S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 167–174 (2018) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2018.15.016 MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$

А.А. МАХНЕВ, М.Х. ШЕРМЕТОВА

Abstract. We study automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$. It is proved that a distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$ is not vertex-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через

Makhnev, A.A., Shermetova, M.Kh., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061-П.

Поступила 1 декабря 2017 г., опубликована 26 февраля 2018 г.

$\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3.

Предложение. *Пусть* Γ *–– дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2*, в котором окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3. Тогда либо окрестности вершин в* Γ *являются объединениями изолированных* 4*-клик, либо*

(1) $[u]$ *является решеткой и* Γ *–– граф Джонсона* $J(10,5)$ *или граф с массивом пересечений* $\{25,16,1;1,8,25\}$*;*

(2) $[u]$ *является псевдо* $GQ(4,2)$*-графом и* Γ *имеет массив* $\{45,32,12,1;1,6,32,45\}$ *или* $[u]$ *является псевдо* $GQ(4,6)$*-графом и* Γ *–– граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$*;*

(3) $[u]$ *–– граф с параметрами* $(99,14,1,2)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{99,84,1;1,12,99\}$*,* $\{99,84,1;1,14,99\}$ *или* $\{99,84,30;1,6,54\}$*;*

(4) $[u]$ *–– граф с параметрами* $(100,33,8,12)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{100,66,1;1,33,100\}$*;*

(5) $[u]$ *–– граф с параметрами* $(115,18,1,3)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{115,96,8;1,48,115\}$ *или* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$*;*

(6) *граф* $[u]$ *изоморфен треугольному графу* $T(7)$ *и* Γ *–– половинный граф* 7*-куба или имеет параметры* $(169,42,5,12)$ *и Г имеет массив пересечений* $\{169,126,1;1,42,169\}$*;*

(7) $[u]$ *—- граф с параметрами* $(96,19,2,4)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{96,76,1;1,19,96\}$ *или* $[u]$ *–– граф с параметрами* $(176,25,0,4)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{176,150,1;1,25,176\}$*, или* $[u]$ *–– граф с параметрами* $(256,51,2,12)$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{256,204,1;1,51,256\}$.

Ранее [2–11] были рассмотрены все массивы, за исключением $\{96,76,1;1,19,96\}$ и $\{115,96,8;1,48,115\}$. Автоморфизмы графов с массивами пересечений $\{115,96,8;1,48,115\}$ найдены А. А. Махневым и Д. В. Падучих (пока не опубликовано). Следующий результат завершает второй этап решения задачи Кулена для $t=3$.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{96,76,1;1,19,96\}$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,13,17,19,97\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=5$*,* $\alpha_3(g)=25m$ *и* $\alpha_1(g)=95-5m$ *или* $\alpha_1(g)=35-5m$*, либо* $p=97$*,* $\alpha_3(g)=0$ *и* $\alpha_1(g)=97$*;*

(2) Ω *является* 7*-кликой,* $p=2$*,* $\alpha_3(g)=28$ *и* $\alpha_1(g)\in\{42,90\}$*;*

(3) Ω *содержится в антиподальном классе, либо* $p=2$*,* $\alpha_3(g)=2$ *и* $\alpha_1(g)\in\{0,60,120\}$*, либо* $p=3$*,* $\alpha_3(g)=3$ *и* $\alpha_1(g)\in\{30,90\}$*;*

(4) $5 \le p \le 19$ *и либо*

(i) $p = 19$ *и* Ω *— объединение двух антиподальных классов, либо*

(ii) $p = 17$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$*, либо*

(iii) $p = 13$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{18, 11, 1; 1, 6, 18\}$*, либо*

(iv) $p = 5$ *и* Ω *— объединение двух антиподальных классов или* Ω *имеет массив пересечений* $\{11, 6, 1; 1, 4, 11\}$*;*

(5) $p = 3$*, либо* $s = 5$*,* $t \in \{4, 7, ..., 13\}$*, либо* $s = 2$*,* $t \in \{4, 7, ..., 37\}$*;*

(6) $p = 2$*, либо* $s = 5$*,* $t \in \{4, 7, ..., 15\}$*, либо* $s = 3$*,* $t \in \{4, 7, ..., 31\}$*.*

Следствие. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$*. Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве его вершин.*

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [13, стр. 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 96 + 384 + 4 = 485 = 5 \cdot 97$ вершин и спектр $96^1, 4\sqrt{6}^{194}, -1^{96}, -4\sqrt{6}^{194}$. Порядок клики в Γ не превосходит 8 (ввиду границы Дельсарта он не больше $1 - k/\theta_3 = 1 + 96/(4\sqrt{6})$).

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [11]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \le 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим

$k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [11, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1 ([13], теорема 2.5)**.** *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный недвудольный граф с массивом пересечений* $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$*,* K *— абелева подгруппа* *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$*, транзитивная на каждом антиподальном классе и* p *— простой делитель* r*. Тогда* p *делит* $k+1$.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$*. Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p^1_{11} = 19$, $p^1_{12} = 76$, $p^1_{22} = 304$, $p^1_{23} = 4$, $p^1_{33} = 0$;

(2) $p^2_{11} = 19$, $p^2_{12} = 76$, $p^2_{13} = 1$, $p^2_{22} = 304$, $p^2_{23} = 3$, $p^2_{33} = 0$;

(3) $p^3_{12} = 96$, $p^3_{13} = 0$, $p^3_{22} = 288$, $p^3_{23} = 0$, $p^3_{33} = 3$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 194, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 96*. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l*, взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/10 + \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/5 - 1$*. Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_2(g) - 96$ *делится на* p*, а если* $|g| = p^2$, p *— простое число, то* $\chi_2(g^p) - 96$ *делится на* p^2.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 194 & 97\sqrt{6}/12 & -97\sqrt{6}/48 & -97/2 \\ 96 & -1 & -1 & 96 \\ 194 & -97\sqrt{6}/12 & 97\sqrt{6}/48 & -97/2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (96\alpha_0(g) + 4\sqrt{6}\alpha_1(g) - \sqrt{6}\alpha_2(g) - 24\alpha_3(g))/240$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (96\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 96\alpha_3(g))/485$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 485 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/5 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [12]. □

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Замечание. *Если* g *фиксирует антиподальный класс* K *и* $a \in \Omega$*, то* K *пересекает* Ω*, а если* Ω *пересекает антиподальные классы* K, L*, то* $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично, $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 5$, $\alpha_3(g) = 25m + 10$, $\alpha_1(g) \in \{35 - 5m, 95 - 5m\}$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $n = 7$, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28$ *и* $\alpha_1(g) = 90$ *или* $\alpha_1(g) = 42$;

(3) *если* Ω *содержится в антиподальном классе, то либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 2$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 60, 120\}$*, либо* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 3$ *и* $\alpha_1(g) \in \{30, 90\}$.

Доказательство. Так как $485 = 5 \cdot 97$, то $p = 5, 97$. Если $p = 5$, то $\alpha_3(g) = 5l$, число $\chi_2(g) = l - 1$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 25m + 10$. Далее, $\chi_1(g) = -5m/2 - 1 + \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, поэтому $4\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на 120, $\alpha_2(g) = 4\alpha_1(g) + 120l$ и $\alpha_1(g) = -60l + 95 - 5m$.

Если $p = 97$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, поэтому $\alpha_2(g) = 240l + 4\alpha_1(g) = 485 - \alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = -48l + 97 = 97$.

Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$. Тогда g действует без неподвижных точек на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, поэтому $p = 2$.

Если $n = 1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 96$ и $\chi_2(g) = (1 + 4 \cdot 97)/5 - 1$, противоречие.

Если $n > 1$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 0 или нечетным числом вершин из Ω. Отсюда $n(97 - n) = x + 3y + 5z + 7w$, $x + y + z + w = \alpha_1(g) + \alpha_2(g)$ и $\alpha_3(g) = 4n$. В случае $n = 3$ получим $3 \cdot 94 = x + 3y$, $x + y = 470$. В случае $n = 5$ получим $5 \cdot 92 = x + 3y + 5z$, $x + y + z = 460$ и $x = 460$. В любом случае имеем противоречие. Итак, $n = 7$, $7 \cdot 90 = x + 3y + 5z + 7w$, $x + y + z + w = 450$, $\chi_1(g) = \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, $\alpha_2(g) = 240l + 4\alpha_1(g)$ и либо $\alpha_1(g) = 90$, либо $\alpha_1(g) = 42$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит $5 - s$ и 96, поэтому $p \in \{2, 3, 5\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $s = 3$, $\chi_1(g) = (12 - 2)/10 + \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, $\alpha_2(g) = 240l + 4\alpha_1(g) = 480$ и либо $\alpha_1(g) = 0$, либо $\alpha_1(g) = 60$, либо $\alpha_1(g) = 120$.

Пусть $p = 3$. Тогда $s = 2$, $\chi_1(g) = (8 - 3)/10 + \sqrt{6}(4\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/240$, $\alpha_2(g) = 240l + 120 + 4\alpha_1(g) = 480$ и либо $\alpha_1(g) = 30$, либо $\alpha_1(g) = 90$.

Пусть $p = 5$. Тогда $s = 5$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/5 - 1 = 0$ и $\chi_2(g) - 96$ не делятся на p, противоречие. $\square$

В леммах 5–6 предполагается, что Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Лемма 5. *Если $p \geq 5$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 19$ *и Ω — объединение двух антиподальных классов;*

(2) $p = 17$ *и Ω имеет массив пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$*;*

(3) $p = 13$ *и Ω имеет массив пересечений* $\{18, 11, 1; 1, 6, 18\}$*;*

(4) $p = 5$ *и либо Ω — объединение двух антиподальных классов, либо Ω имеет массив пересечений* $\{11, 6, 1; 1, 4, 11\}$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$. Если $p \geq 5$, то $s = 5$ и вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω.

Если $p > 19$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t - 1, 76, 1; 1, 19, t - 1\}$, противоречие.

В случае $p = 19$ имеем $t = 2$ и Ω — объединение двух антиподальных классов.

В случае $p = 17$ получим $t = 12$ и Ω имеет массив пересечений $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$.

В случае $p = 13$ получим $t = 19$ и Ω имеет массив пересечений $\{18, 11, 1; 1, 6, 18\}$.

В случае $p = 11$ получим $t = 9$ и Ω имеет массив пересечений $\{8, -1, 1; 1, 8, 8\}$, противоречие.

В случае $p = 7$ получим $t = 6, 13$ и Ω имеет массив пересечений $\{5, -1, 1; 1, 5, 5\}$, противоречие или $\{12, 6, 1; 1, 5, 12\}$. В любом случае имеем противоречие

В случае $p = 5$ получим $t = 2, 7, 12, 17$ и либо Ω — объединение двух антиподальных классов, либо Ω имеет массив пересечений $\{11, 6, 1; 1, 4, 11\}$, либо $t = 17$. В случае $t = 17$ граф $\Gamma - \Omega$ имеет массив пересечений $\{79, 76, 1; 1, 2, 79\}$, противоречие с тем, что $b_1(\Gamma - \Omega) = 8$. □

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p = 3$, *то либо* $s = 5$, $t \in \{4, 7, ..., 13\}$, *либо* $s = 2$, $t \in \{4, 7, ..., 37\}$*;*

(2) *если* $p = 2$, *то либо* $s = 5$, $t \in \{4, 7, ..., 15\}$, *либо* $s = 3$, $t \in \{4, 7, ..., 31\}$.

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$, F — антиподальный класс, содержащий вершину a, $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$ и $b \in \Omega(a)$. Если $p = 3$, то $t \in \{4, 7, ..., \}$ и $s \in \{2, 5\}$. В случае $s = 5$ получим $t \in \{4, 7, ..., 16\}$ Пусть $s = 5, t = 16$. Тогда $\Gamma - \Omega$ имеет массив пересечений $\{80, 76, 1; 1, 3, 80\}$, противоречие с тем, что $b_1(\Gamma - \Omega) = 12$.

Если $d(u, u^g) = 1$, то $|[u] \cap \Omega| \le 18$, а если $d(u, u^g) = 2$, то $|[u] \cap \Omega| \le 19$. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(97 - t)$, но не больше $19(97 - t)5$. В частности, $t \le 95/s$ и для $s = 2$ получим $t \le 46$. Теперь $1 + |[a] \cap [b]| + |[a_2] \cap [b]| = t - 1$ и $t \le 40$. В случае $t = 40$ граф Ω имеет массив пересечений $\{39, 19, 1; 1, 19, 39\}$, $\lambda_\Omega = 19$ и число $39 \cdot 19$ нечетно, противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда $t \in \{3, 5, ..., \}$ и $s \in \{3, 5\}$. В случае $s = 5$ получим $t \in \{3, 5, ..., 17\}$ Если $s = 5, t = 17$, то $\Gamma - \Omega$ имеет массив пересечений $\{79, 76, 1; 1, 2, 79\}$, противоречие с тем, что $b_1(\Gamma - \Omega) = 8$.

Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(97 - t)$, но не больше $19(97 - t)5$. Отсюда $t \le 95/s$ и для $s = 3$ получим $t \le 31$. Лемма доказана.

Из лемм 4–6 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. □

Лемма 7. *Пусть* f *— элемент порядка* 97 *из* G. *Если* g *— элемент простого порядка* $p < 97$ *из* $C_G(f)$, *то* $p = 5$, $\mathrm{Fix}(g)$ *— пустой граф и* $|C_G(f)|$ *делит* $5 \cdot 97$.

Доказательство. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 97$.

Пусть g — элемент простого порядка $p < 97$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω является 7-кликой, то $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 28$ не делится на 97.

Если Ω содержится в антиподальном классе, то либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 2$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 3$. В любом случае $\alpha_3(g)$ не делится на 97.

Если $5 \le p \le 19$, то $|\Omega|$ не делится на 97.

Если $p = 3$, то либо $s = 5$, $t \in \{4, 7, ..., 13\}$, либо $s = 2$, $t \in \{4, 7, ..., 37\}$, а если $p = 2$, то либо $s = 5$, $t \in \{4, 7, ..., 13\}$, либо $s = 3$, $t \in \{4, 7, ..., 31\}$. В любом случае $|\Omega|$ не делится на 97.

Пусть g — элементов простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $p = 5$, то ввиду теоремы Ω является 4-кликой, попадающей в $\mathrm{Fix}(f)$, противоречие. □

Приступим к доказательству следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Тогда $|G : G_{\{F\}}| = 97$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, $Q = O_5(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 97 из G.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $S(G)$ *является* 5-*группой;*
(2) *группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(97)$.

Доказательство. Так как $v = 5 \cdot 97$, то ввиду леммы 6 разрешимый радикал $S(G)$ является 5-группой.

Ввиду теоремы $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 97\}$ и $\bar{T}$ — простая неабелева группа. Ввиду [13, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(97)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия. Группа $L_2(97)$ не содержит подгрупп индекса 97, противоречие. Поэтому цоколь T группы G является циклической группой порядка 485, регулярной на множестве вершин графа. В этои случае подгруппа K порядка 5 из T транзитивна на каждом антиподальном классе и по лемме 1 число 5 делит $k + 1 = 97$, противоречие. Следствие доказано. □

References

[1] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Distance-regular graphs, in which neighbourhoods of vertices are strongly regular with the second eigenvalue at most 3*, Doklady Mathematics, **92**:2 (2015), 568–571. MR3468456

[2] K.S. Efimov, A.A. Makhnev, *Automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$, Ural Mathematical Journal, **3**:1 (2017), 27–32. MR3684221

[3] I.N. Belousov, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **297**:1 (2017), S19–S26. MR3555707

[4] A.A. Makhnev, P.S. Ageev, *Automorphisms of a graph with intersection array* $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$, Doklady Mathematics, **90**:2 (2014), 525–528. MR3409368

[5] K.S. Efimov, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$, Diskr. Mat., **29** (2017), 10–16.

[6] K.S. Efimov, A.A. Makhnev, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 795–801. MR3493744

[7] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, M.S. Samoilenko, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, Doklady Mathematics, **90**:3 (2014), 692–696. MR3409992

[8] V. V. Bitkina, A. A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, **159** (2017), 13–20. MR3682340

[9] A. M. Kagazezheva, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 318–327. MR3493733

[10] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 754–761. MR3553166

[11] L. Yu. Tsiovkina, *On the local structure of distance-regular Mathon graphs*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **22** (2013), 293–298.

[12] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[13] C.D. Godsil, A.D. Henzel, *Distance-regular covers of the complete graphs*, J. Comb. Theory, ser. B, **56**:2 (1992), 205-238. MR1186756

[14] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. MR2766516

[15] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Mariyana Khusenovna Shermetova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: mariyana1992@mail.ru