S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1621–1629 (2018) УДК 517.946
DOI 10.33048/semi.2018.15.134 MSC 35A05

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

М.В. УРЕВ, Ш.Х. ИМОМНАЗАРОВ

Abstract. The classical solution of an overdetermined stationary system of second order equations arising in a two-fluid medium is considered. Using the theory of potential and the Green's function for a given system, the existence of the classical solution in the case of specifying the Dirichlet boundary conditions is shown. The influence of the kinetic parameters of the medium on the solution of the system in question has been shown.

Keywords: Two- velocity hydrodynamics, viscous liquid, fundamental solution, potential of double layer, Green's function, the classical solution.

1. Введение

Многофазные многокомпонентные среды широко представлены в различных природных процессах и областях человеческой деятельности. Можно уверено сказать, что с неоднофазными смесями приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Всё это делает задачу описания и изучения таких сред одной из актуальнейших и важнейших проблем механики вообще и механики сплошных сред в частности [1-3]. Гетерогенные среды характеризует невероятное многообразие, взаимовлияние и сложность эффектов, возникающих благодаря неоднофазности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические реакции, капиллярные эффекты, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

Urev, M.V., Imomnazarov, Sh.Kh., The classical solution of one overdetermined stationary system arising in two-velocity hydrodynamics.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-51-41002).

Поступила 31 января 2018 г., опубликована 14 декабря 2018 г.

Основная проблема математического моделирования многофазных смесей заключается в построении замкнутых уравнений движения смеси при заданных физико-химических свойствах каждой фазы в отдельности и заданной исходной структуре смеси. Систематические исследования в области построения моделей многофазных течений были начаты в середине прошлого века. Теории, основанные на предложенном Х.А. Рахматулиным в работе [4] представлении двухфазных сред как взаимопроникающих континуумов, развивались в многочисленных работах российских и зарубежных ученых (Р.И. Нигматулин [1], М. Ишии и др. [5]). В 1986 г. М. Байером и Д. Нунциато [6] была предложена модель двухфазных сжимаемых течений с двумя давлениями, которая и по настоящее время широко используется многими авторами как для теоретических, так и для численных исследований. Моделям течений многофазной сжимаемой среды, основанных на подходе термодинамически согласованных систем законов сохранения посвящены работы [7-8], развиваемые в научной школе академика С. К. Годунова. В работах [9-14] данный подход был успешно применён для построения моделей двухфазных течений, в том числе с учётом фазового перехода. Предположение о формировании частичного расплава путем фазового перехода первого рода позволило В. Н. Доровскому объяснить локализацию в пространстве значительных масс такой субстанции в динамических условиях [15]. При этом эффекты объемной генерации магмы не были учтены. Генерация магмы в условиях сдвиговой деформации мантийных толщ была учтена в [16]. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представлена как вязкая жидкость-1 за счет собственной вязкости либо достигающая необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода по другим причинам. По границам зерен и межзеренным узлам начинает скапливаться магма — жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта модель представляет собой динамику взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду как своеобразный процесс фильтрации. Или по аналогии с уравнением Навье — Стокса эту модель можно назвать двухскоростной системой уравнений Навье — Стокса или уравнением двухскоростной гидродинамики.

В стационарном случае когда имеет место равновесие фаз по давлению и диссипация энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений оказывается переопределенной [17-20], [22].

Исследованию вопросов существования слабых обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнений, описывающих баротропные движения многокомпонентной смеси вязких жидкостей в ограниченной трехмерной области посвящена работа А.Е. Мамонтова и Д.А. Прокудина [21] (см. также указанную там литературу).

В данной работе исследуется вопрос существования классического решения краевой задачи Дирихле для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики.

2. Потенциалы двойного слоя для стационарной системы двухскоростной гидродинамики

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ рассматривается линеаризованная стационарная неоднородная задача двухскоростной гидродинамики [22]

$$\nu \boldsymbol{\Delta} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p = -\rho \mathbf{f}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\tilde{\nu} \boldsymbol{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} - \operatorname{grad} p = -\rho \mathbf{f}, \ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1, \quad \tilde{v}_n = a_2 \quad \text{на } S = \partial\Omega, \tag{3}$$

где $\tilde{v}_n = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к S, ν и $\tilde{\nu}-$ соответствующие сдвиговые вязкости фаз. Здесь и далее векторные величины выделяются жирным шрифтом. Необходимым условием разрешимости системы (1)-(3) служат равенства

$$\int_S \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S a_2 \, dS = 0.$$

Компоненты матриц $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}), \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$, $i, j = 1, 2, 3$ и вектора $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$ фундаментального решения системы (1)-(3) находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\nu \, \Delta \, G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) - \partial_i \, P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = \delta_{ij} \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{'}), \quad \partial_m \, G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = 0, \tag{4}$$

$$\tilde{\nu} \, \Delta \, \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) - \partial_i \, P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = \delta_{ij} \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{'}), \quad \partial_m \, \tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \delta_{ij}$ - сивол Кронекера, $\delta(\mathbf{r})$ - δ-функция Дирака, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. По повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

Следуя методу работы [23, гл.3] решение системы (4)-(5) находится с помощью преобразования Фурье и имеет следующий вид:

$$G_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = -\frac{1}{8\,\pi\,\nu} \left[\frac{\delta_{kj}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_k - x_k^{'})(x_j - x_j^{'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \tag{6}$$

$$\tilde{G}_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = -\frac{1}{8\,\pi\,\tilde{\nu}} \left[\frac{\delta_{kj}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_k - x_k^{'})(x_j - x_j^{'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \tag{7}$$

$$P_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) = -\frac{x_k - x_k^{'}}{4\,\pi\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \tag{8}$$

откуда получим равенство $\nu G_{kj} = \tilde{\nu} \tilde{G}_{kj}$.

Отсюда и из системы уравнений (4)-(5) видно, что по аргументу $\mathbf{r}^{'}$ функции $G_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$, $\tilde{G}_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$, и $P_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\frac{\partial G_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})}{\partial x_m^{'}} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{G}_{mj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})}{\partial x_m^{'}} = 0, \tag{9}$$

$$\nu \, \Delta_{\mathbf{r}'} \, G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) + \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})}{\partial x_i^{'}} = \delta_{ij} \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{'}), \tag{10}$$

$$\tilde{\nu} \, \Delta_{\mathbf{r}'} \, \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) + \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})}{\partial x_i^{'}} = \delta_{ij} \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{'}). \tag{11}$$

Функции $G_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$, $\tilde{G}_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$, и $P_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$ позволяют построить объемные потенциалы

$$v_i(\mathbf{r}) = -\rho \int G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) \, f_j(\mathbf{r}^{'}) \, d\mathbf{r}^{'},$$

$$\tilde{v}_i(\mathbf{r}) = -\rho \int \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})\, f_j(\mathbf{r}^{'})\, d\mathbf{r}^{'},$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})\, f_i(\mathbf{r}^{'})\, d\mathbf{r}^{'},$$

которые в силу равенств (4) и (5) удовлетворяют стационарной неоднородной системе (1)-(2) во всем пространстве. Введем тензоры напряжений в случае двухскоростной гидродинамики с одним давлением:

$$T_{ik}(\mathbf{v}) = -p\,\delta_{ik} + \nu\,(\partial_i v_k + \partial_k v_i),$$

$$\tilde{T}_{ik}(\tilde{\mathbf{v}}) = -p\,\delta_{ik} + \tilde{\nu}\,(\partial_i \tilde{v}_k + \partial_k \tilde{v}_i),$$

для соответствующих ($\mathbf{v}$, p) и ($\tilde{\mathbf{v}}$, p). Тензоры напряжений для сопряженной задачи имеют следующий вид:

$$T_{ik}^{'}(\mathbf{u}) = q\,\delta_{ik} + \nu\,(\partial_i u_k + \partial_k u_i),$$

$$\tilde{T}_{ik}^{'}(\tilde{\mathbf{u}}) = q\,\delta_{ik} + \tilde{\nu}\,(\partial_i \tilde{u}_k + \partial_k \tilde{u}_i),$$

для соответствующих ($\mathbf{u}$, q) и ($\tilde{\mathbf{u}}$, q).

Для получения формул Грина для двухскоростной системы Стокса (1), (2) воспользуемся тождеством [23, с.72]

$$\partial_k \left[T_{ik}(\mathbf{v})\, u_i\right] = \frac{\nu}{2}\,(\partial_k\, u_i + \partial_i\, u_k)\,(\partial_k\, v_i + \partial_i\, v_k) + (\nu\Delta\, v_i - \partial_i\, p)\; u_i.$$

Аналогично получим, что

$$\partial_k \left[T_{ik}^{'}(\mathbf{u})\, v_i\right] = \frac{\nu}{2}\,(\partial_k\, v_i + \partial_i\, v_k)\,(\partial_k\, u_i + \partial_i\, u_k) + (\nu\Delta\, u_i + \partial_i\, q)\; v_i.$$

Эти тождества справедливы для любых гладких соденоидальных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ и гладких функций p, q. Интегрируя эти тождества по области Ω и вычитая из одного полученного таким образом равенства другого, получим формулу Грина для векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ и функций p, q, отвечающую системе Стокса (1)

$$\int_\Omega \left[(\nu\Delta\, v_i - \partial_i\, p)\; u_i - (\nu\Delta\, u_i + \partial_i\, q)\; v_i\right]\, d\mathbf{r} =$$

$$= \int_S \left[T_{ik}(\mathbf{v})\, u_i\, n_k - T_{ik}^{'}(\mathbf{u})\, v_i\, n_k\right]\, dS. \tag{12}$$

Аналогично, используя тензоры $\tilde{T}_{ik}(\tilde{\mathbf{v}}), \tilde{T}_{ik}^{'}(\tilde{\mathbf{u}})$ вместо $T_{ik}(\mathbf{v}), T_{ik}^{'}(\mathbf{u})$ и векторы $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ вместо $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, получим формулу Грина для векторов $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ и функций p, q, отвечающую системе Стокса (2)

$$\int_\Omega \left[(\tilde{\nu}\Delta\, \tilde{v}_i - \partial_i\, p)\; \tilde{u}_i - (\tilde{\nu}\Delta\, \tilde{u}_i + \partial_i\, q)\, \tilde{v}_i\right]\, d\mathbf{r} =$$

$$= \int_S \left[\tilde{T}_{ik}(\tilde{\mathbf{v}})\, \tilde{u}_i\, n_k - \tilde{T}_{ik}^{'}(\tilde{\mathbf{u}})\, \tilde{v}_i\, n_k\right]\, dS. \tag{13}$$

С помощью формул (12), (13) и фундаментальных решений $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}), \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'})$ можно получить интегральное представление любого решения $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}, p$ неоднородной системы (1), (2) через свободный член $-\rho\mathbf{f}$ и значения $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$ и $T_{ij}(\mathbf{v}), \tilde{T}_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})$ на S

$$v_k(\mathbf{r}) = -\rho \int_\Omega G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) f_i(\mathbf{r}^{'})\, d\,\mathbf{r}^{'} + \int_S T_{ij}^{'}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}))_{\mathbf{r}'} v_i n_j\, dS_{\mathbf{r}'} -$$

$$\int_S G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}) T_{ij}(\mathbf{v}) n_j\, dS_{\mathbf{r}'}, \tag{14}$$

$$\tilde{v}_k(\mathbf{r}) = -\rho\int_\Omega \tilde{G}_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})f_i(\mathbf{r}^{'})\,d\,\mathbf{r}^{'} + \int_S \tilde{T}_{ij}^{'}(\tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}))_{\mathbf{r}'}\tilde{v}_i n_j\,dS_{\mathbf{r}'} -$$

$$\int_S \tilde{G}_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\tilde{T}_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})n_j\,dS_{\mathbf{r}'}, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = (G_{k1}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),\, G_{k2}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),\, G_{k3}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})),$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = (\tilde{G}_{k1}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),\, \tilde{G}_{k2}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),\, \tilde{G}_{k3}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})).$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho\int_\Omega P_i(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\,f_i(\mathbf{r}^{'})\,d\mathbf{r}^{'} - \int_S P_i(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})T_{ij}(\mathbf{v})\,n_j\,dS_{\mathbf{r}'} -$$

$$2\nu\int_S \partial_j\,P_i v_i n_j\,dS_{\mathbf{r}'}. \tag{16}$$

Интегралы по поверхности в (14), (15) и (16) дают выражения потенциалов простого и двойного слоев. Ввиду отличия задач (1) и (2) только коэффициентами ν и $\tilde{\nu}$ (без учета краевых условий), будем рассматривать здесь только задачу Стокса для $\mathbf{v}$ и p. Определим потенциал двойного слоя с плотностью $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$ для задачи (1) как поверхностные интегралы

$$W_k(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = \int_S T_{ij}^{'}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}))_{\boldsymbol{\eta}}\,\varphi_i(\boldsymbol{\eta})n_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\Pi(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = -2\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\int_S P_k(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta})\varphi_k(\boldsymbol{\eta})n_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Подставляя в эти формулы явные выражения для $\mathbf{G}_k$ и P_k из (6) и (8), получим [23, с.75]

$$W_k(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = -\frac{3}{4\pi}\int_S \frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\eta}|^5}\,\varphi_i(\boldsymbol{\eta})n_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\Pi(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_S \frac{x_k-\eta_k}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\eta}|^3}\,\varphi_k(\boldsymbol{\eta})n_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Положим

$$K_{ij}(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}) = -\frac{3}{4\pi}\frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\eta}|^5}\,n_k(\boldsymbol{\eta}),$$

$$K_j(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}) = \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{x_j-\eta_j}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\eta}|^3}\,n_k(\boldsymbol{\eta}).$$

Теперь потенциалы двойного слоя $\mathbf{W}$ и Π могут быть записаны более кратко

$$W_i(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = \int_S K_{ij}(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta})\,\varphi_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\Pi(\mathbf{r},\boldsymbol{\varphi}) = \int_S K_j(\mathbf{r},\boldsymbol{\eta})\,\varphi_j(\boldsymbol{\eta})\,dS_{\boldsymbol{\eta}}.$$

3. Функции Грина для стационарной системы двухскоростной гидродинамики

Знание основных сингулярных решений $G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})$, $P_i(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})$ позволяет построить матрицы Грина $\Gamma_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), \tilde{\Gamma}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})$ и вектор $R_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})$ для двухскоростной системы Стокса (1), (2) в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) - g_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) - \tilde{g}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}),$$

$$R_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = P_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) - r_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}).$$

Функции $g_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), \tilde{g}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), r_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})$ определяются как решения двухскоростной системы Стокса (1), (2) с нулевой правой частью

$$\nu\,\Delta\, g_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = \frac{\partial}{\partial x_i} r_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = 0,$$

$$\tilde{\nu}\,\Delta\, \tilde{g}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = \frac{\partial}{\partial x_i} r_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{g}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = 0,$$

$$g_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\big|_{\mathbf{r}\in S} = G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\big|_{\mathbf{r}\in S}, \quad \tilde{g}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\big|_{\mathbf{r}\in S} = \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\big|_{\mathbf{r}\in S}.$$

4. Решение стационарной системы двухскоростной гидродинамики

Решение системы (1)-(3) с одним давлением p сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача Стокса для $\mathbf{v}$ и p

$$\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} - \operatorname{grad} p = -\rho\mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}|_S = \mathbf{a}_1. \tag{17}$$

Затем при найденном давлении p из решения задачи (17) определяется скорость $\tilde{\mathbf{v}}$ как решение задачи

$$\boldsymbol{\Delta}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{F},\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ в } \Omega,\ \tilde{v}_n|_S = a_2,\ \text{где } \mathbf{F} = \frac{1}{\tilde{\nu}}\big(\operatorname{grad} p - \rho\mathbf{f}\big). \tag{18}$$

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу f и поле скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона.

Решение системы (17) ищем в виде $(\mathbf{v},p) = (\mathbf{v}_1,p_1) + (\mathbf{v}_2,p_2)$, где $(\mathbf{v}_1,p_1)-$ решение неоднородной системы (17) при нулевом граничном условии для $\mathbf{v}_1$, а $(\mathbf{v}_2,p_2)-$ решение однородной системы (17) с граничным условием $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1$ на S.

Решение неоднородной системы (17) для $\mathbf{v}_1$ и p_1 при нулевом граничном условии для $\mathbf{v}_1$ дается формулами

$$v_{1i}(\mathbf{r}) = -\rho\int_\Omega \Gamma_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) f_j(\mathbf{r}^{'})\,d\mathbf{r}^{'},$$

$$p_1(\mathbf{r}) = -\rho\int_\Omega R_j(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) f_j(\mathbf{r}^{'})\,d\mathbf{r}^{'}.$$

Для однородной системы (17) справедливо следующее утверждение.

Однородная задача для системы (17) относительно $(\mathbf{v}_2,p_2)$ однозначно разрешима при $\mathbf{a}_1\in\mathbf{C}(S)$ и $\int_S \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$. Решение аналитично внутри Ω и непрерывно вплоть до границы S.

Решение $\mathbf{v}_2$ однородной задачи (17) будем искать в виде потенциала двойного слоя $\mathbf{W}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi})$. Для определения плотности $\boldsymbol{\varphi}$ получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$a_{1i}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\varphi_i(\boldsymbol{\xi}) + \int_S K_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\, \varphi_j(\boldsymbol{\eta})\, dS_{\boldsymbol{\eta}}, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in S. \tag{19}$$

В [23, с.82] доказано, что для разрешимости системы (19) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\int_S \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

Решение $\boldsymbol{\varphi}$ системы (19) позволяет представить $\mathbf{v}_2$ в виде потенциала двойного слоя:

$$\mathbf{v}_{2i}(\mathbf{r}) = \int_S K_{ij}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})\, \varphi_j(\boldsymbol{\eta})\, dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

а p_2 в виде:

$$p_2(\mathbf{r}) = \int_S K_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})\, \varphi_j(\boldsymbol{\eta})\, dS_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Перейдем к задаче (18). Применяя формулы векторного анализа $\triangle v = \operatorname{div} \operatorname{grad} v$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ и $\boldsymbol{\Delta} \mathbf{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$ получим, что $\operatorname{div} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \triangle(\operatorname{div} \mathbf{v})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (18) является выполнение условия

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\tilde{\nu}} \operatorname{div} \big(\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{f} \big) = 0,$$

справедливость которого следует из (17) после применения к обоим частям уравнения оператора div и приведенных формул векторного анализа. Решение задачи (18) будем искать в виде суммы $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2$. Система уравнений для определения $\tilde{\mathbf{v}}_1$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}, \ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 = 0, \ \text{где} \ \operatorname{div} \mathbf{F} = 0. \tag{20}$$

Для решения задачи (20) продолжим соленоидально вектор $\mathbf{F}$ в область Ω_1, целиком содержащую область Ω и ограниченную поверхностью S_1, потребовав выполнения условия $F_n = 0$ на S_1. Из соленоидальности $\mathbf{F}$ в области Ω_1 следует непрерывность нормальной составляющей F_n вектора $\mathbf{F}$ на границе S. Такое продолжение приводится, например, в [24, с.386]. Теперь решение задачи (20) можно представить в виде объемного потенциала

$$\tilde{\mathbf{v}}_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_1} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}^{'}) d\mathbf{r}^{'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{'}|}.$$

Отметим, что для $\tilde{\mathbf{v}}_1$ выполняется условие $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 = 0$ [24, с.387].

Вектор-функцию $\tilde{\mathbf{v}}_2$ определим как $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \operatorname{grad} \chi$, где $\chi-$ решение задачи Неймана

$$\triangle \chi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = -\tilde{v}_{1n} + a_2 \text{ на } S. \tag{21}$$

Ввиду соленоидальности $\tilde{\mathbf{v}}_1$ и условия $\int_S a_2\, dS = 0$ получим, что $\int_S (-\tilde{v}_{1n} + a_2)\, dS = 0$. Таким образом, для задачи (21) выполнено необходимое условие разрешимости. Так как $\boldsymbol{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{0}$, то вектор-функция $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2$ действительно является решением задачи (18).

5. Заключение

Рассмотрена краевая задача Дирихле для переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике. Показано, что решение данной задачи сводится к последовательному решению двух задач: задаче Стокса для одной из скоростей и давления и переопределенной краевой задаче для векторного уравнения Пуассона относительно второй скорости с массовой силой, обусловленной градиентом давления. Это обстоятельство приводит к ассимметрии для скоростей решения исходной краевой задачи и, следовательно, влияет на решение второй краевой задачи. Получены формулы для решения рассмотренных краевых задач. Показано существование классического решения задачи Дирихле для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением. Показано влияние кинетических и физических параметров на решение стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

References

[1] R.I. Nigmatulin, *Foundations of mechanics of heterogeneous media*, Moscow: Nauka, 1978. (in Russian). MR0518814

[2] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media*, Vol. 1, Moscow: Nauka, 1987. (in Russian).

[3] S.L. Soo, *Fluid dynamics of mulmiphase system*, Moscow: Mir, 1975. (in Russian).

[4] Kh.A. Rakhmatulin, *Basics of gas dynamics of interpenetrating motions of continuous media*, Applied mathematics and mechanics, **20**:2 (1956), 184—195. (in Russian). Zbl 0091.18103

[5] M. Ishii, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, NASA STI/Recon Technical Report A., **75** (1975), 29657. Zbl 0325.76135

[6] M. Baer, J. Nunziato, *A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials*, International Journal of Multiphase Flow, **12**:6 (1986), 861—889. Zbl 0609.76114

[7] E. Romenskiî, *Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics*, Godunov methods, (2001), 745—761. MR1963637

[8] S. Godunov, E. Romenskiî, *Elements of continuum mechanics and conservation laws*, Novosibirsk: Scientific book, 1998. (in Russian). Zbl 1053.74001

[9] E. Romenskiî, E. Toro, *Compressible two-phase flows: two-pressure models and numerical methods*, Comput. Fluid Dyn. J., **13** (2004), 403—416.

[10] E. Romenskiî, A. Resnyansky, E. Toro, *Conservative hyperbolic model for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures*, Quarterly of applied mathematics, **65**:2 (2007), 259—279. MR2330558

[11] E. Romenskiî, D. Drikakis, E. Toro, *Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow*, Journal of Scientific Computing, **42**:1 (2010), 68—95. MR2576365

[12] E. Romenskiî, *Hyperbolic systems of conservation laws for compressible multiphase flows based on thermodynamically compatible systems theory*, Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2012: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics / AIP Publishing, 1479 (2012), 62—65.

[13] G. La Spina, M. de'Michieli Vitturi, *High-resolution finite volume central schemes for a compressible two-phase model*, SIAM Journal on Scientific Computing, **34**:6 (2012), B861—B880. MR3029835

[14] D. Zeidan, *On a Further Work of Two-phase Mixture Conservation Laws*, Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2011: International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics / AIP Publishing, 1389 (2011), 163—166.

[15] V.N. Dorovsky, *Formation of dissipative structures in the process of irreversible momentum transfer of the lithosphere*, Geology and Geophysics, **6** (1987), 108–117. (in Russian).

[16] V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, *Theory of partial melting*, Geology and Geophysics, **9** (1989), 56–64. (in Russian).

[17] Kh.Kh. Imomnazarov, Sh.Kh. Imomnazarov, M.M. Mamatkulov, E.G. Chernykh, *The fundamental solution for the stationary equation of two-speed hydrodynamics with one pressure*, Siberian J. Industr. Math., **17**:4 (2014), 60–66. (in Russian). MR3364393

[18] Kh.Kh. Imomnazarov, P.V. Korobov, N.M. Zhabborov, *Conservation Laws for the two-velocity hydrodynamics equations with one pressure*, Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, **16** (2013), 35–44.

[19] N.M. Zhabborov, Kh.Kh. Imomnazarov, P.V. Korobov, *Three-dimensional vortex flows of two–velocity incompressible media in the case of constant volume saturation*, J. of Math. Sciences, **211**:6 (2015), 760—766. MR3424177

[20] Zh. Baishemirov, Jian-Gang Tang, Kh. Imomnazarov, M. Mamatqulov, *Solving the problem of two viscous incompressible fluid media in the case of constant phase saturations*, Open Eng., **6** (2016), 742—745.

[21] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izvestiya Ross. Akad. Nauk, Ser. Math., **82**:1 (2018), 140—185. MR3749599

[22] M.V. Urev, Kh.Kh. Imomnazarov, Jian-Gang Tang, *A boundary value problem for one overdetermined stationary system emerging in the two-velocity hydrodynamics*, Sib. Zh. Vychisl. Mat., **20**:4 (2017), 425–437. MR3733355

[23] O.A. Ladyzhenskaya, *Mathematical problems of viscous incompressible fluid dynamics*, Moscow: Nauka, 1970. (in Russian). MR0271559

[24] A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky, *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1972. (in Russian). MR0344638

Sherzad Kholmatgonovich Imomnazarov
ICM&MG SB RAS,
6,pr. Lavrent'eva,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: imom@omzg.sscc.ru

Mikhail Vadimovich Urev
ICM&MG SB RAS,
6, pr. Lavrent'eva,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Siberian Institute of management-the branch of Ranepa,
6, Nizegorodskaya str.,
Novosibirsk, 630102, Russia
E-mail address: mih.urev2010@yandex.ru