S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1680–1686 (2018) УДК 517.956.8
DOI 10.33048/semi.2018.15.139 MSC 35L05, 35K05, 35j05, 35j10

О МЕТОДЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В.И. КАЧАЛОВ, Ю.С. ФЕДОРОВ

Abstract. The method of a small parameter has been used in mathematical physics for a long time. However, with its help, in general, asymptotic solutions of differential equations are obtained. In the framework of the regularization method, S.A. Lomov proved that under certain restrictions on the data of the problem, one can obtain solutions in the form of series converging in the usual sense in powers of the small parameter, that is, solutions analytically dependent on the parameter. Here we consider two equations — the Burgers equation and the Klein-Gordon equation. The first of them represents a one-dimensional model of hydrodynamics, and the second one is considered in quantum field theory.

Keywords: Keywords: Burgers equation, Klein-Gordon equation, analytic solution, Faa-da-Bruno formula.

1. Введение

Одним из способов исследования нелинейных дифференциальных уравнений математической физики основан на введении вспомогательного параметра и последующем разложении их решений по его степеням. Случай, когда ряд, представляющий решение, сходится в обычном смысле (а не асимптотически) по сути дела означает возможность построения точного решения с любой наперед заданной степенью приближения, что находится в рамках принятых в теоретической физике методов исследования. Следует также отметить, что обычная сходимость имеет место не только в регулярной теории возмущений

Kachalov, V.I., Fedorov, Y.S., On the method of a small parameter in nonlinear mathematical physics.

Поступила 19 декабря 2017 г., опубликована 18 декабря 2018 г.

(в основном, благодаря теоремам Пуанкаре о разложении), но и в теории сингулярных возмущений (см. [1, 2]).

В работе будут рассмотрены начальная задача для уравнения Бюргерса, которое является одномерным аналогом уравнения Навье-Стокса, и уравнение Клейна-Гордона, возникающего в теории поля и дифференциальной геометрии (уравнение Sine-Гордона).

Ранее в работах [3, 4] рассматривалось еще одно важное в физике уравнение — уравнение Кортевега-де-Фриза. Обе работы посвящены построению асимптотических решений.

2. Аналитичность по малому параметру решений параболических уравнений

Будем изучать аналитическую зависимость от малого параметра (это может быть малый коэффициент диффузии или малый коэффициент теплопроводности) решений задачи Коши для уравнений

$$\begin{aligned} &u_t = \varepsilon\triangle u + f(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ &u(0,x) = \varphi(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\triangle = \partial^2_{x_1} + \dots + \partial^2_{x_n}$.

Из формулы Пуассона, дающей решение этой задачи, непосредственно не следует его аналитичность по ε. Поэтому воспользуемся представлением решения $u(t,x,\varepsilon)$ в виде регулярного ряда по степеням ε (см. [5]).

Теорема 1. *Пусть продолжения функций $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ на $\mathbb{C}^n$ являются целыми функциями порядка $0 < \rho \leqslant 2$. Тогда для любого $T > 0$ в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ существует единственное аналитическое по ε решение начальной задачи* (1).

Доказательство. Будем искать решение $u(t,x,\varepsilon)$ в виде ряда

$$u(t,x,\varepsilon) = u_0(t,x) + \varepsilon u_1(t,x) + \dots + \varepsilon^m u_m(t,x) + \dots \tag{2}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &u_{0,t} = f(t,x), \quad u_0(0,x) = \varphi(x); \\ &u_{m,t} = \triangle u_{m-1}, \quad u_m(0,x) = 0, \quad m = 1,2,\dots . \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$u_0(t,x) = \int\limits_0^t f(t_1,x)dt_1 + \varphi(x),$$

$$u_m(t,x) = \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \dots \int\limits_0^{t_m} \triangle^m f(t_{m+1},x)dt_{m+1} + \frac{t^m}{m!}\triangle^m\varphi(x), \quad m = 1,2,\dots .$$

Поскольку $\triangle^m f$ на конечном промежутке по t и $\triangle^m\varphi$ оцениваются одинаковым образом, то оценим $\triangle^m g$ для произвольной функции $g(x)$ такой, что $|g(z)| \leqslant Me^{|z|^\rho}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$; здесь M — некоторая положительная константа. Имеем,

$$|\triangle^m g(x)| = |(\partial^2_{z_1} + \dots + \partial^2_{z_n})^m g(z)|_{z=x} = \Big|\sum_{|\alpha|=m} C^\alpha_m(\partial^{2\alpha_1}_{z_1}\dots\partial^{2\alpha_n}_{z_n})g(z)\Big|_{z=x}$$

$$= \Bigl| \sum_{|\alpha|=m} \frac{C_m^\alpha}{(2\pi)^m} (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \oint\limits_{|z_1-x_1|=r_1} \frac{dz_1}{(z_1-x_1)^{2\alpha_1+1}} \cdot\ldots\cdot \oint\limits_{|z_n-x_n|=r_n} \frac{g(z)dz_n}{(z_n-x_n)^{2\alpha_n+1}} \Bigr|$$

$$\leqslant Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2(r_1^2+\ldots+r_n^2)\frac{\rho}{2}}}{r_1^{2\alpha_1}\ldots r_n^{2\alpha_n}}$$

$$\leqslant Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2n(r_1^\rho+\ldots+r_n^\rho)\frac{\rho}{2}}}{r_1^{2\alpha_1}\ldots r_n^{2\alpha_n}}$$

$$= \Bigl\{ \text{ пусть } r_i = (\frac{\alpha_i}{n}\rho)^{1/\rho}, \quad i=\overline{1,n} \Bigr\}$$

$$= Me^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha (2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)! \frac{e^{2(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)/\rho}}{\left(\frac{\alpha_1}{n\rho}\right)^{2\alpha_1/\rho}\ldots\left(\frac{\alpha_n}{n\rho}\right)^{2\alpha_n/\rho}}$$

$$\leqslant M(n\rho e)^{2m/\rho} e^{2|x|^\rho} \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha \frac{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!}{\alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}} \leqslant Me^{2|x|^\rho}(n\rho e)^{2m/\rho}\, 2^m \sum_{|\alpha|=m} C_m^\alpha$$

$$= Me^{2|x|^\rho}(n\rho e)^{2m/\rho}(2n)^m m^m.$$

Здесь $C_m^\alpha = m!/(\alpha_1!\ldots\alpha_n!)$ — биномиальные коэффициенты; $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$. При этом мы воспользовались тем, что $0 < \rho \leqslant 2$ и неравенствами

$$|g(z)| \leqslant Me^{2|x|^\rho} \leqslant Me^{2|z-x|^\rho+2|x|^\rho};$$
$$\frac{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!}{\alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}} \leqslant 2^m\alpha_1!\ldots\alpha_n! \leqslant 2^m\alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n} \leqslant 2^m m^m, \tag{3}$$

а также учли то, что $\sum\limits_{|\alpha|=m} C_m^\alpha = n^m$.

Следовательно, в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|u_m(t,x)| \leqslant 2Me^{2|x|^\rho}(n\rho e)^{2m/\rho}(2nT)^m \frac{m^m}{m!}, \quad m=1,2,\ldots, \tag{4}$$

в котором в качестве M взята максимальная из констант M_0 и M_1, используемых для оценки $f(t,z)$ и $\varphi(z)$: $|f(t,z)| \leqslant M_0e^{|z|^\rho}$, $|\varphi(z)| \leqslant M_1e^{|z|^\rho}$ при $t\in[0,T]$ и $z\in\mathbb{C}^n$.

Сходимость ряда (2) в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ очевидным образом вытекает из оценки (4). Следует также отметить, что сумма $u(t,x,\varepsilon)$ принадлежит тихоновскому классу корректности параболических задач. □

Замечание 1. *Если в цепочке неравенств* (3) *после замены* r_i *на* $(\alpha_i/n\rho)^{1/\rho}$ *в показателях степеней знаменателя не полагать* $\rho = 2$, *то можно доказать, что ряд* (2) *сходится при всех* ε.

Продемонстрируем это для случая $n = 1$, рассматривая уравнение Бюргерса.

3. Уравнение Бюргерса

Как уже было сказано, оценку (4) можно улучшить, рассматривая функции порядка $0 < \rho < 2$. Их класс обозначим через $\mathcal{A}_x^\rho$ и рассмотрим задачу Коши

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x = u_{xx}, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&u(0,x) = \varphi(x).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ определена на всей числовой оси, а функция $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi\right\} \in \mathcal{A}_x^\rho$, то начальная задача (5) имеет при каждом $t > 0$ мероморфное по x решение.*

Доказательство. Введем малый параметр $\varepsilon > 0$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&u(0,x) = \varepsilon\varphi(x),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и будем строить аналитическое по ε решение задачи (6). Для этого, с помощью преобразования Хопфа-Коула $u = -2\varepsilon w_x/w$ сведем задачу Коши (6) к начальной задаче для уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&w_t = \varepsilon w_{xx}, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&w(0,x) = \psi(x).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$
w(t,x,\varepsilon) = \psi(x) + \varepsilon t\psi''(x) + \ldots + \varepsilon^n \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n)}(x) + \ldots. \tag{8}
$$

Имеем, по интегральной формуле Коши

$$
\psi^{(2n)}(x) = \frac{(2n)!}{2\pi i} \oint\limits_{|z-x|=r_n} \frac{\psi(z)dz}{(z-x)^{2n+1}},
$$

причем, пусть $r_n = (2n/\rho)^{1/\rho}$. Поскольку $\psi(x) \in \mathcal{A}_x^\rho$, то существует $M > 0$ такое, что $|\psi(z)| \leqslant Me^{|z|^\rho}$, $z \in \mathbb{C}$. Но тогда

$$
|w_n(t,x)| \leqslant M\frac{e^{2n/\rho}(2n)!}{(2n/\rho)^{2n/\rho}\,n!}|t|^n
$$

и, как нетрудно видеть, если $0 < \rho < 2$, то ряд (8) сходится равномерно на любом компакте из $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ в произвольной окрестности точки $\varepsilon = 0$, т.е. его сумма является целой функцией по всем трем переменным. Положим $\varepsilon = 1$ и получим решение задачи Коши (6):

$$
u(t,x) = -2\frac{\psi'(x) + t\psi'''(x) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n+1)}(x) + \ldots}{\psi(x) + t\psi''(x) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(2n)}(x) + \ldots}.
$$

□

Замечание 2. *Ясно, что для каждого отрезка действительной оси существует момент времени, вплоть до которого решение $u(t,x)$ не будет иметь особенностей на нем.*

Замечание 3. *Корректность задачи Коши (6) вытекает из того факта, что функция $\psi(x)$ принадлежит тихоновскому классу корректности.*

4. Уравнение Клейна-Гордона

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(u), \quad t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ &u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Относительно функции $F(u)$ будем предполагать, что ее продолжение на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ представляет собой целую функцию экспоненциального типа. Поставленная начальная задача является регулярно возмущенной, но применять напрямую теорему Пуанкаре о разложении к уравнению в частных производных нельзя — эта теорема доказана для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Итак, будем искать решение $u(t,x,\varepsilon)$ задачи (9) в виде ряда по степеням ε:

$$u(t,x,\varepsilon) = u_0(t,x) + \varepsilon u_1(t,x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,x) + \ldots . \tag{10}$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов получим серию задач:

$$\begin{aligned} &u_{0,tt} - u_{0,xx} = 0; \ u_0(0,x) = \varphi(x), \ u_{0,t}(0,x) = \psi(x); \\ &u_{1,tt} - u_{1,xx} = f_0(u_0); \ u_1(0,x) = 0, \ u_{1,t}(0,x) = 0; \\ &u_{2,tt} - u_{2,xx} = f_1(u_0,u_1); \ u_2(0,x) = 0, \ u_{2,t}(0,x) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_{n+1,tt} - u_{n+1,xx} = f_n(u_0,\ldots,u_n); \ u_{n+1}(0,x) = 0, \ u_{n+1,t}(0,x) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &f_0(u_0) = F(u); \\ &f_1(u_0,u_1) = F_u(u_0)u_1; \\ &f_2(u_0,u_1,u_2) = \frac{1}{2!}(F_{uu}(u_0)u_1^2 + 2F_u(u_0)u_2); \\ &f_3(u_0,u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{3!}(F_{uuu}(u_0)u_1^3 + 6F_{uu}(u_0)u_1u_2 + 6F_u(u_0)u_3); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(u_0,u_1,\ldots,u_n) = \sum_{\mathbf{M}_n} \frac{F^{m_1+\ldots+m_n}(u_0)}{m_1!\ldots m_n!} u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

В последней формуле $\mathbf{M}_n$ — множество векторов $(m_1,\ldots,m_n)$ с целочисленными неотрицательными компонентами, являющихся решениями уравнения $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$. Эта формула вытекает из формулы Фаа-ди-Бруно [6], с учетом ряда (10).

Далее, имеем решения уравнения серии (11):

$$
\begin{aligned}
&u_0(t,x) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi;\\
&u_1(t,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_1(u_0(\tau,\xi))d\xi;\\
&u_2(t,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_2(u_0(\tau,\xi),u_1(\tau,\xi))d\xi;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_n(u_0(\tau,\xi),\dots,u_n(\tau,\xi))d\xi;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Поскольку $F(u)$ принадлежит экспоненциальному типу, то существует число $C>0$ такое, что для каждого компакта из $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ найдется положительная константа g такая, что на этом компакте

$$
|F^{(p)}(u_0(t,x)| \leqslant gC^p, \quad p=0,1,\dots\,. \tag{14}
$$

Для дальнейшего докажем следующее комбинаторное утверждение.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *задана рекуррентным образом:* $a_1=a_2=1$, $a_{n+1}=\sum\limits_{\mathbf{M}_n}\dfrac{a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!}$, $n=2,3,\dots$. *Тогда* $a_n=\dfrac{n^{n-1}}{n!}$.

Доказательство. Предположим, что формула верна для фиксированного n, т.е. $a_1=a_2=1$, $a_3=\dfrac{3^2}{3!}$, …, $a_n=\dfrac{n^{n-1}}{n!}$. Рассмотрим аналитическую функцию $h(w)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{n!}w^n$ и, пользуясь формулой Фаа-ди-Бруно в виде

$$
\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dw^n}f(h(w)) = \sum_{\mathbf{M}_n}\frac{f^{(m_1+\ldots+m_n)}(h(w))}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\dots m_n!n!^{m_n}}\cdot\prod_{j=1}^{n}(h^{(j)}(w))^{m_j},
$$

где $\mathbf{M}_n$, как и ранее, множество кортежей длины n из неотрицательных целых чисел $(m_1,\dots,m_n)$, удовлетворяющих равенству $1m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n$, заметим, что если $f(h(w))\equiv e^{h(w)}$, то

$$
\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dw^n}(e^{h(w)})\big|_{w=0} = \sum_{\mathbf{M}_n}\frac{a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!},
$$

причем $a_j=h^{(j)}(0)/j!$, $j=1,2,\dots$.

С другой стороны (см. [7]), функция $h(w)$ является обратной к функции $w=ze^{-z}$, а, значит, удовлетворяет равенству $e^{h(w)}=h(w)/w$, из которого следует, что

$$
\frac{d^n}{dw^n}(e^{h(w)})\big|_{w=0} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.
$$

Справедливость леммы вытекает из принципа математической индукции. □

В этих условиях, с учетом (14), на множестве $[0,T]\times\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — компакт из $\mathbb{R}$, имеем:

$$
\begin{array}{l}
|u_1| \leqslant T^2 g;\\
|u_2| \leqslant T^4 g^2 C;\\
|u_3| \leqslant \dfrac{3^2}{3!} T^6 g^3 C^2;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
|u_n| \leqslant \dfrac{n^{n-1}}{n!} T^{2n} g^n C^{n-1};\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\tag{15}
$$

и сходимость ряда (10) на указанном компактном множестве из $[0,+\infty]\times\mathbb{R}$, в некоторой окрестности значения $\varepsilon=0$ вытекает из признака Даламбера.

References

[1] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: MGU, 2011.

[2] V.I. Kachalov, *On holomorphic regularization of singularly perturbed systems of differential equations*, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, **57**:4 (2017), 64–71 (in Russian). MR3651120

[3] B.I. Suleimanov, *The emergence of nondissitively shock waves and the «nonperturbative» quantum theory of gravitation*, Journal of Experimental and Theoretical Physics, **105**:5 (1994), 1089–1097 (in Russian). MR1287782

[4] B.I. Suleimanov, *«Quantization» of higher Hamiltonian analogues of the Painleve I and II equations with two degrees of freedom*, Functional analysis and its applications, **48**:3 (2014), 52–62 (in Russian). MR3494720

[5] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 1976. MR0473441

[6] G.I. Arkhipov, V.A. Sadovnichy, V.N. Chubarikov, *Lectures on mathematical analysis*, Moscow: MGU, 2004.

[7] Yu.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin, *Lectures on the theory of functions of a complex variable*, Moscow: Nauka, 1989. MR1007599

Vasiliy Ivanovich Kachalov
National Research University «MPEI»,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia
E-mail address: vikachalov@rambler.ru

Yuri Sergeevich Fedorov
National Research University «MPEI»,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia