S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1651–1662 (2018) УДК 517.544
DOI 10.33048/semi.2018.15.136 MSC 47A68

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А.Ф. ВОРОНИН

Abstract. In this paper we an equivalen find a connection between the generalized Riemann boundary value problem (also known under the name of the Markushevich boundary problem or the $\mathbb{R}$-linear problem) and convolution equation of the first and second kind on a finite interval. In addition, as a consequence of the connection of the Markushevich boundary problem and equation in convolution of the second kind, the enough conditions for the correct solvability of the Markushevich boundary problem are obtained. This article is a continuation of the author's work «On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener-Hopf equation», Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 412–421.

Keywords: $\mathbb{R}$-linear problem, problem of Markushevich, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique, convolution equations.

1. Введение

Данная статья является продолжением работы автора [1]. Прежде чем перейти непосредственно к рассматриваемым в работе задачам введем следующие обозначения (такие же как в [1]).

Voronin, A.F., A generalized Riemann boundary value problem and integral convolutions equations of the first and second kinds on a finite interval.

Работа поддержана интеграционным проектом СО РАН (грант 0314-2018-0010).

Поступила 22 августа 2018 г., опубликована 14 декабря 2018 г.

Для $1 \le n, m \le 2$ положим $L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt,\ x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ – расширенная вещественная прямая; $W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при C=0 соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n\times n}$, $W_{0\pm}^{n\times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при W будем опускать. Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Рассмотрим обобщенную краевую задачу Римана (известную также под названием задачи Маркушевича или задачи $\mathbb{R}$ - линейного сопряжения) о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где

$$a, b \in W,\quad a(x) \ne 0,\ x \in \mathbb{R},\ c \in W_0. \tag{0.2}$$

Изучению задачи (0.1)-(0.2) посвящено много работ (библиографию см. в [1]).

Рассмотрим также уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале $(0, \tau)$:

$$\lambda\, u(t) - \int\limits_0^{\tau} k(t-s)u(s)\,ds = f(t),\quad t \in (0, \tau), \tag{0.3}$$

где

$$k \in L_1(R),\quad f \in L_1(0, \tau),\ \tau > 0,\ \lambda = 0, 1. \tag{0.4}$$

Решение $u(t)$ уравнений (0.3) при условии (0.4) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau, \tau)$ не влияют на решение уравнения (0.3). Для удобства считаем, что $k(t)$ — заданная функция при $t \in (-\tau, \tau)$ и произвольная при $t \notin (-\tau, \tau)$.

Развитой теории уравнений (0.3) (задач (0.3)-(0.4)), также как и теории задачи (0.1)-(0.2), к настоящему времени не существует. Поэтому, продвижение в решении одной из этих задач весьма важно, как для построения соответствующих теорий, так и для приложений, которые для этих задач достаточно обширные.

В данной работе будут найдены условия эквивалентной разрешимости задачи Маркушевича (0.1) и уравнений в свертках (0.3) для $\lambda = 1, 0$ при следующем ограничении на ядро k:

$$k(t) = k_+(t) + \overline{k_+(-t)},\ t \in R, \tag{0.5}$$

где $k_+(t) = \theta(t)\,k(t)$, θ – функция Хевисайда. Кроме того, как следствие связи задачи (0.1)-(0.2) и уравнения в свертках второго рода, в работе получены достаточные условия для корректной разрешимости задачи Маркушевича (0.1)-(0.2). В п.3 приведены лемма 3 и теорема 4 о связи задачи Маркушевича (0.1) и уравнения в свертках (0.3) при $\lambda = 0$. Доказательства леммы 3 и теоремы 4 проведены для общего случая, когда $\lambda = 0, 1$. Эти доказательства проходят и для теорем 1,2, соответственно (при $\lambda = 1$).

Отметим, что связь между обобщенной краевой задачей Римана (0.1)-(0.2) и задачей (0.3)-(0.5) $\big($при $\lambda = 1,\ k(t) = 0,\ t \notin (-\tau, \tau)\big)$ впервые была получена в работе автора [1].

Краевой задаче Маркушевича (0.1)-(0.2) соответствует [2, §3] векторный аналог – краевая задача Римана для вектор-функции размера 2. Приведем здесь лемму из [3] об эквивалентности этих двух краевых задач.

Рассмотрим краевую задачу Римана на $\mathbb{R}$, в которой требуется определить вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ из краевого условия:

$$\Psi^+(x) = M(x)\overline{\Psi^+(x)} + q(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.6}$$

где

$$M \in \mathcal{G}W^{2\times 2},\ q \in W_0^{2\times 1},\ M = \frac{1}{\overline{a}}\begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\overline{b} \end{pmatrix}, \tag{0.7}$$

$$q_1 = \frac{\overline{a}c - b\overline{c}}{\overline{a}},\ q_2 = -\frac{\overline{c}}{\overline{a}}. \tag{0.8}$$

Здесь классы функций $W_0^{2\times 1}$, $W_{0\pm}^{2\times 1}$ определены по аналогии с классами $W_0^{2\times 2}$, $W_{0\pm}^{2\times 2}$, соответственно. Например, условие $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ означает, что

$$\Psi^+ = (\Psi_1^+, \Psi_2^+)^T,\ \Psi_j^+ \in W_{0+},\ j = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования.

Справедлива следующая [3]

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (0.2). Тогда для существования решения задачи Маркушевича (0.1) необходимо и достаточно существование решения краевой задачи Римана (0.6)-(0.8). Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами*

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x),\ \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}. \tag{0.9}$$

Заметим, что система уравнений (0.6) достаточно элементарно получается, если рассмотреть уравнение (0.1) и комплексно сопряженное к нему уравнение как систему двух (алгебраических) уравнений относительно вектор функции $\Psi^+(x)$, определенной в (0.9).

1. Предварительные результаты. На алгебре W_0 определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^{\pm}\ :\ W_0\ \to\ W_{0\pm},\ P_0^{\pm}\mathcal{F}g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}g(t)\theta(\pm t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I,\ \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}g(x)\}(t) = g(t)\theta(\pm t),\ t \in R,$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье.

Положим

$$k_{\pm}(t) := \theta(\pm t)k(t),\ \mathcal{F}k_{\pm}(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}k_{\pm}(t)\,dt, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{F}k_{\lambda\pm}(x) := \mathcal{F}k_{\pm}(x) + \frac{1}{2}(1-\lambda),\ f(t) := 0,\ t\overline{\in}(0,\tau).$$

Рассмотрим задачу нахождения функции $u \in L_1(0,\tau),\ u(t) = 0,\ t \notin (0,\tau)$ из функционального уравнения

$$\mathcal{F}u(x) - P_0^+\{\mathcal{F}k_{\lambda-}(x)\mathcal{F}u(x)\} - e^{ix\tau}P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x)\mathcal{F}u(x)\} = \\ = \mathcal{F}f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

В работе автора [4, утверждение 1.2] (см. также [5, лемма 2]) была, фактически, показана эквивалентность этих двух задач, задачи (0.3)-(0.4) и задачи (1.2). В самом деле, в выше цитированных работах считалось, что $k(t) = 0,\ t \notin (-\tau,\tau)$. Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau,\tau)$ не влияют на решение уравнения (задачи) (1.2) в виду того, что

$$P_0^+\{\mathcal{F}k_-(x)\mathcal{F}u(x)\} = P_0^+\{\mathcal{F}\{\chi_{(-\tau,0)}(t)k_-(t)\}(x)\mathcal{F}u(x)\},$$

$$P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x)\} = P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}\{\chi_{(0,\tau)}(t)k_+(t)\}(x)\mathcal{F}u(x)\},$$

где $\chi_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$ — характеристическая функция интервала (α_1,α_2). Кроме того, имеет место очевидное равенство

$$P_0^+\{\mathcal{F}k_{\lambda-}(x)\mathcal{F}u(x)\} + e^{ix\tau}P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x)\mathcal{F}u(x)\} = \\ = P_0^+\{\mathcal{F}k_-(x)\mathcal{F}u(x)\} + e^{ix\tau}P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x)\} + (1-\lambda)\mathcal{F}u(x).$$

Таким образом, из [4, утверждение 1.2](или из [5, лемма 2]) и вышестоящих трех равенств вытекает

Предложение 1. *Пусть выполнены условия (0.4),(1.1). Тогда уравнение (0.3) эквивалентно уравнению (1.2).*

Сопоставим теперь, эквивалентным образом, задаче (0.3)-(0.4) (или задаче (1.2)) следующую краевую задачу Римана по аналогии с [4, лемма 1.1], [5, теорема 1].

Для вектор-функций $\Phi^{\pm} \in W_{0\pm}^{2\times1}$ рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ краевую задачу Римана :

$$\Lambda_{\lambda}^-(x)\,\Phi^+(x) = \Omega(x)\,\Phi^-(x) + \omega(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где

$$\Lambda_{\lambda}^{\pm}(x) = 1 - \mathcal{F}k_{\lambda\pm}(x),\ \Omega(x) = \\ = -\begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda-}(x) \\ e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x) & 1 - \mathcal{F}k_{\lambda-}(x) - \mathcal{F}k_{\lambda+}(x) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$\omega_1(x) = \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}k_{\lambda-}(x),\ \omega_2(x) = \mathcal{F}f(x)e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x). \tag{1.5}$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (0.4) и (1.1). Тогда задача (0.3)-(0.4) эквивалентна краевой задаче Римана (1.3)-(1.5) с дополнительным условием*

$$\hat{u}_1(x) := \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau}\Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x) \in W_{0+},\ e^{-ix\tau}\hat{u}_1(x) \in W_{0-}. \tag{1.6}$$

Решения задачи (0.3)-(0.4) (уравнения (1.2)) и краевой задачи (1.3)-(1.6) связаны равенствами

$$\Phi_1(x) = \mathcal{F}k_{\lambda-}(x)\mathcal{F}u(x),\ \Phi_2(x) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x)\mathcal{F}u(x), \\ \mathcal{F}u(x) = \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau}\Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x),\ (\hat{u}_1(x) = \mathcal{F}u(x)), \tag{1.7}$$

где

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-, \ \Phi^\pm(x) = P_0^\pm \Phi(x).$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$, таких что

$$\Lambda_\lambda^\pm(x) \neq 0, \tag{1.8}$$

матрица-функция

$$G(x) := \frac{1}{\Lambda_\lambda^-(x)}\,\Omega(x)$$

разлагается на произведение треугольных матриц:

$$G(x) = -A_-(x)\,A_+(x),$$

где

$$A_+(x) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda-}(x) \\ 0 & \Lambda_\lambda^+(x) \end{pmatrix}, \quad A_-(x) = \frac{1}{\Lambda_\lambda^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x) & \Lambda_\lambda^-(x) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, если при $\lambda = 1$ неравенство (1.8) выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, то матрица $G(x) \in \mathcal{G}W^{2\times 2}$ и допускает левую и правую стандартные факторизации с суммарным индексом $æ_0$:

$$æ_0 = \operatorname{Ind}\det G(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}} \arg\det G(x) = \operatorname{Ind}\frac{\Lambda^+(x)}{\Lambda^-(x)} \geq 0.$$

Доказательство леммы 2 вытекает из предложения 1, и аналогично доказательству леммы 1.1 в [4] (теореме 1 в [5]). В самом деле, пусть справедливо уравнение (1.2). Тогда определив функции Φ_1, Φ_2 первыми двумя равенствами в (1.7) получим, аналогичным образом как в [4]-[5], задачу Римана (1.3)-(1.5). Условие принадлежности (1.6) вытекает из (1.2), т.к. $\hat{u}_1(x) = \mathcal{F}u(x)$ по построению. Обратно, если существует решение задачи Римана (1.3)-(1.6), то положив $\mathcal{F}u(x) := \hat{u}_1(x)$, где функция $\hat{u}_1$ определена в (1.6), получим равенство (1.2). Тогда из предложения 1 следует, что задача (0.3)-(0.4) имеет решение $u \in L_1(0,\tau)$.

Для $\lambda = 0$ из (1.1),(1.4) и определения матрицы G в лемме 2 непосредственно следует, что

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda_0^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_{0-}(x) \\ e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{0+}(x) & 1 - \mathcal{F}k_{0-}(x) + \mathcal{F}k_{0+}(x) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1/2 - \mathcal{F}k_-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\Big(1/2 + \mathcal{F}k_-(x)\Big) \\ e^{-ix\tau}\Big(1/2 + \mathcal{F}k_+(x)\Big) & -\mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}.$$

2. О связи задачи Маркушевича с уравнением в свертках второго рода. В работе автора [1] была установлена связь между усеченным уравнением Винера-Хопфа (0.3) и краевой задачей Маркушевича (0.1) при условии, что $k(t) = 0$ вне интервала $(-\tau, \tau)$. Здесь, в теоремах 1-2 и следствии 1, в отличие от аналогичных теорем и следствия в [1] считается, что $k(t)$ – произвольная функция (из $L_1(R)$) вне интервала $(-\tau, \tau)$ (удовлетворяющая условию симметрии (0.5)), что является весьма важно для более общего представления коэффициента $b(x)$ в (2.3).

Не уменьшая общности, в задаче Маркушевича (0.1) будем полагать [1], что

$$a(x) = \prod_{j=1}^{j=\nu} \frac{x - z_j}{x - \overline{z_j}} =: p^\nu, \ \big(a = 1, \ \nu = 0\big), \tag{2.1}$$

где ν – неотрицательное целое число, $\operatorname{Im} z_j > 0$, j=1,...,$\nu$.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $\lambda = 1$, выполнены условия (0.4)-(0.5) и*

$$\Lambda_1^+(x) \equiv 1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ \nu = Ind\,\Lambda_1^+(x). \tag{2.2}$$

Пусть,кроме того, для задачи Маркушевича выполнено условие (2.1), где точки z_j $(j = 1, ..., \nu)$ являются нулями функции $\Lambda_1^+(z)$ в полуплоскости $Im\, z > 0$ при $\nu > 0$, а коэффициент $b(x)$ имеет следующий общий вид:

$$b(x) = e^{-ix\tau} p^\nu \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{\Lambda_1^+(x)} + F^+(x), \tag{2.3}$$

где $F^+ \in W_+$.

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (1.3)-(1.5) и (0.6)-(0.8), матрицы $G(x)$ и $M(x)$, имеют одинаковый набор (левых) частных индексов.

Более того, справедливо равенство

$$M(x) = -\{\frac{1}{\Lambda_{10}^+(x)}, 1\} \, I_1 \, G(x) \, \{\overline{\Lambda_{10}^+(x)}, 1\}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где

$$\Lambda_{10}^+ = p^{-\nu} \Lambda_1^+, \ I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает (см. также [1]) эквивалентность задач Маркушевича (0.1)-(0.2) и Римана (1.3)-(1.5) (при $\lambda = 1$). Более того, задача Маркушевича (0.1) эквивалентна уравнению в свертках второго рода (0.3) (при выполнении соответствующих ограничений). Другими словами, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и*

$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x), \ f(t) = -\overline{f(\tau - t)}, \ t \in (0, \tau). \tag{2.5}$$

Тогда, если $u \in L_1(0, \tau)$ — решение уравнения (0.3), то функции $\varphi^\pm(x)$, заданные следующими двумя формулами:

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x)\right),$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{2\Lambda_{10}^+(x)}\left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)}\right) + F^+(x)\overline{\varphi^-(x)} \tag{2.6}$$

(функции $\Phi_1^\pm$, $\Phi_2^\pm$ определены в (1.7)), являются решением задачи Маркушевича (0.1)-(0.2).

Если $\varphi^\pm(x)$ — решение задачи Маркушевича (0.1)-(0.2) и выполнено условие

$$e^{-ix\tau}\overline{\varphi^-(x)} \in W_{0-}, \tag{2.7}$$

то функция

$$u(t) = f(t) + \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\varphi^-(x)} - e^{ix\tau}\varphi^-(x)\}(t) \tag{2.8}$$

является решением уравнения второго рода (0.3).

Доказательство теорем 1,2. Для случая $k(t)=0,\ t\notin(-\tau,\tau)$ (при $k_+ = \overline{k_-}$) теоремы 1,2 доказаны в [1] как теоремы 2,3, соответственно. Доказательства теорем 2,3 из [1] полностью переносятся на рассматриваемый здесь общий случай, когда ядро $k(t)$ может принимать произвольные значения (из L_1) вне интервала $(-\tau,\tau)$.

Необходимо отметить, что в работе [1] в равенстве (2.4) после знака равенства пропущен знак минус, а в формулировке теоремы 3 (в [1]) пропущено условие принадлежности (2.7) (см. ниже доказательства леммы 3 и теоремы 4 для случая $\lambda=1$). После внесений исправлений в теорему 3 из [1] ее можно формулировать как теорему 2 из данной работы (заменив при этом условие принадлежности $k\in L_1(R)$ в (0.4) на более сильное условие $k\in L_1(-\tau,\tau),\ k(t)=0,\ t\neq(-\tau,\tau)\big)$. Для случая $\nu=0$ условие (2.7) в настоящей теореме 2 (и теореме 3 в [1]) заведомо выполняется в виду того, что

$$e^{ix\tau}\varphi^-(x)\equiv -e^{ix\tau}\left(b(x)\overline{\varphi^-(x)}+c(x)+\varphi^+(x)\right)\in W_{0+}$$

по построению.

Доказательства леммы 3 и теоремы 4 проходят и для теорем 1,2 (при $\lambda=1$), соответственно.

Из теоремы 2 вытекает (см.[1, следствие 1])

Следствие 1. *Пусть $\lambda=1$, выполнены условия (0.4)-(0.5) и (2.1)-(2.3), где $\nu=0$. Тогда задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c\in W_0$ (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи a,b,c в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное уравнение (0.3) имеет только тривиальное решение.*

Отметим, что коэффициент $b(x)$ в задаче (0.1)-(0.2), как элемент алгебры W, имеет следующий общий вид:

$$b(x)=C\,+\,b^-(x)\,+\,b^+(x),$$

где

$b^{\pm}(x)=\mathcal{F}\beta_{\pm}(x),\ \beta_{\pm}(t)=\beta(t)\theta(\pm t),\ \beta\in L_1(R),\ C=const.$

В теоремах 1-2 и следствии 1, фактически, считалось (см. выражение для $b(x)$ в (2.3)), что

$$\beta_-(t)=0,\ t<-\tau,$$

где $\tau>0$ (число τ может быть как угодно большим).

Положим

$$b^-_\tau(x):=b^-(x)\equiv\mathcal{F}\beta_-(x)=\int_{-\tau}^{0}e^{itx}\,\beta_-(t)\,dt. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что

$$b^-_\infty\equiv\lim_{\tau\to\infty}b^-_\tau=b^-.$$

Приведем теперь достаточные условия для корректной разрешимости задачи Маркушевича для случая $\nu=0$.

Теорема 3. *Пусть в задаче Маркушевича (0.1)-(0.2) $a(x)\equiv1$, а коэффициент $b(x)$ имеет следующий общий вид:*

$$b(x)=e^{-ix\tau}\frac{\mathcal{F}k_+(x)}{\Lambda_1^+(x)}+F^+(x),$$

где

$$k_+ \in L_1(0,\infty)\ \Big(k_+(t)=0,\ t<0\Big),\ \Lambda_1^+(x)\equiv 1-\mathcal{F}k_+(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R},$$

$$Ind\,\Lambda_1^+(x)=0,\ F^+\in W_+.$$

Если

$$1-\mathcal{F}k_+(x)-\overline{\mathcal{F}k_+(x)}\neq 0,\ x\in R,$$

то существует такое (достаточно большое) $\tau_0>0$, что для всех $\tau>\tau_0$ задача Маркушевича корректно разрешима для любого $c\in W_0$.

Доказательство теоремы 3. Задаче Маркушевича (0.1)-(0.2) поставим в соответствие уравнение в свертках второго рода (0.3) при условиях (0.4)-(0.5) и следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$u_\infty(t)-\int\limits_0^\infty k(t-s)u_\infty(s)\,ds=f(t),\quad t\in(0,\infty), \tag{2.10}$$

где

$$f(t)=0,\ t>\tau.$$

Из условий теоремы на функцию k_+ (и условия (0.5)) следует (см., например, [6]), что уравнение (2.10) разрешимо в $L_1(0,\infty)$ для любого $f\in L_1(0,\infty)$, решение единственно (более того, уравнение (2.10) корректно разрешимо для любого $f\in L_1(0,\infty)$), т.к.

$1-\mathcal{F}k(x)\neq 0,\ x\in R,\ \operatorname{Ind}\big(1-\mathcal{F}k(x)\big)=0.$

Тогда из [7, теорема 7.2] получим, что для каждого $\tau>\tau_0$ решение уравнения второго рода (0.3) существует и единственно при любом $f\in L_1(0,\tau)$. Из альтернативы Фредгольма для уравнения второго рода (0.3) и следствия 1 вытекает теорема 3.

3. О связи задачи типа Маркушевича с уравнением в свертках первого рода. Рассмотрим краевую задачу Маркушевича (0.1) при следующем условии на коэффициент $b(x)$:

$$b(x)=b_\tau^-(x)+p^\nu\,e^{-i\tau x}+F_1^+(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $F_1^+\in W_{0+}$, а функции b_τ^- и p^ν определены в (2.9) и (2.1), соответственно.

Легко видеть, что краевая задача Маркушевича (0.1),(3.1) эквивалентна задачи типа Римана (0.6)-(0.8). Другими словами, в данном случае также имеет место лемма 1, в которой выражение: "условие (0.2)" необходимо заменить на следующее выражение: "условие (3.1)".

Найдем связь краевых задач (0.6)-(0.8) и (1.3)-(1.5) при $\lambda=0$. Справедлива

Лемма 3. *Пусть $\lambda=0$, выполнены условия (0.4),(0.5),(2.1) и*

$$\Lambda_0^+(x)\equiv 1/2-\mathcal{F}k_+(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R},\ \nu=Ind\,\Lambda_0^+(x), \tag{3.2}$$

где при $\nu>0$ точки z_j $(j=1,...,\nu)$ являются нулями функци $\Lambda_0^+(z)$ в полуплоскости $Im\,z>0$.

Пусть,кроме того, в задаче Маркушевича (0.1) коэффициент $b(x)$ имеет следующий общий вид:

$$b(x)=e^{-ix\tau}p^\nu\,\frac{\mathcal{F}k_+(x)+1/2}{\Lambda_0^+(x)}+F^+(x), \tag{3.3}$$

где $F^+\in W_{0+}$.

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (0.6)-(0.8) и (1.3)-(1.5), матрицы $M(x)$ и $G(x)$, связаны равенством

$$M(x) = -\{\frac{1}{\Lambda_{00}^{+}(x)}, 1\}\, I_1\, G(x)\, \{\overline{\Lambda_{00}^{+}(x)}, 1\},\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

где

$$\Lambda_{00}^{+} = p^{-\nu}\Lambda_{0}^{+}.$$

Легко видеть, что коэффициент $b(x)$ в условии (3.1) входит в общий вид выражения для $b(x)$ в (3.3), что следует из равенства

$$e^{-ix\tau}p^{\nu}\frac{\mathcal{F}k_{+}(x) + 1/2}{\Lambda_{0}^{+}(x)} = e^{-ix\tau}p^{\nu} + e^{-ix\tau}p^{\nu}\frac{2\mathcal{F}k_{+}(x)}{\Lambda_{0}^{+}(x)}.$$

Доказательство леммы 3. Для простоты доказательства будем считать, что $F^{+} = 0$ [1].

Из условий леммы следует, что

$$\mathcal{F}k_{+}(x) = \overline{\mathcal{F}k_{-}(x)},\ \Lambda_{\lambda}^{+}(x) = \overline{\Lambda_{\lambda}^{-}(x)}.$$

Можно видеть, что

$$1 - |b|^2 = \frac{1 - \mathcal{F}k_{\lambda+} - \overline{\mathcal{F}k_{\lambda+}}}{\Lambda_{\lambda}^{+}\,\overline{\Lambda_{\lambda}^{+}}}. \tag{3.5}$$

В самом деле, равенство (3.5) непосредственно следует из очевидного равенства

$$|b|^2 = \frac{\mathcal{F}k_{\lambda+}\,\overline{\mathcal{F}k_{\lambda+}}}{\Lambda_{\lambda}^{+}\,\overline{\Lambda_{\lambda}^{+}}}.$$

Перемножим теперь матрицы, стоящие в правой части равенства (3.4), с учетом (0.5) и (3.5) получим следующую очевидную цепочку равенств:

$$\{\frac{1}{\Lambda_{00}^{+}}, 1\}\, I_1\, G\, \{\overline{\Lambda_{00}^{+}}, 1\} = -\frac{1}{\Lambda_{\lambda}^{-}}\{\frac{1}{p^{-\nu}\Lambda_{\lambda}^{+}}, 1\}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+} & 1 - \mathcal{F}k_{\lambda-} - \mathcal{F}k_{\lambda+} \\ 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda-} \end{pmatrix} \{p^{\nu}\Lambda_{\lambda}^{-}, 1\} =$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{p^{\nu}e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}}{p^{-\nu}\Lambda_{\lambda}^{+}} & \frac{1-\mathcal{F}k_{\lambda+}-\overline{\mathcal{F}k_{\lambda+}}}{p^{-\nu}\Lambda_{\lambda}^{+}\,\overline{\Lambda_{\lambda}^{+}}} \\ p^{\nu} & -\frac{e^{ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda-}}{\Lambda_{\lambda}^{-}} \end{pmatrix} = -p^{\nu}\begin{pmatrix} b & 1 - |b|^2 \\ 1 & -\overline{b} \end{pmatrix} = -M.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия вышестоящей леммы 3 и*

$$c(x) = -e^{ix\tau}b(x)\overline{\mathcal{F}f(x)},\ f(t) = -\overline{f(\tau - t)},\ t \in (0, \tau). \tag{3.6}$$

Тогда, если $u \in L_1(0,\tau)$ — решение уравнения первого рода (0.3), то функции $\varphi^{\pm}(x)$, заданные следующими двумя формулами:

$$\varphi^{-}(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_{1}^{+}(x)} - \Phi_{2}^{-}(x)\right),$$

$$\varphi^{+}(x) = \frac{1}{2\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}\left(\Phi_{2}^{+}(x) - \overline{\Phi_{1}^{-}(x)}\right) + F^{+}(x)\overline{\varphi^{-}(x)} \tag{3.7}$$

(функции $\Phi_1^{\pm}$, $\Phi_2^{\pm}$ определены в (1.7)), являются решением задачи Маркушевича (0.1).

Если $\varphi^{\pm}(x)$ — решение задачи Маркушевича (0.1) и выполнено условие

$$e^{-ix\tau}\overline{\varphi^{-}(x)} \in W_{0-}, \tag{3.8}$$

то функция

$$u(t) = f(t) + \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\varphi^{-}(x)} - e^{ix\tau}\varphi^{-}(x)\}(t) \tag{3.9}$$

является решением уравнения первого рода (0.3).

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы будем проводить по той же схеме, что и доказательство теоремы 3 в [1]. Доказательство достаточно провести при $F^{+} = 0$ [1].

Разделим левую и правую части краевого условия (1.3) при $\lambda = 0$ на $\Lambda_\lambda^{-}(x)$ получим

$$\Phi^{+}(x) = G(x)\Phi^{-}(x) + g(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

где

$$g(x) = \omega(x)/\Lambda_\lambda^{-}(x), \ \left(\Lambda_\lambda^{-} = \overline{\Lambda_\lambda^{+}}\right),$$

вектор-функция ω определена в (1.5).

Умножим теперь слева левую и правую части краевого условия (3.10) на множитель

$$\{\frac{1}{\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}, 1\}\, I_1.$$

Положив во вновь полученном краевом условии

$$\phi^{+} := \{\frac{1}{\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}, 1\}\, I_1\, \Phi^{+}, \ \phi^{-} := -\{\frac{1}{\overline{\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}}, 1\}\, \Phi^{-}, \tag{3.11}$$

с учетом леммы 3 (равенство (3.4)), имеем

$$\phi^{+}(x) = M(x)\,\phi^{-}(x) + \widetilde{q}(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

где

$$\widetilde{q}(x) = \{\frac{1}{\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}, 1\}\, I_1\, g(x). \tag{3.13}$$

Покажем, что $\widetilde{q} = q$, где вектор-функция q определена в (0.8).

Из (3.13), с учетом вышестоящего выражения для g (и выражения для ω в (1.5)) непосредственно получим

$$\widetilde{q}(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\overline{\Lambda_\lambda^{+}(x)}} \left(\frac{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_{\lambda+}(x)}{\Lambda_{\lambda 0}^{+}(x)}, \mathcal{F}k_{\lambda-}(x)\right)^T. \tag{3.14}$$

С другой стороны, из леммы 1 (равенства в (0.8)) имеем

$$q_1 = c - p^{\nu} b\bar{c}, \ q_2 = -\bar{c}p^{\nu}. \tag{3.15}$$

Подставим в правую часть (3.15) выражение для c из условия (3.6), получим

$$q_1 = b\left(-e^{ix\tau}\overline{\mathcal{F}f} + p^{\nu}e^{-ix\tau}\bar{b}\mathcal{F}f\right), \tag{3.16}$$

$$q_2 = p^{\nu}e^{-ix\tau}\bar{b}\mathcal{F}f. \tag{3.17}$$

Подставим теперь выражение для коэффициента b из условия (3.3)(при $F^+ = 0$) в правую часть равенства (3.17), имеем

$$q_2 = \frac{\mathcal{F}f}{\overline{\Lambda_\lambda^+}}\overline{\mathcal{F}k_{\lambda+}}. \tag{3.18}$$

Из (3.18) и (3.14) непосредственно следует, что $\widetilde{q}_2 = q_2$.

Осталось показать, что $\widetilde{q}_1 = q_1$. Можно видеть, что

$$\overline{\mathcal{F}f(x)} = -e^{-ix\tau}\mathcal{F}f(x). \tag{3.19}$$

В самом деле, из следующего очевидного равенства

$$\overline{\mathcal{F}f(x)} = e^{-ix\tau}\mathcal{F}\{\overline{f(\tau - t)}\}(x),$$

и условия на f в (3.6) следует справедливость (3.19).

Из (3.16) с учетом (3.19) имеем

$$q_1 = b\,\mathcal{F}f\left(1 + p^\nu e^{-ix\tau}\overline{b}\right). \tag{3.20}$$

Подставим теперь в правую часть равенства (3.20) выражение для b из (3.3), получим

$$q_1 = \mathcal{F}f\,p^\nu e^{-ix\tau}\frac{\mathcal{F}k_{\lambda+}}{\Lambda_\lambda^+}\left(1 + \frac{\overline{\mathcal{F}k_{\lambda+}}}{\overline{\Lambda_\lambda^+}}\right) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}f\,\frac{\mathcal{F}k_{\lambda+}}{\Lambda_{\lambda0}^+\,\overline{\Lambda_\lambda^+}}.$$

Из последнего равенства в вышестоящей цепочки равенств и выражения для $\widetilde{q}_1$ в (3.14) следует справедливость требуемого равенства $\widetilde{q}_1 = q_1$.

Таким образом показали, что если $\Phi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ — решение краевой задачи Римана (1.3)-(1.6) при $\lambda = 0$, то функции $\phi^\pm \in W_{0\pm}^{2\times 1}$, определенные в (3.11), будут удовлетворять краевому условию (3.12) (при $\widetilde{q} = q$). Положим

$$\Psi^+ := \frac{1}{2}\left(\phi^+ + \overline{\phi^-}\right). \tag{3.21}$$

Тогда функция Ψ^+ будет удовлетворять краевой задачи Римана (0.6)-(0.8) в виду того, что коэффициенты задач Римана (3.12) и (0.6) совпадают, а матрица M и вектор q обладают следующими свойствами (см. [3]):

$$M = \overline{M^{-1}},\ M\,\overline{q} = -q.$$

Из (3.21) и (3.11) получим

$$\Psi^+ = \frac{1}{2}\left(\{\frac{1}{\Lambda_{\lambda0}^+}, 1\}\,I_1\,\Phi^+ - \{\frac{1}{\Lambda_{\lambda0}^+}, 1\}\,\overline{\Phi^-}\right) \tag{3.22}$$

Искомые формулы (3.7) вытекают из (3.22) и леммы 1.

Верно и обратное утверждение. Если $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ — решение краевой задачи Римана (0.6)-(0.8) (векторного аналога задачи Маркушевича), то функции

$$\phi^+ = \Psi^+,\ \phi^- = \overline{\Psi^+}$$

удовлетворяют краевому условию (3.12) при $\widetilde{q} = q$ по построению. Тогда из (3.11) следует, что

$$\Psi^+ = \{\frac{1}{\Lambda_{\lambda0}^+}, 1\}\,I_1\,\Phi^+,\ \overline{\Psi^+} = -\{\frac{1}{\overline{\Lambda_{\lambda0}^+}}, 1\}\,\Phi^-. \tag{3.23}$$

Из (3.23) получим

$$\Phi^+ = I_1\,\{\Lambda^+_{\lambda 0},\,1\}\,\Psi^+,\ \Phi^- = -\{\overline{\Lambda^+_{\lambda 0}},\,1\}\,\overline{\Psi^+} \tag{3.24}$$

— решение задачи Римана (1.3)-(1.5) при $\lambda = 0$. Из условия (3.8) следует выполнение условия (1.6) в лемме 2. В самом деле, запишем условие (1.6) в лемме 2 через решение задачи Маркушевича, вектор-функцию Ψ^+ $\left(\varphi^+ = \Psi^+_1,\ \varphi^- = \overline{\Psi^+_2}\right)$. Из (1.6) и (3.23) следует, что

$$\hat{u}_1 := \Psi^+_2 - e^{ix\tau}\overline{\Psi^+_2} + \mathcal{F}f \in W_{0+},\ e^{-ix\tau}\hat{u}_1 \in W_{0-},$$

т.к.

$$e^{ix\tau}\overline{\Psi^+_2} = e^{ix\tau}\varphi^- \in W_{0+}.$$

Тогда по лемме 2 уравнение первого рода (0.3) имеет решение $u \in L_1(0,\tau)$, причем, образ Фурье этого решения выражается по формуле (1.7). Из (1.7) с учетом равенств

$$\Phi^+_1 = \Psi^+_2,\ \Phi^-_2 = -\overline{\Psi^+_2},\ \Psi^+_2 = \overline{\varphi^-}$$

имеем

$$\mathcal{F}u(x) = \overline{\varphi^-(x)} - e^{ix\tau}\varphi^-(x) + \mathcal{F}f(x).$$

Из последнего равенства следует справедливость формулы (3.9). Теорема 4 доказана.

Заметим, что в условии (3.6) теоремы 4 первое равенство можно (без ущерба для теоремы) заменить на эквивалентное равенство

$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x),$$

что следует из равенства (3.19).

References

[1] Voronin A. F., *On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener-Hopf equation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 412 – 421. (Russian) MR3796420

[2] Litvinchuk G. S., *Two theorems on the stability of the partial indices of Riemann's boundary value problem and their application*, Izv. vuzov. Matematika, **12** (1967), 47–57. MR0223585

[3] Voronin A. F., *Conditions for the stability and uniqueness of the solution of the Markushevich problem*, Sib. Elektron. Matem. Izv., **14** (2017), 511–517. (Russian) MR3744047

[4] Voronin A.F., *A complete generalization of the Wiener-Hopf method to convolution integral equations with integrable kernel on a finite interval*, Differential Equations, **40**:9 (2004), 1259—1267. MR2199969

[5] Voronin A.F., *Systems of convolution equations of the first and second kind on a finite interval and factorization of matrix-functions* , Sib. Math. J., **53**:5 (2012), 781—791. MR3057680

[6] Krein M. G., *Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments*, Uspekhi mat. nauk, **13**:5 (1958), 3—120. (Russian). MR0102721

[7] I. C. Gohberg and I. A. Fel'dman, *Convolution equations and projection methods for their solution*, Moscow: Nauka, 1971. (Russian) MR0355674

Anatoly Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: voronin@math.nsc.ru