \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{Re} z_i \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\} \text{ (для всех } i); \end{cases}$$

$$\text{для } \beta\alpha\text{:} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \text{ или } \dfrac{5}{6}, \\ \operatorname{Re}(e^{-\frac{2\pi i}{3}} z_i) \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}; \end{cases}$$

$$\text{для } \beta\alpha^2\text{:} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \text{ или } \dfrac{1}{6}, \\ \operatorname{Re}(e^{\frac{2\pi i}{3}} z_i) \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}. \end{cases}$$

Неподвижные точки каждого из этих 3 преобразований образуют 2 непересекающихся 3-мерных тора: например для β один получается при $x = 0$, а другой при $x = \frac{1}{2}$.

Изометрия α переводит тор, соответствующий $x = 0$, в тот, у которого $x = \frac{1}{3}$, а его – в тот, у которого $x = \frac{2}{3}$, и аналогично переставляет циклически остальные 3 тора. Таким образом, Γ-орбита каждого из неподвижных торов состоит из 3 торов, и этих орбит две.

3.3. **Особые точки пространства орбит.** Множество особых точек орбиобразия T^7/Γ состоит из двух непересекающихся 3-мерных торов. Неподвижный тор в T^7, соответствующий $x = 0$, обозначим F_1, а соответствующий $x = \frac{1}{2}$ обозначим F_2. Два особых тора в T^7/Γ – это их проекции относительно отображения факторизации $T^7 \to T^7/\Gamma$.

У каждого из неподвижных торов F_i $(i = 1, 2)$ есть окрестность $\widetilde{U}_i$ в T^7, изометричная $T^3 \times D^4$ и проектирующаяся послойно в окрестность U_i особого тора в T^7/Γ, изометричную $T^3 \times (D^4/\mathbb{Z}_2)$, где T^3 – 3-мерный тор, а неединичный элемент $\mathbb{Z}_2$ действует на 4-мерном шаре D^4 отражением относительно центра (так что получается конус над $\mathbb{R}P^3$).

3.4. **Разрешение особенностей.** Многообразие M получается из T^7/Γ раздутием особых точек. Каждый особый тор вырезается вместе с его окрестностью $U_i = T^3 \times (D^4/\mathbb{Z}_2)$, а вместо этой окрестности приклеивается $T^3 \times V$, где V – окрестность нулевого сечения TS^2 (например состоящая из векторов длины $\leqslant 1$).

3.5. **Ориентация.** Ориентируем T^7 базисом $\partial_{u^1}, \partial_{v^1}, \partial_{u^2}, \partial_{v^2}, \partial_{u^3}, \partial_{v^3}, \partial_x$ в какой-нибудь точке. Зададим на T^7/Γ унаследованную ориентацию.

Ориентируем неподвижные торы F_i базисами $\partial_{y^1}, \partial_{y^2}, \partial_{y^3}$.

Ориентируем каждый слой D^4 окрестности $\widetilde{U}_i$: потребуем, чтобы был положительно ориентирован базис касательного пространства к T^7, у которого первые 3 вектора – положительный базис касательного пространства к F_i, а следующие 4 – положительный базис касательного пространства к слою.

Ориентируем V. Самопересечение нулевого сечения расслоения $V \to S^2$ равно эйлеровой характеристике сферы, то есть 2 или -2 в зависимости от того, как выбрать ориентацию V. Выберем её так, чтобы самопересечение нулевого сечения было -2. Одновременно потребуем, чтобы ориентация у приклеенного слоя V была такая же, как у вырезанного слоя $D^4/\mathbb{Z}_2$ (то есть чтобы совпадала индуцированная ориентация края слоя). Эти два требования совместимы, потому что у края $\partial V = \mathbb{R}P^3$ есть автоморфизм, обращающий ориентацию.

3.6. **Группы рациональных гомологий многообразия M.** Числа Бетти многообразия M такие [2]:

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	0	5	13	13	5	0	1

Это значит, что нетривиальные пересечения могут быть только у гомологических классов размерностей 2 – 5, 3 – 4, 5 – 5 и 4 – 5 (это следует из формулы для размерности пересечения). Такие пересечения коммутативны.

4. Циклы в M

4.1. **Вспомогательные.** Рассмотрим тор в T^7, полученный из F_1 малым сдвигом. Его проекция в T^7/Γ не содержит особых точек, поэтому можно считать, что при разрешении особенностей с ней ничего не происходит. Получающийся 3-тор в M обозначим f_1. Аналогично определим цикл f_2.

Пусть Λ_{qy^i} – петля в неподвижном торе F_q, которая пробегается, когда координата z_i меняется, а остальные две фиксированы, а Λ'_{qy^i} – 2-тор, который получается, когда, наоборот, z^i фиксирована, а остальные 2 меняются. Ориентацию Λ_{qy^i} зададим вектором ∂_{y^i}, а ориентацию Λ'_{qy^i} так, чтобы пересечение с Λ_{qy^i} в торе F_q было положительно. Соответствующую петлю и соответствующий 2-тор в f_q обозначим λ_{qy^i} и λ'_{qy^i}.

4.2. **Двумерные.** Будем использовать координаты $(u^1, v^1, u^2, v^2, u^3, v^3, x)$ в T^7, введённые выше.

Рассмотрим 2-торы $T_{u^1u^2}, T_{u^2u^3}, T_{u^3u^1}$ в T^7, которые пробегаются, когда указанные нижним индексом координаты меняются, а остальные фиксированы (и равны каким-нибудь маленьким положительным числам). Ориентируем $T_{u^1u^2}$ базисом $\partial_{u^1}, \partial_{u^2}$ в какой-нибудь точке; и остальные два аналогично. Орбиты этих торов не пересекаются с неподвижными торами, проектируются в 2-торы в T^7/Γ и не затрагиваются при разрешении особенностей. Получающиеся циклы в M обозначим $t_{u^1u^2}, t_{u^2u^3}, t_{u^3u^1}$.

Вместо окрестности особого тора, в который проектируется F_1, вклеено произведение $T^3 \times V$, где V – расслоение над S^2. Обозначим $[s_1]$ гомологический класс цикла, реализованного нулевым сечением этого расслоения (ориентация, как будет видно дальше, не важна). Аналогично определим класс $[s_2]$.

4.3. **Пятимерные.** Рассмотрим 5-тор $T'_{u^1u^2}$ в T^7, который пробегается, когда координаты u^1 и u^2 фиксированы и равны каким-нибудь маленьким положительным числам, а остальные меняются. Ориентируем его так, чтобы пересечение с $T_{u^1u^2}$ было положительным. Его Г-орбита пересекается с неподвижными торами по несвязному объединению нескольких окружностей.

Пошевелим $T'_{u^1u^2}$ так, чтобы в некоторой окрестности любой из этих окружностей пересечение с малой окрестностью неподвижного тора состояло из целых слоёв тривиального расслоения над неподвижным тором со слоем D^4, которое обсуждалось выше. (Вернее говоря, оно обсуждалось только для F_1 и F_2; можно скопировать его в окрестность остальных 4 неподвижных торов с помощью α и α^2.) Будем считать, что соответствующая изотопия проходит по гладким вложениям, трансверсальным ко всем неподвижным торам. Проекция пошевелённого тора в T^7/Γ будет пересекаться с малой окрестностью неподвижных торов по несвязному объединению нескольких экземпляров $S^1 \times (D^4/\mathbb{Z}_2)$, которые заменятся на $S^1 \times V$ при разрешении особенностей. Обозначим получающийся цикл $t'_{u^1u^2}$.

Аналогично определим циклы $t'_{u^2u^3}$ и $t'_{u^3u^1}$.

Рассмотрим 2 подмногообразия $T^3 \times V$, которые вклеены вместо вырезанных особенностей. Выделим в каждом из них во втором множителе нулевое сечение и получим 2 цикла, диффеоморфных $T^3 \times S^2$. Обозначим их $f_1 \times s_1$ и $f_2 \times s_2$. Их ориентация определяется ориентацией f_q и s_q.

4.4. **Трёхмерные.** Рассмотрим в T^7 3-торы

$$T_{z^1x},\ T_{z^2x},\ T_{z^3x},\ T_{v^2u^3x},\ T_{v^3u^1x},\ T_{v^1u^2x}$$

(обозначения аналогичны тем, которые использовались выше). Ориентируем T_{z^1x} базисом $\partial_{u^1}, \partial_{v^1}, \partial_x$, и т. д. Орбиты этих торов не пересекаются с неподвижными торами и отображаются во вложенные 3-торы в M. Эти 6 циклов обозначим

$t_{z^1x}, t_{z^2x}, t_{z^3x}$,
$t_{v^2u^3x}, t_{v^3u^1x}, t_{v^1u^2x}$.

Седьмым циклом возьмём f_1.

Рассмотрим произведение $T^3 \times V$, вклеенное вместо окрестности проекции тора F_1. Выделим в этом произведении нулевое сечение расслоения V в тех слоях, которые пересекает петля $\lambda_{1y^i} \subset f_1$ $(i = 1, 2, 3)$ и получим таким образом 3-мерное подмногообразие, диффеоморфное $S^1 \times S^2$. Обозначим его $\lambda_{1y^i} \times s_1$. Аналогично определим 3 цикла $\lambda_{2y^i} \times s_2$. Ориентация определяется ориентацией сферы и петли.

4.5. **Четырёхмерные.** Рассмотрим 4-торы

$$T'_{z^1x},\ T'_{z^2x},\ T'_{z^3x},\ T'_{v^2u^3x},\ T'_{v^3u^1x},\ T'_{v^1u^2x}.$$

Ориентируем их так, чтобы пересечения с соответствующими нештрихованными торами были положительны. Г-орбиты этих торов не пересекаются с неподвижными торами и определяют (как выше) циклы

$t'_{z^1}, t'_{z^2}, t'_{z^3}$,
$t'_{v^2u^3x}, t'_{v^3u^1x}, t'_{v^1u^2x}$.

Теперь рассмотрим 4-тор $T_{u^1v^2w^3x}$, получающийся малым сдвигом из тора в T^7, заданного уравнениями $v^1 = 0, u^2 = 0, u^3 = v^3$. Ориентируем его базисом $\partial_{u^1}, \partial_{v^2}, \partial_{w^3}, \partial_x$, где $\partial_{w^3} := \alpha_* \partial_{v^3} = -(\partial_{u^3} + \partial_{v^3})$. Орбита его пересекается с неподвижными торами по нескольким точкам. Как и выше, пошевелим тор $T_{u^1v^2w^3x}$ так, чтобы около каждой из этих точек он пересекался с окрестностью неподвижного тора по целому слою D^4 тривиального расслоения над неподвижным тором. При разрешении особенностей из проекции нашего 4-тора вырежется несколько множеств вида $D^4/\mathbb{Z}_2$ и вместо них приклеются V. Получится цикл, который обозначим $t_{u^1v^2w^3x}$.

Циклы $\lambda'_{qy^i} \times s_q$ (где $q = 1, 2$, а $i = 1, 2, 3$) определяются аналогично соответствующим 3-мерным циклам.

5. Пересечения циклов

Найдём пересечения построенных циклов.

5.1. **2-мерных с 5-мерными.**

(1) $[t_{u^1u^2}] \cap [t'_{u^1u^2}] = 4$. Ведь орбита тора $T_{u^1u^2}$ пересекает $T'_{u^1u^2}$ по четырём точкам (не лежащим на неподвижных торах). Конкретно, $T'_{u^1u^2}$ пересекается с $T_{u^1u^2}$ по точке, с $\alpha T_{u^1u^2}$ они параллельны, а с $\alpha^2 T_{u^1u^2}$ опять пересекаются по точке. Похожим образом, с $\beta T_{u^1u^2}$ и с $\beta\alpha T_{u^1u^2}$ они пересекаются по точке, а с $\beta\alpha^2 T_{u^1u^2}$ параллельны.

Пересечение $T_{u^1u^2}$ с $T'_{u^1u^2}$ положительно, потому что ориентация второго из этих торов так определялась. Сейчас убедимся, что остальные 3 пересечения тоже положительны.

Положительный базис $\alpha T_{u^1u^2}$ (точнее говоря, я имею в виду систему 2 векторных полей на $\alpha T_{u^1u^2}$, значения которых в каждой точке этого тора образуют положительно ориентированный базис касательного постранства к тору в этой точке) получается из положительного базиса $T_{u^1u^2}$ действием α_*. Таким образом, для определения ориентации пересечения достаточно взять базис T^7, у которого первые 2 вектора – положительный базис $T_{u^1u^2}$ (мы возьмём постоянные векторы $\partial_{u^1}, \partial_{u^2}$), а следующие 5 – положительный базис $T'_{u^1u^2}$ (мы возьмём постоянные векторы $\partial_{v^1}, \partial_{v^2}, \partial_{u^3}, \partial_{v^3}, \partial_x$, упорядоченные так, чтобы базис был положительный); а потом на первые 2 вектора подействовать α_*, а с остальными ничего не делать. В результате получится система из 7 (тоже постоянных) векторов, в которой первые 2 – положительный базис $\alpha T_{u^1u^2}$ (а следующие 5, конечно, остались положительным базисом $T'_{u^1u^2}$). $T'_{u^1u^2}$ и $\alpha T_{u^1u^2}$ пересекаются трансверсально, поэтому полученный линейный оператор невырожден. Если он сохраняет ориентацию, то пересечение $T'_{u^1u^2}$ с $\alpha T_{u^1u^2}$ ориентировано так же, как и пересечение с $T_{u^1u^2}$; а если обращает, то оно ориентировано противоположным образом.

Запишем матрицу этого оператора в базисе $\partial_{u^1}, \partial_{v^1}, \partial_{u^2}, \partial_{v^2}, \partial_{u^3}, \partial_{v^3}, \partial_x$: она будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \ldots & 0 & & & & & \\ \ldots & 1 & & & & & \\ & & \ldots & 0 & & & \\ & & \ldots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где два 2×2 блока с многоточиями одинаковые (потому что α одинаково действует на координаты z^1 и z^2). Поэтому её определитель положителен, и наш оператор сохраняет ориентацию. Значит, пересечение положительно.

Эти рассуждения повторяются дословно для остальных 2 пересечений (потому что β тоже одинаково действует на z^1 и на z^2). Поэтому все 4 пересечения положительны.

Аналогично вообще $[t_{u^iu^j}] \cap [t'_{u^iu^j}] = 4$ (где $ij = 12, 23, 31$).

(2) $[f_1 \times s_1] \cap [s_1] = -2$. Выберем представителем первого класса сферу s_1 в слое над какой-нибудь точкой тора f_1, гомологичную нулевому сечению расслоения V и транстверсально с ним пересекающуюся: дело свелось к самопересечению $[s_1]$ в слое, а оно состоит из 2 точек.

Определим ориентацию. $f_1 \times s_1$ состоит из нулевых сечений. Пусть e_1, e_2 – положительный базис нулевого сечения в одной из точек пересечения, e'_1, e'_2 – положительный базис s_1 в этой точке, а a_1, a_2, a_3 – положительный базис к множителю f_1 в этой точке. Наше пересечение положительно или отрицательно в зависимости от того, положителен или отрицателен базис $a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e'_1, e'_2$; мы знаем, что e_1, e_2, e'_1, e'_2 – отрицательный базис слоя V над точкой f_1, и, следовательно, $a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e'_1, e'_2$ – отрицательный базис T^7. Значит, пересечение отрицательно.

Аналогично $[f_2 \times s_2] \cap [s_2] = -2$.

Остальные пересечения равны 0. Вообще пересечения, которые надо посчитать, соответствуют клеткам следующей таблички (остальные пересечения получаются из этих простой перестановкой индексов в предыдущих рассуждениях):

	$t_{u^1u^2}$	$t_{u^2u^3}$	$t_{u^3u^1}$	s_1	s_2
$t'_{u^1u^2}$	✓	z^1	z^2	0	0
$f_1 \times s_1$	0	0	0	✓	0

Галочками отмечены пересечения, которые сосчитаны выше; остальные 8 равны нулю:

(1) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t_{u^2u^3}] = 0$. Действительно, рассмотрим сечение T^7, где меняется только z^1 (т. е. $z_2, z_3, x = \mathrm{const}$). В этом сечении любой элемент орбиты $T'_{u^1u^2}$ есть окружность, а $T_{u^2u^3}$ – точка; в общем положении (то есть при трансверсальном пересечении) точка не попадает на окружность, поэтому пересечение нулевое.

Для пересечения с $t_{u^3u^1}$ всё так же, только надо рассматривать сечение, где меняется z^2.

(2) $[t'_{u^1u^2}] \cap [s_q] = 0$ $(q = 1, 2)$. Орбита $T'_{u^1u^2}$ пересекается с неподвижными торами по окружностям. Можно выбрать на неподвижном торе точку, которая не попадает на эти окружности, и в качестве представителя класса $[s_1]$ или $[s_2]$ взять сферу, в которую эта точка переходит при разрешении особенностей. Отсюда видно, что пересечение $[t'_{u^1u^2}]$ с $[s_q]$ нулевое.

(3) $[f_1 \times s_1] \cap [t_{u^iu^j}] = 0$ $(ij = 12, 23, 31)$. Орбиты циклов $T_{u^1u^2}, \ldots$ в T^7 не пересекаются с неподвижными торами, а цикл $f_1 \times s_1$ происходит из малой окрестности неподвижного тора. Поэтому он не пересекается с $t_{u^1u^2}, \ldots$.

(4) $[f_1 \times s_1] \cap [s_2] = 0$ – очевидно: малые окрестности орбит F_1 и F_2 не пересекаются.

Мы выше выбрали какие-то 5 двумерных и 5 пятимерных циклов и теперь посчитали пересечения их гомологических классов. Получилась невырожденная матрица $\mathrm{diag}(4, 4, 4, -2, -2)$. Значит, эти классы линейно независимы. Мы знаем, что у нашего пространства размерность H_2 и $H_5(M, \mathbb{Q})$ как раз 5, так что эти классы составляют базис H_2 и H_5.

5.2. **3-мерных с 4-мерными.**

(1) $[t_{z^1x}] \cap [t'_{z^1x}] = 6$. T'_{z^1x} пересекается с каждым из 6 элементов орбиты T_{z^1x} по точке. Ориентация определяется как выше, применением α_*, β_* и т. д. к векторам $\partial_{u^1}, \partial_{v^1}, \partial_x$.

Матрица для элементов Г, не содержащих β, будет выглядеть

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\text{поворот}\\ \text{без отражения}\end{matrix} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

а содержащих β

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\text{поворот}\\ \text{с отражением}\end{matrix} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вообще $[t_{z^ix}] \cap [t'_{z^ix}] = 6$ $(i = 1, 2, 3)$.

(2) $[t_{v^1u^2x}] \cap [t'_{v^1u^2x}] = 2$. $T'_{v^1u^2x}$ пересекается с $T_{v^1u^2x}$ по точке, с $\alpha\, T_{v^1u^2x}$ не пересекается (сечения $z^1, z^3, x = \mathrm{const}$ параллельны), с $\alpha^2\, T_{v^1u^2x}$ тоже нет (сечения $z^2, z^3, x = \mathrm{const}$ параллельны), итого тут одна точка, и

потом ещё с β 1 точка. Ориентация для пересечения с $\beta T_{v^1u^2x}$ определяется как выше. Матрица для β

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вообще $[t_{v^iu^jx}] \cap [t'_{v^iu^jx}] = 2$ $(ij = 12, 23, 31)$.

(3) $[f_1] \cap [t_{u^1v^2w^3x}] = 12$. Каждый элемент орбиты $T_{u^1v^2w^3x}$ пересекает $(F_1)_\varepsilon$ по 2 точкам.

Убедимся, что ориентация всех пересечений положительна. Запишем положительный базис F_1, а следом положительный базис $T_{u^1v^2w^3x}$: получится $y^1y^2y^3u^1v^2w^3x$ (я пишу y^1 вместо ∂_{y^1} и т. д.). Чётным количеством перестановок из него получается базис $u^1y^1|y^2v^2|y^3w^3|x$, который положителен. Я разбил его на 4 группы векторов: на них натянуты подпространства, инвариантные для дифференциалов всех элементов Г. Запишем знак $+$, если под действием дифференциала ориентация подпространства не меняется, и $-$, если меняется (напоминаю, что y^1, y^2 и y^3 мы не трогаем):

$$\begin{array}{lcccc} 1 & + & + & + & + \\ \alpha & - & + & - & + \\ \alpha^{-1} & - & - & + & + \end{array}.$$

Преобразование β меняет ориентацию каждого из 4 рассматриваемых подпространств, поэтому строчки для элементов, содержащих β, получаются из этих трёх изменением всех знаков.

Отсюда видно, что ориентация пересечения всегда положительна (потому что в каждой строчке получается чётное число минусов).

(4) $[\lambda_{1y^1} \times s_1] \cap [\lambda'_{1y^1} \times s_1] = -2$. λ_{1y^1} и λ'_{1y^1} пересекаются по точке, так что дело сводится к самопересечению представителя $[s_1]$ в слое над этою точкою, которое равно -2.

Аналогично вообще $[\lambda_{qy^i} \times s_q] \cap [\lambda'_{qy^i} \times s_q] = -2$ $(q = 1, 2; i = 1, 2, 3)$.

Остальные пересечения равны 0. Для всех циклов, у которых в обозначении нет λ, укажем (как выше) сечение, из расмотрения которого следует, что пересечение равно нулю:

	t_{z^1x}	t_{z^2x}	t_{z^3x}	$t_{v^1u^2x}$	$t_{v^2u^3x}$	$t_{v^3u^1x}$	f_1	$\lambda_{1y^1} \times s_1$	.....
t'_{z^1x}	✓	z^1	z^1	z^1	z^1	z^1	x	x	x
$t'_{v^1u^2x}$	z^2	z^1	z^1	✓	z^1	z^2	x	x	x
$t_{u^1v^2w^3x}$	z^2	z^1	z^1	z^3	z^1	z^2	✓	0	0
$\lambda'_{1y^1} \times s_1$	0	0	0	0	0	0	0	✓	0

Равенство нулю остальных нерассмотренных пересечений очевидно следует из соображений, изложенных в предыдущем разделе:

(1) t'_{z^ix} и $t'_{v^ju^kx}$ не пересекаются с $\lambda_{qy^l} \times s_q$, потому что орбиты T'_{z^ix} и $T'_{v^ju^kx}$ не пересекаются с 3-торами F_q (это следует из рассмотрения сечения, где меняется только x).

(2) $t_{u^1v^2w^3x}$ не пересекается с $\lambda_{qy^i} \times s_q$, потому что орбита $T_{u^1v^2w^3x}$ пересекается с F_q по конечному количеству точек, и малым шевелением можно добиться, чтобы они не попадали на Λ_{qy^i}.

(3) $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ не пересекается с t_{z^ix} и с $t_{u^jv^kx}$, потому что орбиты T_{z^ix} и $T_{u^jv^kx}$ не пересекаются с неподвижными торами (поскольку неподвижные торы 3-мерные и эти торы тоже 3-мерные; сумма размерностей меньше 7, так что в общем положении у них нет точек пересечения).

(4) $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ не пересекается с f_1, потому что цикл f_1 по построению не пересекается с нулевыми сечениями расслоений, приклеенных вместо особых торов, – а цикл $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ из них состоит.

(5) $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ не пересекается с $\lambda_{1y^i} \times s_1$ при $i = 2, 3$, потому что Λ_{1y^2} и Λ_{1y^3} содержатся в Λ'_{1y^1}; параллельным переносом внутри F_1 их можно из Λ'_{1y^1} вынести, так что пересекаться в F_1 они не будут.

(6) $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ не пересекается с $\lambda_{2y^i} \times s_2$, потому что орбиты F_1 и F_2 не пересекаются.

Пересечения, которые не попали в табличку выше, получаются из тех, которые попали, просто циклической перестановкой индексов.

По соображениям как выше, выбранные нами 13 трёхмерных и 13 четырёхмерных циклов составляют базис соответственно H_3 и H_4.

Ещё заметим, что f_2 пересекается с базисными 4-мерными циклами точно так же как f_1, и, значит, они гомологичны. (Хотя это не означает, конечно, что $f_1 \times s_1$ и $f_2 \times s_2$ гомологичны.) Поэтому будем обозначать их класс $[f]$.

5.3. **5-мерных с 5-мерными.**

(1) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{u^1u^2}] = -4[t_{z^3x}]$.

Орбита $T'_{u^1u^2}$ пересекается с самим $T'_{u^1u^2}$ по четырём 3-торам, гомологичным T_{z^3x} (с точностью до ориентации). Эти пересечения не пересекаются с неподвижными торами и поэтому отображаются диффеоморфно на четыре 3-тора, гомологичных t_{z^3x} (с точностью до ориентации).

Разберёмся теперь с ориентацией.

(a) Сначала рассмотрим пересечение $T'_{u^1u^2} \cap \alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$. Положительный базис T_{z^3x} есть u^3v^3x, положительный базис $T'_{u^1u^2}$ есть $v^2v^1u^3v^3x \sim u^3v^3x|v^2v^1$, а положительный базис $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ есть, соответственно, $u^3v^3x|u^2u^1$. Базис $u^3v^3x|v^2v^1|u^2u^1 \sim -u^1v^1u^2v^2u^3v^3x$ отрицательно ориентирован, поэтому пересечение отрицательно. ($\sim$ здесь и далее означает одинаковую ориентацию базисов.)

(b) Теперь найдём ориентацию пересечения $T'_{u^1u^2}$ с остальными элементами своей орбиты. Преобразования из группы Γ переводят T_{z^1x} в себя (с точностью до параллельного переноса) и сохраняют его ориентацию. Поэтому базис T^7, по которому мы определяем ориентацию, при замене $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ на $\gamma\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ (где γ – какой-нибудь элемент из Γ) заменится на $u^3v^3x|v^2u^1|\gamma_*u^2\gamma_*u^1 \sim -\gamma_*u^1\,v^1\,|\gamma_*u^2\,v^2|u^3v^3x$. Поскольку любой элемент нашей группы действует на кординаты u^1, v^1 так же, как и на координаты u^2, v^2, то ориентация базиса не поменяется.

Значит, все 4 пересечения отрицательны.

(2) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{u^3u^1}] = +4[t_{v^2u^3x}]$.

Тор $T'_{u^1u^2}$ параллелен с $T'_{u^3u^1}$ и с $\beta\alpha T'_{u^3u^1}$ (в сечении, где меняется только z^1). С $\alpha^{-1}T'_{u^3u^1}$ и с $\beta\alpha T'_{u^3u^1}$ он пересекается по $T_{v^2u^3x}$ (с точностью до ориентации), а с остальными двумя элементами орбиты по $T_{v^2w^3x} = \alpha\beta\alpha^{-1}T_{v^2u^3x}$ (с точностью до ориентации). (Здесь и далее в таких случаях под равенством имеется в виду совпадение с точностью до параллельного переноса в T^7.) Таким образом, $t'_{u^1u^2} \cap t'_{u^3u^1}$ состоит из 4 3-торов, гомологичных $t_{v^2u^3x}$ (с точностью до ориентации).

Разберёмся с ориентацией.

(a) Сначала пересечение с $\alpha^{-1}T'_{u^3u^1}$. Положительный базис $T'_{u^1u^2}$ есть $v^2v^1u^3v^3x \sim v^2u^3x|v^3v^1$, положительный базис $\alpha^{-1}T'_{u^3u^1}$, соответственно, $u^1u^3u^2v^2x \sim v^2u^3x|u^1u^2$. Базис $v^2u^3x|v^3v^1|u^1u^2 \sim u^3v^3xu^1v^1u^2v^2$ положительно ориентирован, поэтому пересечение положительно.

(b) Преобразование β переводит $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ в себя (с точностью до параллельного переноса) с сохранением ориентации, поэтому пересечение с $\beta\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ точно такое же.

(c) Теперь найдём $T'_{u^1u^2}\cap\beta T'_{u^3u^1}$. Умножим всё на $(\alpha\beta\alpha^{-1})^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}$, чтобы пересечение было $T_{v^2u^3x}$ с точностью до ориентации, и найдём ориентацию. $\alpha\beta\alpha^{-1}T'_{u^1u^2} \cap \alpha(\beta\alpha^{-1}\beta)T'_{u^3u^1} = T'_{u^1u^2} \cap \alpha^2T'_{u^3u^1} = T'_{u^1u^2} \cap \alpha^{-1}T'_{u^3u^1}$, поэтому пересечение как выше, т. е. положительно.

(d) Наконец, $T'_{u^1u^2} \cap \alpha T'_{u^3u^1}$ такое же, как $T'_{u^1u^2} \cap \beta T'_{u^3u^1}$, поскольку $\alpha T'_{u^3u^1}$ совпадает с $\beta T'_{u^3u^1}$ с точностью до параллельного переноса, но с учётом ориентации (как выше).

Итак, все 4 пересечения положительны.

(3) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{u^2u^3}] = +4[t_{v^3u^1x}]$.

$[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{u^2u^3}] = [t'_{u^2u^3}] \cap [t'_{u^1u^2}]$, так что всё получается из предыдущего рассуждения циклической перестановкой индексов.

(4) $[t'_{u^1u^2}] \cap [f_1 \times s_1] = +4[\lambda_{1y^3} \times s_1]$.

Орбита $T'_{u^1u^2}$ пересекается с F_1 по 4 окружностям, гомологичным Λ_{1y^3}, а при разрешении особенностей они переходят в $\lambda_{1y^3} \times s_1$.

Разберёмся с ориентациею. Пересечение $T'_{u^1u^2}$ с F_1 есть окружность Λ_{1y^3}, ориентированная положительно: $v^2v^1u^3y^3x \sim y^3|v^1v^2u^3x$ – положительный базис $T'_{u^1u^2}$, $y^1y^2y^3 \sim y^3|y^1y^2$ – положительный базис неподвижного тора, $y^3|y^1y^2|v^1v^2u^3x \sim y^1v^1y^2v^2u^3y^3x$ – положительный базис T^7.

Пересечение с $\alpha T'_{u^1u^2}$ и с $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ по ориентации такое же: вся разница с предыдущим случаем в том, что v^1 и v^2 заменяются на α_*v^1 и α_*v^2 (или соответственно на α_*^{-1}...); да ещё для α^{-1} получается 2 окружности, а не 1.

Значит, пересечение везде положительно. (Мы рассмотрели только половину орбиты, потому что F_1 неподвижен относительно β.)

Совершенно аналогично $[t'_{u^1u^2}] \cap [f_2 \times s_2] = +4[\lambda_{2y^3} \times s_2]$.

Циклической перестановкой индексов в предыдущем рассуждении получается $[t'_{u^2u^3}] \cap [f_q \times s_q] = +4[\lambda_{qy^1} \times s_q]$, $[t'_{u^3u^1}] \cap [f_q \times s_q] = +4[\lambda_{qy^2} \times s_q]$.

(5) $[f_1 \times s_1] \cap [f_1 \times s_1] = -2[f]$. Пошевелим над каждой точкой тора одинаковым образом нулевое сечение, чтобы получилось трансверсальное

пересечение с непошевелённым; тогда в слое над каждой точкой тора будет 2 точки пересечения, и из них составятся два 3-тора, гомологичных f_1, но с отрицательною ориентацией, так как самопересечение s_1 отрицательно.

Остальные пересечения либо равны 0, либо получаются из разобранных выше циклической перестановкой индексов. (Несколько таких попало в следующую табличку; они отмечены знаком $\sim$.)

	$t'_{u^1u^2}$	$t'_{u^2u^3}$	$t'_{u^3u^1}$	$f_1\times s_1$	$f_2\times s_2$
$t'_{u^1u^2}$	✓	✓	✓	✓	$\sim$
$f_1\times s_1$	(✓)	$\sim$	$\sim$	✓	0

5.4. **4-мерных с 5-мерными.**

(1) $[t'_{u^1u^2}]\cap[t'_{z^3x}]=-6[t_{u^1u^2}]$.

Тор $T'_{u^1u^2}$ пересекается с каждым элементом орбиты T'_{z^3x} по 2-тору, гомологичному $T_{v^1v^2}=\alpha T_{u^1u^2}$.

Положительный базис $T'_{u^1u^2}$ есть $v^2v^1u^3v^3x\sim v^1v^2|v^3u^3x$, положительный базис T_{z^3x} есть $u^1v^1u^2v^2\sim v^1v^2|u^2u^1$, базис $v^1v^2|u^2u^1|v^3u^3x\sim u^1v^1u^2v^2v^3u^3x$ отрицательный, значит пересечение с T'_{z^3x} отрицательно. Преобразования из Γ сохраняют T'_{z^3x} (имеется в виду, как обычно, с точностью до параллельного переноса) и его ориентацию, поэтому с остальными элементами орбиты пересечение такое же.

(2) $[t'_{u^1u^2}]\cap[t'_{v^1u^2x}]=0$.

Тор $T'_{v^1u^2x}$ параллелен с $T'_{u^1u^2}$ (в сечении, где меняется только z^2) и с $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ (в сечении, где меняется z^1), а пересечение с $\alpha T'_{u^1u^2}$ в обоих этих сечениях точка, так что пересечение гомологично T_{z^3} (с точностью до ориентации); с β аналогичная ситуация. Поэтому искомое пересечение есть $\pm[t_{z^3}]\pm[t_{z^3}]$.

Разложим $[t_{z^3}]$ по базису: у него нулевые пересечения со всеми базисными 5-мерными классами, поэтому он гомологичен 0.

(3) $[t'_{u^1u^2}]\cap[t'_{v^2u^3x}]=+[t_{u^3u^1}]$.

Тор $T'_{v^2u^3x}$ пересекается с $T'_{u^1u^2}$ по $T_{v^3v^1}=\alpha T_{u^3u^1}$, с $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ параллелен (в сечении, где только z^2 меняется), с $\alpha T'_{u^1u^2}$ пересекается по $T_{v^3w^1}$; аналогично с β ещё 2 их.

$u^2v^3u^1v^1\sim v^3v^1|u^1u^2$ – положительный базис $T'_{v^2u^3x}$, $v^2v^1u^3v^3x\sim v^3v^1|v^2u^3x$ – положительный базис $T'_{u^1u^2}$, базис $v^3v^1|u^1u^2|v^2u^3x\sim u^1v^1u^2v^2u^3v^3x$ положителен, значит, пересечение с $T'_{u^1u^2}$ положительно.

Посмотрим на пересечение с $\alpha T'_{u^1u^2}$; там всё как выше, только надо v^1 и v^2 заменить на w^1 и w^2; поэтому определяющий ориентацию пересечения базис T^7 будет $u^1w^1u^2w^2u^3v^3x$, а он положителен, следовательно пересечение есть тор $T_{v^3w^1}=\alpha T_{u^3v^1}$, ориентированный положительным базисом v^3w^1.

$\beta T'_{u^1u^2}=\alpha T'_{u^1u^2}$, а $\beta\alpha T'_{u^1u^2}=T'_{u^1u^2}$ (всё с учётом ориентации), а поэтому для этих двух элементов орбиты пересечение будет такое же, как для предыдущих двух.

Итак, полное пересечение есть $2[t_{u^3u^1}]+2[t_{u^3v^1}]$. Надо теперь разложить $[t_{u^3v^1}]$ по базису, для чего достаточно найти пересечения с базисными 5-мерными циклами.

(a) Орбита $T_{u^3v^1}$ параллельна с $T'_{u^1u^2}$ и с $T'_{u^2u^3}$ (в сечении, где меняется z^2).

(b) С тором $T'_{u^3u^1}$ она пересекается, а именно её элементы $\alpha^{-1}T_{u^3v^1}$ и $\beta T'_{u^3v^1}$ – каждый по одной точке. Найдём ориентацию. $v^1v^3u^2v^2x$ – положительный базис $T'_{u^3u^1}$, w^3u^1 – положительный базис $\alpha^{-1}T_{u^3v^1}$. Базис $w^3u^1|v^1v^3u^2v^2x \sim u^1v^1w^3v^3u^2v^2x$ отрицательный, значит пересечение отрицательно. У $\beta T_{u^3v^1}$ положительный базис $-u^3$ $-w^1 \sim u^3w^1$, так что получится $w^1v^1u^3v^3u^2v^2x$ – опять отрицательный базис. Поэтому $[t_{u^3v^1}] \cap [t'_{u^3u^1}] = -2$.

(c) С неподвижными торами орбита $T_{u^3v^1}$ не пересекается, так как он двумерный, а они трёхмерные, поэтому пересечения $[t_{u^3v^1}]$ с $[f_i \times s_i]$ равны 0.

Таким образом, $[t_{u^3v^1}] = -\frac{1}{2}[t_{u^3u^1}]$.

В итоге $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{v^2u^3x}] = 2([t_{u^3u^1}] + [t_{u^3v^1}]) = [t_{u^3u^1}]$.

(4) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{v^3u^1x}] = -[t_{u^2u^3}]$.

Этот случай во многом аналогичен предыдущему. Наверно, его можно свести к предыдущему, но я лучше разберу его подробно как предыдущий.

Пересечения $T'_{v^3u^1x}$ с $\gamma T'_{u^1u^2}$ без учёта ориентации следующие (где γ пробегает группу Γ):

γ	пересечение
1	0
α	$T_{w^2u^3}$
α^{-1}	$T_{u^2u^3}$
β	$T_{w^2u^3}$
$\beta\alpha$	0
$\beta\alpha^{-1}$	$T_{u^2u^3}$

Разберёмся с ориентацией, сперва для $\gamma = \alpha$. Положительный базис $T'_{v^3u^1x}$ есть $u^3v^1u^2v^2 \sim u^3v^1v^2w^2 \sim w^2u^3|v^2v^1$, положительный базис $\alpha T'_{u^1u^2}$ есть $w^2w^1u^3v^3x \sim w^2u^3|v^3w^1x$, базис $w^2u^3|v^2v^1|v^3w^1x \sim -v^1w^1v^2w^2u^3v^3x$ отрицательный, значит пересечение отрицательно.

Для $\gamma = \alpha^{-1}$ всё так же с заменой w^2, w^1 на u^2, u^1; базис получается опять отрицательный.

Для $\gamma = \beta\alpha, \beta\alpha^{-1}$ получаются два совершенно аналогичных случая.

$T_{w^2u^3} = \alpha^{-1}T_{u^2v^3}$, поэтому $[t_{w^2u^3}] = [t_{u^2v^3}] = -\frac{1}{2}[t_{u^2u^3}]$ (это получается из результата предыдущего пункта циклической перестановкой индексов).

Итого $[t'_{u^1u^2}] \cap [t'_{v^3u^1x}] = -2([t_{u^2u^3}] + [t_{w^2u^3}]) = -[t_{u^2u^3}]$.

(5) $[t'_{u^1u^2}] \cap [t_{u^1v^2w^3x}] = 0$.

Это пересечение остоит из 2 торов, гомологичных $[t_{w^3x}]$ с точностью до ориентации. Разложим $[t_{w^3x}]$ по базису: со всеми 5-мерными базисными классами у него пересечение 0, так что этот тор гомологичен нулю.

(6) $[t'_{u^1u^2}] \cap [\lambda'_{1y^3} \times s_1] = 4[s_1]$.

Орбита $T'_{u^1u^2}$ пересекается с Λ'_{1y^3} по 4 точкам (конкретно: $T'_{u^1u^2}$ – по одной, $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ – по двум, $\alpha T'_{u^1u^2}$ – по одной, а β нового ничего не добавляет, потому что фиксирует F_1).

Найдём ориентацию. $y^1y^2|v^2v^1u^3v^3x \sim y^1v^1y^2v^2u^3v^3x$ – положительный базис, так что пересечение с $T'_{u^1u^2}$ положительно. Для случая $\alpha T'_{u^1u^2}$ у нас v^1, v^2 меняются на w^1, w^2, а для случая $\alpha^{-1}T'_{u^1u^2}$ – на u^1, u^2; в обоих случаях базис остаётся положительным. Значит, все 4 пересечения положительны.

При разрешении особенностей 4 точки переходят в 4 сферы s_1.

(7) $[f_1 \times s_1] \cap [t_{u^1v^2w^3x}] = 12[s_1]$.

Орбита $T'_{u^1v^2w^3}$ пересекает F_1 по 12 положительно ориентированным точкам, которые после разрешения особенностей переходят в сферы.

(8) $[f_1 \times s_1] \cap [\lambda'_{1y^1} \times s_1] = -2[\lambda'_{1y^1}] = -2[t_{u^2u^3}]$.

Тор λ'_{1y^1} лежит в f_1, так что по построению $[f_1 \times s_1] \cap [\lambda'_{1y^1} \times s_1]$ равно самопересечению $[\lambda'_{1y^1} \times s_1]$; одинаковым образом пошевелим нулевое сечение расслоения V и получим два 2-тора, гомологичных λ'_{1y^1}.

Теперь надо разложить $[\lambda'_{1y^1}]$ по базисным 2-мерным циклам, для чего достаточно найти пересечения с базисными 5-мерными циклами.

(a) Пересечения с $[t'_{u^1u^2}]$ и с $[t'_{u^3u^1}]$ равны нулю (что следует из рассмотрения сечений, где меняется только z_1); пересечение с $[f_1 \times s_1]$ равно нулю, так как λ'_{1y^1} не пересекается с нулевыми сечениями расслоений V; пересечение с $[f_2 \times s_2]$ равно нулю, так как они по построению лежат в непересекающихся подмножествах M.

(b) Остаётся пересечение с $t'_{u^2u^3}$. Пересечение Λ'_{1y^1} с орбитой $T'_{u^2u^3}$ состоит из 4 точек.
Найдём ориентацию, сначала для пересечения с $T'_{u^2u^3}$: базис $y^2y^3|v^3v^2u^1v^1x \sim u^1v^1|y^2v^2|y^3v^3|x$ положителен. Для остальных элементов орбиты он тоже положителен, так как α действует одинаково на координаты с индексом 2 и с индексом 3.

Итого $[\lambda'_{1y^1}] \cap [t'_{u^2u^3}] = 4$, так что $[\lambda'_{1y^1}] = [t_{u^2u^3}]$.

Остальные пересечения либо равны 0, либо получаются циклической перестановкой индексов из уже найденных.

	t'_{z^1x}	t'_{z^2x}	t'_{z^3x}	$t'_{v^1u^2x}$	$t'_{v^2u^3x}$	$t'_{v^3u^1x}$	$t_{u^1v^2w^3x}$
$t'_{u^1u^2}$	z^1	z^2	✓	✓	✓	✓	✓
$f_1 \times s_1$	x	x	x	x	x	x	✓

	$\lambda'_{1y^1} \times s_1$	$\lambda'_{1y^2} \times s_1$	$\lambda'_{1y^3} \times s_1$	$\lambda'_{2y^1} \times s_2$	$\lambda'_{2y^2} \times s_2$	$\lambda'_{2y^3} \times s_2$
$t'_{u^1u^2}$	z^1	z^2	✓	z^1	z^2	$\sim$
$f_1 \times s_1$	✓	$\sim$	$\sim$	0	0	0

6. Кольцо рациональных когомологий M

Как мы доказали, классы следующих циклов составляют базис групп рациональных гомологий:

H_5	H_2
$t'_{u^2u^3}$ $t'_{u^3u^1}$ $t'_{u^1u^2}$ $f_1 \times s_1$ $f_2 \times s_2$	$t_{u^2u^3}$ $t_{u^3u^1}$ $t_{u^1u^2}$ s_1 s_2
H_4	H_3
t'_{z^1x} t'_{z^2x} t'_{z^3x} $t'_{v^2u^3x}$ $t'_{v^3u^1x}$ $t'_{v^1u^2x}$ $t_{u^1v^2w^3x}$ $\lambda'_{1y^1} \times s_1$ $\lambda'_{1y^2} \times s_1$ $\lambda'_{1y^3} \times s_1$ $\lambda'_{2y^1} \times s_2$ $\lambda'_{2y^2} \times s_2$ $\lambda'_{2y^3} \times s_2$	t_{z^1x} t_{z^2x} t_{z^3x} $t_{v^2u^3x}$ $t_{v^3u^1x}$ $t_{v^1u^2x}$ f $\lambda_{1y^1} \times s_1$ $\lambda_{1y^2} \times s_1$ $\lambda_{1y^3} \times s_1$ $\lambda_{2y^1} \times s_2$ $\lambda_{2y^2} \times s_2$ $\lambda_{2y^3} \times s_2$
H_7	H_0
M	точка

Отобразим эти классы в когомологии изоморфизмом Пуанкаре:

H^2	H^5
a_1 a_2 a_3 b_1 b_2	a'_1 a'_2 a'_3 b'_1 b'_2
H^3	H^4
p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3 r s_{11} s_{12} s_{13} s_{21} s_{22} s_{23}	p'_1 p'_2 p'_3 q'_1 q'_2 q'_3 r' s'_{11} s'_{12} s'_{13} s'_{21} s'_{22} s'_{23}
H^0	H^7
1	v

Теорема 1. *Классы, перечисленные в предыдущей таблице, составляют базис алгебры $H^\bullet(M, \mathbb{Q})$. Произведения базисных классов следующие:*

(1) *2-мерных и 5-мерных:*
$a_i \smile a'_i = 4v, \quad b_m \smile b'_m = -2v.$

(2) *3-мерных и 4-мерных:*
$p_i \smile p'_i = 6v, \quad q_i \smile q'_i = 2v, \quad r_i \smile r'_i = 12v, \quad s_{mi} \smile s'_{mi} = -2v.$

(3) *2-мерных и 2-мерных:*
$a_i \smile a_j = -4\delta_{ijk}\, p'_k + 4|\varepsilon_{ijk}|\, q'_k,$
$a_i \smile b_m = 4s'_{mi},$
$b_m \smile b_m = -2r'.$

(4) *2-мерных и 3-мерных:*
$a_i \smile p_i = -6a'_i,$
$a_i \smile q_j = \varepsilon_{ijk}\, a'_k,$
$a_i \smile s_{mi} = 4b'_m,$
$b_m \smile r = 12b'_m,$
$b_m \smile s_{mi} = -2a'_i.$

Остальные произведения базисных классов размерности $\geqslant 1$ равны 0.

Здесь индексы i, j, k принимают значения $1, 2, 3$, а m – значения $1, 2$. $\delta_{ijk} = 1$ при $i = j = k$, а иначе 0. ε_{ijk} равен 0, когда хотя бы 2 из индексов i, j, k совпадают, а иначе равен знаку перестановки ijk. По повторяющимся индексам суммирование.

References

[1] D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I*, J. Differential Geom, **43** (1996), 291–328. Zbl 0861.53022, MR1424428

[2] D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. II*, J. Differential Geom, **43** (1996), 329–375. Zbl 0861.53023, MR1424428

[3] I. A. Taimanov, *The generalized Kummer construction and cohomology rings of G_2-manifolds*, Sb. Math., **209**:12 (2018). MR3881803

[4] I. A. Taimanov, *A canonical basis of two-cycles on a K3 surface*, Sb. Math., **209**:8 (2018), 1248–1256. MR3833539

[5] A. Kovalev, *Twisted connected sums and special Riemannian holonomy*, J. Reine Angew. Math., **565** (2003), 125–160. Zbl 1043.53041, MR2024648

[6] A. Kovalev, N. Lee, *$K3$ surfaces with non-symplectic involution and compact irreducible G_2-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **151** (2011), 193–218. Zbl 1228.53064, MR2823130

[7] A. Corti, M. Haskins, J. Nordström, T. Pacini, *G_2-manifolds and associative submanifolds via semi-Fano 3-folds*, Duke Math. J., **164** (2015), 1971–2092. Zbl 1343.53044, MR3369307

[8] M. Glezerman, L. Pontryagin, *Intersections in manifolds*, Amer. Math. Soc. Translations, **50** (1951), 149 pp. MR0043467

Igor Vladimirovich Fedorov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: igoron-27@ya.ru