S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1697–1718 (2018) УДК 517.929.4
DOI 10.33048/semi.2018.15.141 MSC 34K20, 34K60, 92D25

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М.А. СКВОРЦОВА

Abstract. We consider a system of differential equations with two delays, which describes the interaction between predator and prey populations. The model takes into account the age structure of populations, herewith the delay parameters denote the time that predator and prey individuals need to become adult. We consider questions of stability of equilibrium points and study asymptotic properties of solutions. We establish estimates of solutions characterizing the stabilization rate at infinity and find estimates of attraction sets. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction set, modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

1. Предварительные сведения

Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t),y(t)), \\ \dot{u}(t) = rx(t) - rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - c_1u(t), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t), \\ \dot{v}(t) = nf(x(t),y(t)) - nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - c_2v(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) = \frac{bxy}{1+k_1x+k_2y}.$$

Skvortsova, M.A., On estimates of solutions in a predator-prey model with two delays.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00408).

Поступила 8 октября 2018 г., опубликована 19 декабря 2018 г.

Здесь $x(t)$ — численность популяции взрослых жертв, $u(t)$ — численность популяции молодых жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $v(t)$ — численность популяции молодых хищников. Параметры запаздывания $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ отвечают за время взросления жертв и хищников соответственно. Все коэффициенты предполагаются положительными.

Заметим, что в системе (1) первое и третье уравнения не зависят от u и v, поэтому подсистему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t) \end{cases} \tag{2}$$

можно рассматривать отдельно.

Для системы (2) зададим начальные условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \quad \varphi \in C([-\tau_{\max}, 0]), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau_2, 0]), \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Хорошо известно, что решение начальной задачи (2), (3) существует и единственно. Также легко показать, что если

$$\varphi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau_2, 0], \tag{4}$$

то $x(t)$, $y(t)$ будут определены при всех $t \geq 0$, причем $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ (см., например, [1]).

Вместе с начальными условиями (3) на x и y рассмотрим условия на u и v:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad v(0) = v^{(0)}. \tag{5}$$

Легко видеть, что решение начальной задачи (1), (3), (5) также существует и единственно. Более того, если выполнены условия (4) и условия

$$u^{(0)} \geq r \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds, \quad v^{(0)} \geq n \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s} f(\varphi(s), \psi(s))ds, \tag{6}$$

то $u(t) \geq 0$ и $v(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Действительно, из второго уравнения системы (1) получим

$$e^{c_1 t}u(t) = u^{(0)} + r\int\limits_0^t \Big(e^{c_1 s}x(s) - e^{c_1(s-\tau_1)}x(s-\tau_1)\Big)ds$$

$$= u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds + r\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{c_1 s}x(s)ds,$$

откуда

$$u(t) = e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + r\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-c_1(t-s)}x(s)ds \geq 0. \tag{7}$$

Аналогично, из четвертого уравнения системы (1) нетрудно получить

$$v(t) = e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s} f(\varphi(s), \psi(s))ds\right)$$

$$+n \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-c_2(t-s)} f(x(s), y(s)) ds \geq 0. \tag{8}$$

Замечание 1. Условия (6) означают, что численность молодых жертв (или хищников) в момент времени $t = 0$ больше или равна численности жертв (или хищников), которые родились в промежуток времени $t \in [-\tau_1, 0]$ (или $t \in [-\tau_2, 0]$) и дожили до момента времени $t = 0$.

Всюду далее будем предполагать, что начальные данные $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ удовлетворяют условиям (4), (6).

Теперь рассмотрим положения равновесия системы (1) (см. [1]).

1) Если $d_1 \geq re^{-c_1\tau_1}$, то у системы существует только одно положение равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0, 0, 0, 0)$.

2) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 \geq (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют два положения равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0, 0, 0, 0)$ и $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x^*, u^*, 0, 0)$, где

$$x^* = \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad u^* = \frac{rx^*}{c_1}(1 - e^{-c_1\tau_1}). \tag{9}$$

3) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют три положения равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0, 0, 0, 0)$, $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x^*, u^*, 0, 0)$, и $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x_0, u_0, y_0, v_0)$. При $k_2 \neq 0$ величина x_0 определяется по формуле

$$x_0 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 + 4C}),$$

$$B = \frac{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}} - \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad C = \frac{d_2}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}},$$

при $k_2 = 0$

$$x_0 = \frac{d_2}{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1}. \tag{10}$$

Величины u_0, y_0, v_0 определяются так:

$$u_0 = \frac{rx_0}{c_1}(1 - e^{-c_1\tau_1}),$$

$$y_0 = \frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}(re^{-c_1\tau_1} - d_1 - ax_0)x_0, \tag{11}$$

$$v_0 = \frac{d_2y_0}{c_2}(e^{c_2\tau_2} - 1).$$

Целью работы является изучение устойчивости положений равновесия системы (1), получение оценок решений, характеризующих скорость сходимости к положениям равновесия, и указание оценок на множества притяжения.

Замечание 2. В случае, когда $\tau_1 = 0$ и $k_1 = k_2 = 0$ эти вопросы рассматривались [7], [8].

2. Устойчивость положений равновесия

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об устойчивости положений равновесия системы (1). Вначале приведем результаты, полученные в работе [1].

Теорема 1. *Если* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$, *то положение равновесия* $(0,0)$ *системы* (2) *асимптотически устойчиво. Если* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, *то положение равновесия* $(0,0)$ *системы* (2) *неустойчиво.*

Следствие 1. *Если* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$, *то положение равновесия* $(0,0,0,0)$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво. Если* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, *то положение равновесия* $(0,0,0,0)$ *системы* (1) *неустойчиво.*

Теорема 2. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$. *Если* $(re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) < ad_2$, *то положение равновесия* $(x^*, 0)$ *системы* (2) *асимптотически устойчиво. Если* $(re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) > ad_2$, *то положение равновесия* $(x^*, 0)$ *системы* (2) *неустойчиво.*

Следствие 2. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$. *Если* $(re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) < ad_2$, *то положение равновесия* $(x^*, u^*, 0, 0)$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво. Если* $(re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) > ad_2$, *то положение равновесия* $(x^*, u^*, 0, 0)$ *системы* (1) *неустойчиво.*

Отметим, что для положения равновесия (x_0, y_0) системы (2) в работе [1] были приведены достаточные условия асимптотической устойчивости в случае, когда $\tau_1 = \tau_2$. Мы получим достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия (x_0, y_0) в случае, когда $\tau_1 \neq \tau_2$.

Пусть выполнены условия $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$. В системе (2) сделаем замену

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t),$$

тогда получим

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = re^{-c_1\tau_1}(x_0 + \widetilde{x}(t-\tau_1)) - a(x_0 + \widetilde{x}(t))^2 \\ \qquad\quad -d_1(x_0 + \widetilde{x}(t)) - f(x_0 + \widetilde{x}(t), y_0 + \widetilde{y}(t)), \\ \\ \dot{\widetilde{y}}(t) = nf(x_0 + \widetilde{x}(t-\tau_2), y_0 + \widetilde{y}(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2(y_0 + \widetilde{y}(t)). \end{cases}$$

Кратко эту систему можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) + B_1\mathbf{y}(t-\tau_1) + B_2\mathbf{y}(t-\tau_2) + F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau_2)), \tag{12}$$

где

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ 0 & -a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = 2ax_0 + d_1 + f'_x(x_0, y_0) = 2ax_0 + d_1 + \frac{by_0(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2},$$

$$a_{12} = f'_y(x_0, y_0) = \frac{bx_0(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}, \quad a_{22} = d_2, \quad b_{11} = re^{-c_1\tau_1},$$

$$b_{21} = ne^{-c_2\tau_2} f'_x(x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0} \frac{d_2(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)},$$

$$b_{22} = ne^{-c_2\tau_2} f'_y(x_0, y_0) = \frac{d_2(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)},$$

$$F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau_2)) = \begin{pmatrix} -a\widetilde{x}^2(t) - h(\mathbf{y}(t)) \\ ne^{-c_2\tau_2} h(\mathbf{y}(t-\tau_2)) \end{pmatrix},$$

$$h(\mathbf{y}) = f(x_0 + \widetilde{x}, y_0 + \widetilde{y}) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\widetilde{x} - f'_y(x_0, y_0)\widetilde{y}.$$

Очевидно, что асимптотическая устойчивость положения равновесия (x_0, y_0) системы (2) эквивалентна асимптотической устойчивости нулевого решения системы (12). Согласно теореме об устойчивости по первому приближению (см., например, [2]), если все корни характеристического квазимногочлена

$$\det\left(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau_1} B_1 - e^{-\lambda\tau_2} B_2\right) = 0 \tag{13}$$

лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, то нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво. Учитывая структуру матриц A, B_1, B_2, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть*

$$a_{12}b_{21} \le (a_{11} - b_{11})(a_{22} + b_{22}). \tag{14}$$

Тогда все корни квазимногочлена (13) *содержатся в левой полуплоскости* $\mathbb{C}_-$.

Доказательство. Характеристический квазимногочлен имеет вид

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau_1} B_1 - e^{-\lambda\tau_2} B_2) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} - b_{11}e^{-\lambda\tau_1} & a_{12} \\ -b_{21}e^{-\lambda\tau_2} & \lambda + a_{22} - b_{22}e^{-\lambda\tau_2} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + a_{11} - b_{11}e^{-\lambda\tau_1})(\lambda + a_{22}) - \Big(b_{22}(\lambda + a_{11} - b_{11}e^{-\lambda\tau_1}) - a_{12}b_{21}\Big)e^{-\lambda\tau_2} = 0,$$

откуда

$$\Big|(\lambda + a_{11} - b_{11}e^{-\lambda\tau_1})(\lambda + a_{22})\Big|^2 = \Big|\Big(b_{22}(\lambda + a_{11} - b_{11}e^{-\lambda\tau_1}) - a_{12}b_{21}\Big)e^{-\lambda\tau_2}\Big|^2.$$

Положим $\lambda = \eta + i\xi$, где $\eta, \xi \in \mathbb{R}$. Тогда равенство квадратов модулей можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \Big((\xi + b_{11}e^{-\tau_1\eta}\sin(\tau_1\xi))^2 + (\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}\cos(\tau_1\xi))^2\Big)\xi^2 \\ + \Big((\eta + a_{22})^2 - (b_{22}e^{-\tau_2\eta})^2\Big)(\xi + b_{11}e^{-\tau_1\eta}\sin(\tau_1\xi))^2 \\ + \Big((\eta + a_{22} - b_{22}e^{-\tau_2\eta})(\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}\cos(\tau_1\xi)) + a_{12}b_{21}e^{-\tau_2\eta}\Big) \\ \times\Big((\eta + a_{22} + b_{22}e^{-\tau_2\eta})(\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}\cos(\tau_1\xi)) - a_{12}b_{21}e^{-\tau_2\eta}\Big) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Предположим, что у характеристического квазимногочлена есть корни с неотрицательной вещественной частью, т. е. равенство (15) верно при некоторых $\eta \ge 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Заметим, что из определений величин a_{ij}, b_{ij} вытекают условия $a_{ij} > 0$, $b_{ij} > 0$, $a_{22} \ge b_{22}$, а из условия (14) следует, что $a_{11} > b_{11}$. Учитывая также (14), из равенства (15) получим

$$\begin{cases} \Big((\xi + b_{11}e^{-\tau_1\eta}\sin(\tau_1\xi))^2 + (\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}\cos(\tau_1\xi))^2\Big)\xi^2 = 0, \\ \Big((\eta + a_{22})^2 - (b_{22}e^{-\tau_2\eta})^2\Big)(\xi + b_{11}e^{-\tau_1\eta}\sin(\tau_1\xi))^2 = 0, \\ \Big((\eta + a_{22} + b_{22}e^{-\tau_2\eta})(\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}\cos(\tau_1\xi)) - a_{12}b_{21}e^{-\tau_2\eta}\Big) = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $\xi = 0$, тогда третье равенство перепишется в виде

$$((\eta + a_{22})e^{\tau_2\eta} + b_{22})(\eta + a_{11} - b_{11}e^{-\tau_1\eta}) = a_{12}b_{21}.$$

Учитывая (14), отсюда вытекает, что $\eta = 0$, а значит, $\lambda = \eta + i\xi = 0$. Подставляя $\lambda = 0$ в исходное характеристическое уравнение, получим

$$(a_{11} - b_{11})(a_{22} - b_{22}) + a_{12}b_{21} = 0.$$

Мы получили противоречие, следовательно, все корни характеристического квазимногочлена содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Лемма доказана. □

Замечание 3. Вопрос о расположении корней квазимногочлена (13) в случае, когда условие (14) нарушено, пока остается открытым.

Учитывая лемму 1, из теоремы об устойчивости по первому приближению легко получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$,

$$ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$$

и условие (14). *Тогда положение равновесия* (x_0, y_0) *системы* (2) *асимптотически устойчиво.*

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда положение равновесия* (x_0, u_0, y_0, v_0) *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Замечание 4. Учитывая явные выражения для a_{ij}, b_{ij}, условие (14) может быть переписано в виде

$$0 < \frac{by_0(1 + 2k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2} \leq ax_0\left(1 + \frac{(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)}\right).$$

При $k_2 = 0$ условие (14) принимает вид

$$0 < \frac{by_0(1 + 2k_1x_0)}{(1 + k_1x_0)^2} \leq 2ax_0$$

или с учетом формул (10) и (11)

$$ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) \leq ad_2\frac{(3nbe^{-c_2\tau_2} + d_2k_1)}{(nbe^{-c_2\tau_2} + d_2k_1)}.$$

3. Оценки скорости сходимости к нулевому положению равновесия

В этом параграфе мы будем предполагать, что выполнено условие $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$. В этом случае нулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым. Наша цель — получить оценки решений системы (1), характеризующие скорость убывания на бесконечности. При получении оценок мы будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского (см., например, [3], [4], [5], [6]).

Рассмотрим систему (2) с начальными данными (3), удовлетворяющими условиям (4). Вначале получим оценку на первую компоненту решения $x(t)$. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$U_0(t, x) = x^2(t) + \alpha \int_{t-\tau_1}^{t} e^{-k(t-s)}x^2(s)ds, \tag{16}$$

где $k > 0$ удовлетворяет неравенству

$$re^{-c_1\tau_1}e^{k\tau_1/2} < d_1,$$

а $\alpha > 0$ определяется по формуле

$$\alpha = re^{-c_1\tau_1}e^{k\tau_1/2}. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда справедлива оценка*

$$x(t) \le \sqrt{U_0(0,\varphi)}\; e^{-\varepsilon_0 t/2}, \tag{18}$$

где

$$\varepsilon_0 = \min\{2(d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{k\tau_1/2}), k\} > 0. \tag{19}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (16) вдоль решения начальной задачи (2)–(4):

$$\frac{d}{dt}U_0(t,x) = 2x(t)\Big(rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t),y(t))\Big)$$

$$+\alpha x^2(t) - \alpha e^{-k\tau_1}x^2(t-\tau_1) - k\alpha \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-k(t-s)}x^2(s)ds.$$

Поскольку $x(t) \ge 0$, $y(t) \ge 0$, то

$$\frac{d}{dt}U_0(t,x) \le 2x(t)\Big(rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - d_1x(t)\Big)$$

$$+\alpha x^2(t) - \alpha e^{-k\tau_1}x^2(t-\tau_1) - k\alpha \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-k(t-s)}x^2(s)ds.$$

Используя неравенство

$$2re^{-c_1\tau_1}x(t)x(t-\tau_1) - \alpha e^{-k\tau_1}x^2(t-\tau_1) \le \frac{(re^{-c_1\tau_1})^2}{\alpha e^{-k\tau_1}}x^2(t),$$

получим

$$\frac{d}{dt}U_0(t,x) \le -\left(2d_1 - \alpha - \frac{(re^{-c_1\tau_1})^2}{\alpha e^{-k\tau_1}}\right)x^2(t) - k\alpha \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-k(t-s)}x^2(s)ds.$$

Учитывая обозначение (17) величины α, будем иметь

$$\frac{d}{dt}U_0(t,x) \le -2(d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{k\tau_1/2})x^2(t) - k\alpha \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-k(t-s)}x^2(s)ds.$$

В силу определения (19) величины ε_0, отсюда нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}U_0(t,x) \le -\varepsilon_0 U_0(t,x).$$

Следовательно,

$$x^2(t) \le U_0(t,x) \le U_0(0,\varphi)e^{-\varepsilon_0 t}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 4. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда* $x(t)$ *ограничено сверху при всех* $t > 0$.

Теперь получим оценку на вторую компоненту решения $y(t)$ системы (2). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V_0(t,y) = y^2(t) + \beta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-m(t-s)} y^2(s)ds, \tag{20}$$

где $m > 0$ — произвольное, а $\beta > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\beta < 2d_2.$$

Теорема 5. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4)*. Тогда справедлива оценка*

$$y(t) \le æ_0 \sqrt{V_0(0,\psi)}\; e^{-\sigma_0 t/2}, \tag{21}$$

где

$$\sigma_0 = \min\{2d_2 - \beta, m\} > 0, \tag{22}$$

$$æ_0 = \exp\left(\frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{2\beta e^{-m\tau_2}} \left(\int\limits_{-\tau_2}^{0} \varphi^2(s)ds + \frac{1}{\varepsilon_0} U_0(0,\varphi) \right) \right), \tag{23}$$

ε_0 *определено в* (19)*,* $U_0(0,\varphi)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (16).

Доказательство. Продифференцируем функционал (20) вдоль решения начальной задачи (2)–(4):

$$\frac{d}{dt} V_0(t,y) = 2y(t) \left(nbe^{-c_2\tau_2} \frac{x(t-\tau_2)y(t-\tau_2)}{1 + k_1 x(t-\tau_2) + k_2 y(t-\tau_2)} - d_2 y(t) \right)$$

$$+\beta y^2(t) - \beta e^{-m\tau_2} y^2(t-\tau_2) - m\beta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-m(t-s)} y^2(s)ds.$$

Учитывая, что $x(t) \ge 0$, $y(t) \ge 0$, получим

$$2nbe^{-c_2\tau_2} \frac{x(t-\tau_2)y(t-\tau_2)}{1 + k_1 x(t-\tau_2) + k_2 y(t-\tau_2)} y(t) - \beta e^{-m\tau_2} y^2(t-\tau_2)$$

$$\le \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}} \left(\frac{x(t-\tau_2)}{1 + k_1 x(t-\tau_2) + k_2 y(t-\tau_2)} \right)^2 y^2(t) \le \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}} x^2(t-\tau_2) y^2(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} V_0(t,y) \le -\left(2d_2 - \beta - \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}} x^2(t-\tau_2) \right) y^2(t)$$

$$-m\beta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-m(t-s)} y^2(s)ds.$$

Учитывая обозначение (22) величины σ_0, будем иметь

$$\frac{d}{dt} V_0(t,y) \le -\left(\sigma_0 - \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}} x^2(t-\tau_2) \right) V_0(t,y).$$

Отсюда нетрудно получить

$$y^2(t) \le V_0(t,y) \le V_0(0,\psi) e^{-\sigma_0 t} \exp\left(\frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}} \int\limits_0^t x^2(s-\tau_2)ds \right).$$

Осталось показать справедливость неравенства

$$\exp\left(\frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\beta e^{-m\tau_2}}\int\limits_0^t x^2(s-\tau_2)ds\right) \le æ_0^2.$$

Действительно, используя неравенство (18), получим

$$\int\limits_0^t x^2(s-\tau_2)ds \le \int\limits_0^\infty x^2(s-\tau_2)ds = \int\limits_{-\tau_2}^\infty x^2(s)ds$$

$$\le \int\limits_{-\tau_2}^0 \varphi^2(s)ds + U_0(0,\varphi)\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon_0 s}ds = \int\limits_{-\tau_2}^0 \varphi^2(s)ds + \frac{1}{\varepsilon_0}U_0(0,\varphi).$$

Теорема доказана. □

Следствие 5. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда* $y(t)$ *ограничено сверху при всех* $t > 0$.

Теперь получим оценки на компоненты $u(t)$ и $v(t)$ решения начальной задачи (1), (3), (5). При этом мы будем предполагать, что начальные данные удовлетворяют условиям (4) и (6).

Теорема 6. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6). *Тогда справедливы оценки*

$$u(t) \le e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^0 e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right)$$

$$+r\sqrt{U_0(0,\varphi)}\; e^{-\varepsilon_0 t/2}\int\limits_0^{\tau_1} e^{((\varepsilon_0/2)-c_1)\xi}d\xi, \tag{24}$$

$$v(t) \le e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^0 e^{c_2 s}f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nbæ_0\sqrt{U_0(0,\varphi)}\sqrt{V_0(0,\psi)}\; e^{-(\varepsilon_0+\sigma_0)t/2}\int\limits_0^{\tau_2} e^{((\varepsilon_0+\sigma_0)/2-c_2)\xi}d\xi, \tag{25}$$

где ε_0 *определено в* (19), $U_0(0,\varphi)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (16), σ_0 *определено в* (22), $æ_0$ *определено в* (23), $V_0(0,\psi)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (20).

Доказательство. Используя неравенство (18), из представления (7) получим

$$u(t) \le e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^0 e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + r\sqrt{U_0(0,\varphi)}\int\limits_{t-\tau_1}^t e^{-c_1(t-s)}e^{-\varepsilon_0 s/2}ds,$$

откуда непосредственно вытекает (24).

Используя явный вид функции $f(x,y)$, а также неравенства (18) и (21), из представления (8) получим

$$v(t) \le e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s} f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nbæ_0\sqrt{U_0(0,\varphi)}\sqrt{V_0(0,\psi)}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-c_2(t-s)}e^{-(\varepsilon_0+\sigma_0)s/2}ds,$$

откуда непосредственно вытекает (25).

Теорема доказана. □

Следствие 6. *Пусть* $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t),u(t),y(t),v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6). *Тогда* $u(t)$ *и* $v(t)$ *ограничены сверху при всех* $t > 0$.

4. Ограниченность решений

В этом параграфе мы будем предполагать, что выполнено условие $d_1 \le re^{-c_1\tau_1}$. Используя функционалы типа Ляпунова – Красовского, мы получим оценки, из которых, в частности, будет вытекать ограниченность компонент решения начальной задачи (1), (3)–(6). (Как было отмечено выше, в случае $d_1 > re^{-c_1\tau_1}$ ограниченность компонент решения следует из оценок (18), (21), (24), (25)).

Вначале предположим, что выполнено условие $d_1 = re^{-c_1\tau_1}$. Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского

$$U_1(t,x) = x^2(t) + re^{-c_1\tau_1}\int\limits_{t-\tau_1}^{t} x^2(s)ds. \tag{26}$$

Теорема 7. *Пусть* $d_1 = re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда справедлива оценка*

$$x(t) \le \sqrt{U_1(0,\varphi)}. \tag{27}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (26) вдоль решения начальной задачи (2)–(4):

$$\frac{d}{dt}U_1(t,x) = 2x(t)\Big(rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - re^{-c_1\tau_1}x(t) - f(x(t),y(t))\Big)$$

$$+re^{-c_1\tau_1}x^2(t) - re^{-c_1\tau_1}x^2(t-\tau_1)$$

$$= -re^{-c_1\tau_1}\Big(x(t) - x(t-\tau_1)\Big)^2 - 2x(t)\Big(ax^2(t) + f(x(t),y(t))\Big) \le 0.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$x^2(t) \le U_1(t,x) \le U_1(0,\varphi).$$

Теорема доказана. □

Следствие 7. *Пусть* $d_1 = re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда* $x(t)$ *ограничено сверху при всех* $t > 0$.

Теорема 8. *Пусть* $d_1 = re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда справедливы оценки*

$$y(t) \le e^{-d_2 t}\psi(0) + ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_{-\tau_2}^{0} f(\varphi(s), \psi(s))ds, \quad t \in (0, \tau_2], \tag{28}$$

$$y(t) \le e^{-d_2(t-\tau_2)}\left(ne^{-c_2\tau_2}\varphi(0) + e^{-d_2\tau_2}\psi(0) + ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_{-\tau_2}^{0} f(\varphi(s), \psi(s))ds\right)$$
$$+\frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}\left(re^{-c_1\tau_1}\max\left\{\max_{t\in[-\tau_1,0]}|\varphi(t)|, \sqrt{U_1(0,\varphi)}\right\}\right.$$
$$\left.+\max\{0, (d_2 - d_1)\}\sqrt{U_1(0,\varphi)}\right), \quad t > \tau_2, \tag{29}$$

где функционал $U_1(0, \varphi)$ *определен в* (26).

Доказательство. Вначале предположим, что $t \in (0, \tau_2]$. Тогда из второго уравнения системы (2) нетрудно получить

$$y(t) = e^{-d_2 t}\psi(0) + ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_0^t e^{-d_2(t-s)} f(\varphi(s-\tau_2), \psi(s-\tau_2))ds$$
$$\le e^{-d_2 t}\psi(0) + ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_0^{\tau_2} f(\varphi(s-\tau_2), \psi(s-\tau_2))ds.$$

Пусть теперь $t > \tau_2$. Рассмотрим функцию

$$z(t) = ne^{-c_2\tau_2}x(t-\tau_2) + y(t).$$

Из системы (2) получим

$$\frac{d}{dt}z(t) = -d_2 z(t) + re^{-c_1\tau_1}ne^{-c_2\tau_2}x(t-\tau_1-\tau_2)$$
$$+ne^{-c_2\tau_2}x(t-\tau_2)\Big(d_2 - d_1 - ax(t-\tau_2)\Big)$$
$$\le -d_2 z(t) + ne^{-c_2\tau_2}\Big(re^{-c_1\tau_1}x(t-\tau_1-\tau_2) + \max\{0, (d_2-d_1)\}x(t-\tau_2)\Big).$$

Отсюда

$$z(t) \le e^{-d_2(t-\tau_2)}z(\tau_2) + ne^{-c_2\tau_2}\left(re^{-c_1\tau_1}\int\limits_{\tau_2}^{t} e^{-d_2(t-s)}x(s-\tau_1-\tau_2)ds\right.$$
$$\left.+\max\{0, (d_2-d_1)\}\int\limits_{\tau_2}^{t} e^{-d_2(t-s)}x(s-\tau_2)ds\right).$$

Из неравенства (27) будем иметь

$$z(t) \le e^{-d_2(t-\tau_2)}z(\tau_2) + ne^{-c_2\tau_2}\left(re^{-c_1\tau_1}\max\left\{\max_{t\in[-\tau_1,0]}|\varphi(t)|, \sqrt{U_1(0,\varphi)}\right\}\right.$$

$$+\max\{0,(d_2-d_1)\}\sqrt{U_1(0,\varphi)}\Bigg)\int\limits_{\tau_2}^{t}e^{-d_2(t-s)}ds\le e^{-d_2(t-\tau_2)}z(\tau_2)$$

$$+\frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}\left(re^{-c_1\tau_1}\max\left\{\max_{t\in[-\tau_1,0]}|\varphi(t)|,\sqrt{U_1(0,\varphi)}\right\}+\max\{0,(d_2-d_1)\}\sqrt{U_1(0,\varphi)}\right).$$

Далее, используя определение функции $z(\tau_2)$ и неравенство (28), нетрудно получить

$$z(\tau_2)=ne^{-c_2\tau_2}\varphi(0)+y(\tau_2)\le ne^{-c_2\tau_2}\varphi(0)+e^{-d_2\tau_2}\psi(0)+ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_{-\tau_2}^{0}f(\varphi(s),\psi(s))ds.$$

Теперь оценка (29) вытекает из неравенства $y(t)\le z(t)$.

Теорема доказана. □

Замечание 5. Из неравенств (28) и (29) непосредственно вытекает оценка

$$y(t)\le M,\quad t>0, \tag{30}$$

где

$$M=\max\{M_1,M_2\}, \tag{31}$$

$$M_1=\psi(0)+ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_{-\tau_2}^{0}f(\varphi(s),\psi(s))ds,$$

$$M_2=ne^{-c_2\tau_2}\varphi(0)+e^{-d_2\tau_2}\psi(0)+ne^{-c_2\tau_2}\int\limits_{-\tau_2}^{0}f(\varphi(s),\psi(s))ds$$

$$+\frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}\Bigg(re^{-c_1\tau_1}\max\left\{\max_{t\in[-\tau_1,0]}|\varphi(t)|,\sqrt{U_1(0,\varphi)}\right\}$$

$$+\max\{0,(d_2-d_1)\}\sqrt{U_1(0,\varphi)}\Bigg).$$

Следствие 8. *Пусть $d_1=re^{-c_1\tau_1}$ и $(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (2)–(4). Тогда $y(t)$ ограничено сверху при всех $t>0$.*

Теорема 9. *Пусть $d_1=re^{-c_1\tau_1}$ и $(x(t),u(t),y(t),v(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (1), (3)–(6). Тогда справедливы оценки*

$$u(t)\le e^{-c_1t}\left(u^{(0)}-r\int\limits_{-\tau_1}^{0}e^{c_1s}\varphi(s)ds\right)+r\sqrt{U_1(0,\varphi)}\left(\frac{1-e^{-c_1\tau_1}}{c_1}\right), \tag{32}$$

$$v(t)\le e^{-c_2t}\left(v^{(0)}-n\int\limits_{-\tau_2}^{0}e^{c_2s}f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nbM\sqrt{U_1(0,\varphi)}\left(\frac{1-e^{-c_2\tau_2}}{c_2}\right), \tag{33}$$

где функционал $U_1(0,\varphi)$ определен в (26), M определено в (31).

Доказательство. Используя неравенство (27), из представления (7) получим

$$u(t) \le e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + r\sqrt{U_1(0,\varphi)}\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-c_1(t-s)}ds,$$

откуда вытекает (32).

Используя явный вид функции $f(x,y)$, а также неравенства (27) и (30), из представления (8) получим

$$v(t) \le e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s}f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nbM\sqrt{U_1(0,\varphi)}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-c_2(t-s)}ds,$$

откуда вытекает (33).

Теорема доказана. □

Следствие 9. *Пусть* $d_1 = re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t),u(t),y(t),v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6). *Тогда* $u(t)$ *и* $v(t)$ *ограничены сверху при всех* $t > 0$.

Теперь предположим, что выполнено условие $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$. В этом случае в системе (2) имеется положение равновесия $(x^*,0)$, где x^* определено в (9). Рассмотрим начальную задачу (2)–(4). Замена

$$x(t) = x^* + \overline{x}(t) \tag{34}$$

приводит к начальной задаче

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = re^{-c_1\tau_1}\overline{x}(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1)\overline{x}(t) - a\overline{x}^2(t) - f(x^* + \overline{x}(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = nf(x^* + \overline{x}(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2 y(t), \\ \overline{x}(t) = \varphi(t) - x^*, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad \overline{x}(+0) = \varphi(0) - x^*, \quad \varphi \in C([-\tau_{\max}, 0]), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau_2, 0]), \end{cases} \tag{35}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям (4).

Лемма 2. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, $(\overline{x}(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (35), $\hat{x}(t)$ *— решение начальной задачи*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = re^{-c_1\tau_1}\hat{x}(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1)\hat{x}(t), \\ \hat{x}(t) = \varphi(t) - x^*, \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad \hat{x}(+0) = \varphi(0) - x^*. \end{cases} \tag{36}$$

Тогда $\overline{x}(t) \le \hat{x}(t)$ *при всех* $t > 0$.

Доказательство. Положим $w(t) = \overline{x}(t) - \hat{x}(t)$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = re^{-c_1\tau_1}w(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1)w(t) - a\overline{x}^2(t) - f(x^* + \overline{x}(t), y(t)), \\ w(t) = 0, \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad w(+0) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{w}(t) \le re^{-c_1\tau_1}w(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1)w(t), \\ w(t) = 0, \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad w(+0) = 0. \end{cases}$$

При $t \in [0, \tau_1]$ будем иметь

$$\begin{cases} \dot{w}(t) \le -(2re^{-c_1\tau_1} - d_1)w(t), \\ w(+0) = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$w(t) \le e^{-(2re^{-c_1\tau_1}-d_1)t} w(0) = 0, \quad t \in [0,\tau_1].$$

При $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$ получим

$$\begin{cases} \dot{w}(t) \le re^{-c_1\tau_1} w(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1) w(t), \\ w(t) \le 0, \quad t \in [0,\tau_1], \quad w(\tau_1 + 0) \le 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\dot{w}(t) \le -(2re^{-c_1\tau_1} - d_1) w(t)$, откуда вытекает неравенство $w(t) \le e^{-(2re^{-c_1\tau_1}-d_1)t} w(0) \le 0$, $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$.

Далее, применяя метод шагов, нетрудно получить неравенство $w(t) \le 0$ при всех $t > 0$.

Лемма доказана. □

Теперь получим оценки на решение $\hat{x}(t)$ начальной задачи (36). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$U(t,\hat{x}) = \hat{x}^2(t) + \gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)} \hat{x}^2(s) ds, \tag{37}$$

где $p > 0$ удовлетворяет неравенству

$$re^{-c_1\tau_1} e^{p\tau_1/2} < 2re^{-c_1\tau_1} - d_1, \tag{38}$$

а $\gamma > 0$ определяется по формуле

$$\gamma = re^{-c_1\tau_1} e^{p\tau_1/2}. \tag{39}$$

Лемма 3. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ *и* $\hat{x}(t)$ *— решение начальной задачи* (36)*. Тогда справедлива оценка*

$$|\hat{x}(t)| \le \sqrt{U(0, \varphi - x^*)}\; e^{-\varepsilon t/2}, \tag{40}$$

где

$$\varepsilon = \min\{2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1} e^{p\tau_1/2}), p\} > 0. \tag{41}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (37) вдоль решения $\hat{x}(t)$ начальной задачи (36):

$$\frac{d}{dt} U(t,\hat{x}) = 2\hat{x}(t)(re^{-c_1\tau_1}\hat{x}(t-\tau_1) - (2re^{-c_1\tau_1} - d_1)\hat{x}(t))$$

$$+\gamma \hat{x}^2(t) - \gamma e^{-p\tau_1} \hat{x}^2(t-\tau_1) - p\gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)} \hat{x}^2(s) ds.$$

В силу неравенства

$$2re^{-c_1\tau_1}\hat{x}(t-\tau_1)\hat{x}(t) - \gamma e^{-p\tau_1}\hat{x}^2(t-\tau_1) \le \frac{(re^{-c_1\tau_1})^2}{\gamma e^{-p\tau_1}} \hat{x}^2(t)$$

получим

$$\frac{d}{dt} U(t,\hat{x}) \le -\left(2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1) - \gamma - \frac{(re^{-c_1\tau_1})^2}{\gamma e^{-p\tau_1}}\right) \hat{x}^2(t)$$

$$-p\gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)} \hat{x}^2(s) ds.$$

Учитывая обозначение (39) величины γ, будем иметь

$$\frac{d}{dt}U(t,\hat{x}) \le -2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2})\hat{x}^2(t)$$

$$-p\gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)}\hat{x}^2(s)ds.$$

Используя обозначение (41) величины ε, получим

$$\frac{d}{dt}U(t,\hat{x}) \le -\varepsilon U(t,\hat{x}).$$

Отсюда

$$\hat{x}^2(t) \le U(t,\hat{x}) \le U(0,\varphi - x^*)e^{-\varepsilon t}.$$

Лемма доказана. □

Наконец, приведем оценку на первую компоненту решения $x(t)$ начальной задачи (2)–(4).

Теорема 10. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4)*. Тогда справедлива оценка*

$$x(t) \le x^* + \sqrt{U(0,\varphi - x^*)}\ e^{-\varepsilon t/2}, \tag{42}$$

где функционал $U(0,\varphi - x^*)$ *определен в* (37)*,* ε *определено в* (41)*.*

Доказательство. В силу леммы 2 справедливо неравенство $\overline{x}(t) \le \hat{x}(t)$. Следовательно, учитывая представление (34) и используя неравенство (40), получим

$$x(t) = x^* + \overline{x}(t) \le x^* + \hat{x}(t) \le x^* + \sqrt{U(0,\varphi - x^*)}\ e^{-\varepsilon t/2}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 10. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4)*. Тогда* $x(t)$ *ограничено сверху при всех* $t > 0$.

Следствие 11. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4)*. Тогда* $y(t)$ *ограничено сверху при всех* $t > 0$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 8 с использованием ограниченности функции $x(t)$.

Следствие 12. *Пусть* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ *и* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6)*. Тогда* $u(t)$ *и* $v(t)$ *ограничены сверху при всех* $t > 0$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 9 с использованием ограниченности функций $x(t)$ и $y(t)$.

5. Оценки скорости сходимости к положению равновесия $(x^*, u^*, 0, 0)$

В этом параграфе мы будем предполагать, что выполнены условия

$$d_1 < re^{-c_1\tau_1} \quad \text{и} \quad (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) < ad_2.$$

В этом случае положение равновесия $(x^*, u^*, 0, 0)$ системы (1) является асимптотически устойчивым. Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского, мы получим оценки решений, характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия. (Вопрос о получении оценок скорости стабилизации решений в случае

$$d_1 < re^{-c_1\tau_1} \quad \text{и} \quad (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) \geq ad_2$$

является темой для дальнейших исследований).

Замечание 6. В случае, когда $\tau_1 = 0$ и $k_1 = k_2 = 0$, оценки скорости сходимости были получены в работе [7].

Замечание 7. Нетрудно видеть (см. (9)), что условие $(re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1) < ad_2$ эквивалентно условию

$$\frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*} < d_2. \tag{43}$$

Рассмотрим начальную задачу (2)–(4). Вначале получим оценку на вторую компоненту решения $y(t)$. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = y^2(t) + \delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)}y^2(s)ds, \tag{44}$$

где $q > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2} < d_2, \tag{45}$$

а $\delta > 0$ определяется по формуле

$$\delta = \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}. \tag{46}$$

Теорема 11. *Пусть выполнены условия* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, (43) *и* $(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$ — *решение начальной задачи* (2)–(4). *Тогда справедлива оценка*

$$y(t) \leq æ\sqrt{V(0,\psi)}\ e^{-\sigma t/2}, \tag{47}$$

где

$$\sigma = \min\left\{2\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right), q\right\} > 0, \quad æ = e^{J/2}, \tag{48}$$

$$J = nbe^{-c_2\tau_2}e^{q\tau_2/2}\frac{(1+k_1x^*)}{x^*}\left[\max\left\{0, \left(\left(\frac{\Phi}{1+k_1\Phi}\right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*}\right)^2\right)\tau_2\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{U(0,\varphi-x^*)}}{\varepsilon(1+k_1x^*)^2}\left(4x^* + \sqrt{U(0,\varphi-x^*)}\right)\right], \tag{49}$$

$\Phi = \max\limits_{t\in[-\tau_2,0]}|\varphi(t)|$, ε *определено в* (41).

Доказательство. Продифференцируем функционал (44) вдоль решения начальной задачи (2)–(4):

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = 2y(t)\Big(nf(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t)\Big)$$
$$+\delta y^2(t) - \delta e^{-q\tau_2}y^2(t-\tau_2) - q\delta\int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-k(t-s)}y^2(s)ds.$$

Используя явный вид функции $f(x,y)$ и учитывая, что $y(t) \geq 0$, получим

$$2ne^{-c_2\tau_2} f(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))y(t) - \delta e^{-q\tau_2} y^2(t-\tau_2)$$
$$\leq \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}} \left(\frac{x(t-\tau_2)}{1+k_1x(t-\tau_2)+k_2y(t-\tau_2)} \right)^2 y^2(t)$$
$$\leq \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}} \left(\frac{x(t-\tau_2)}{1+k_1x(t-\tau_2)} \right)^2 y^2(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left(2d_2 - \delta - \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}} \left(\frac{x(t-\tau_2)}{1+k_1x(t-\tau_2)} \right)^2 \right) y^2(t)$$
$$-q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)} y^2(s)ds.$$

Учитывая обозначение (46) величины δ, будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -2\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*} e^{q\tau_2/2} \right) y^2(t)$$
$$+\frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}} \left(\left(\frac{x(t-\tau_2)}{1+k_1x(t-\tau_2)} \right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*} \right)^2 \right) y^2(t)$$
$$-q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)} y^2(s)ds.$$

Обозначим

$$g_0(t) = \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}} \left(\left(\frac{x(t-\tau_2)}{1+k_1x(t-\tau_2)} \right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*} \right)^2 \right), \tag{50}$$
$$g(t) = \max\{0, g_0(t)\}. \tag{51}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -2\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*} e^{q\tau_2/2} \right) y^2(t)$$
$$+g(t)y^2(t) - q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)} y^2(s)ds.$$

Учитывая обозначение (48) величины σ, получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -(\sigma - g(t))V(t,y).$$

Следовательно,

$$V(t,y) \leq V(0,\psi) \exp\left(\int\limits_0^t g(\xi)d\xi \right) e^{-\sigma t} \leq V(0,\psi) \exp\left(\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi \right) e^{-\sigma t}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$y(t) \leq \sqrt{V(t,y)} \leq \sqrt{V(0,\psi)} \exp\left(\frac{1}{2} \int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi \right) e^{-\sigma t/2}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось установить справедливость неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi\right) \le e^{J/2} = æ. \tag{52}$$

Воспользуемся оценкой

$$x(t) \le \Phi = \max_{t\in[-\tau_2,0]} |\varphi(t)|, \quad t \in [-\tau_2, 0],$$

и неравенством (42):

$$x(t) \le x^* + \nu(t), \quad \nu(t) = \sqrt{U(0,\varphi - x^*)}\ e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty g(\xi)d\xi = \int\limits_{-\tau_2}^0 g(\xi+\tau_2)d\xi + \int\limits_0^\infty g(\xi+\tau_2)d\xi$$

$$\le \frac{(nbe^{-c_2\tau_2})^2}{\delta e^{-q\tau_2}}\left[\max\left\{0, \left(\left(\frac{\Phi}{1+k_1\Phi}\right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*}\right)^2\right)\tau_2\right\}\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{x^*+\nu(\xi)}{1+k_1(x^*+\nu(\xi))}\right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*}\right)^2\right)d\xi\right].$$

Учитывая обозначение (46) величины δ и используя оценку

$$\int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{x^*+\nu(\xi)}{1+k_1(x^*+\nu(\xi))}\right)^2 - \left(\frac{x^*}{1+k_1x^*}\right)^2\right)d\xi$$

$$\le \int\limits_0^\infty \frac{(x^*+\nu(\xi))^2-(x^*)^2}{(1+k_1x^*)^2}d\xi = \frac{\sqrt{U(0,\varphi-x^*)}}{\varepsilon(1+k_1x^*)^2}\left(4x^* + \sqrt{U(0,\varphi-x^*)}\right),$$

нетрудно установить неравенство (52).

Теорема доказана. $\square$

Теперь получим оценку на первую компоненту решения $x(t)$ системы (2), которая будет характеризовать скорость сходимости к стационарному состоянию x^*, а также получим оценку на множество притяжения.

Рассмотрим начальную задачу (2)–(4). Как было отмечено выше, замена (34) $x(t) = x^* + \overline{x}(t)$ приводит к начальной задаче (35). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$W(t,\overline{x},y) = U(t,\overline{x}) + \mu V(t,y)$$

$$= \overline{x}^2(t) + \gamma\int\limits_{t-\tau_1}^t e^{-p(t-s)}\overline{x}^2(s)ds + \mu\left(y^2(t) + \delta\int\limits_{t-\tau_2}^t e^{-q(t-s)}y^2(s)ds\right), \tag{53}$$

где p определено в (38), γ определено в (39), q определено в (45), δ определено в (46), а величина $\mu > 0$ определяется последующему правилу. Вначале выберем $l > 0$ такое, что

$$l < 2\min\left\{(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2}), \left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right)\right\}. \tag{54}$$

Тогда

$$\mu = \frac{(bx^*)^2}{\Big(2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2}) - l\Big)\left(2\left(d_2 - \dfrac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right) - l\right)}. \tag{55}$$

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, (43) *и* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (2)–(4). *Если начальные данные удовлетворяют условию*

$$\sqrt{W(0, \varphi - x^*, \psi)} < \frac{\omega}{2a\text{æ}}, \tag{56}$$

где

$$\omega = \min\{l, p, q\}, \tag{57}$$

æ *определено в* (48)–(49), *тогда справедлива оценка*

$$|x(t) - x^*| \le \text{æ}\sqrt{W(0, \varphi - x^*, \psi)}\left(1 - \frac{2a}{\omega}\text{æ}\sqrt{W(0, \varphi - x^*, \psi)}\right)^{-1} e^{-\omega t/2}. \tag{58}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (53) вдоль решения начальной задачи (35):

$$\frac{d}{dt}W(t, \overline{x}, y) = \frac{d}{dt}U(t, \overline{x}) + \mu\frac{d}{dt}V(t, y). \tag{59}$$

Вначале оценим $\dfrac{d}{dt}U(t, \overline{x})$. По аналогии с доказательством леммы 3 получим

$$\frac{d}{dt}U(t, \overline{x}) \le -2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2})\overline{x}^2(t)$$

$$-2\overline{x}(t)\Big(a\overline{x}^2(t) + f(x^* + \overline{x}(t), y(t))\Big) - p\gamma\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)}\overline{x}^2(s)ds.$$

Из определения функционала $W(t, \overline{x}, y)$ вытекает неравенство

$$-2a\overline{x}^3(t) \le 2aW^{3/2}(t, \overline{x}, y).$$

В силу неравенств $y(t) \ge 0$ и $x^* + \overline{x}(t) \ge 0$ будем иметь

$$-2\overline{x}(t)f(x^* + \overline{x}(t), y(t)) = -2b\frac{\overline{x}(t)(x^* + \overline{x}(t))y(t)}{1 + k_1(x^* + \overline{x}(t)) + k_2y(t)}$$

$$\le -2bx^*\frac{\overline{x}(t)y(t)}{1 + k_1(x^* + \overline{x}(t)) + k_2y(t)} \le 2bx^*|\overline{x}(t)|y(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}U(t, \overline{x}) \le -2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2})\overline{x}^2(t)$$

$$+2aW^{3/2}(t, \overline{x}, y) + 2bx^*|\overline{x}(t)|y(t) - p\gamma\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)}\overline{x}^2(s)ds. \tag{60}$$

Теперь оценим $\dfrac{d}{dt}V(t, y)$. По аналогии с доказательством теоремы 11 получим

$$\frac{d}{dt}V(t, y) \le -2\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right)y^2(t)$$

$$+g(t)y^2(t) - q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)} y^2(s)ds, \tag{61}$$

где $g(t)$ определено в (50)–(51).

Таким образом, в силу (60) и (61) из (59) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}W(t,\overline{x},y) \le -2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2})\overline{x}^2(t)$$

$$+2aW^{3/2}(t,\overline{x},y) + 2bx^*|\overline{x}(t)|y(t) - p\gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)}\overline{x}^2(s)ds$$

$$-2\mu\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right)y^2(t) + \mu g(t)y^2(t) - \mu q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)}y^2(s)ds.$$

Далее, используя определения (54) и (55) величин $l > 0$ и $\mu > 0$ нетрудно видеть, что выполнена оценка

$$2(2re^{-c_1\tau_1} - d_1 - re^{-c_1\tau_1}e^{p\tau_1/2})\overline{x}^2(t) - 2bx^*|\overline{x}(t)|y(t)$$

$$+2\mu\left(d_2 - \frac{nbe^{-c_2\tau_2}x^*}{1+k_1x^*}e^{q\tau_2/2}\right)y^2(t) \ge l(\overline{x}^2(t) + \mu y^2(t)).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}W(t,\overline{x},y) \le -l(\overline{x}^2(t) + \mu y^2(t)) + \mu g(t)y^2(t) + 2aW^{3/2}(t,\overline{x},y)$$

$$-p\gamma \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-p(t-s)}\overline{x}^2(s)ds - \mu q\delta \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{-q(t-s)}y^2(s)ds.$$

Учитывая определение (57) величины ω, из этого неравенства получим

$$\frac{d}{dt}W(t,\overline{x},y) \le -(\omega - g(t))W(t,\overline{x},y) + 2aW^{3/2}(t,\overline{x},y).$$

Отсюда в силу неравенства Гроноулла (см., например, [9]) вытекает оценка

$$\sqrt{W(t,\overline{x},y)} \le \exp\left(-\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t g(\xi)d\xi\right)\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}$$

$$\times\left(1 - a\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\omega s}{2} + \frac{1}{2}\int_0^s g(\xi)d\xi\right)ds\right)^{-1}.$$

Учитывая неравенство (52), отсюда нетрудно получить

$$\sqrt{W(t,\overline{x},y)} \le æ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}$$

$$\times\left(1 - aæ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\int\limits_0^t e^{-\omega s/2}ds\right)^{-1} e^{-\omega t/2}$$

$$\le æ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\left(1 - \frac{2a}{\omega}æ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\right)^{-1} e^{-\omega t/2}.$$

Из этой оценки и из неравенства $|x(t) - x^*| \le \sqrt{W(t,\overline{x},y)}$ вытекает (58).

Теорема доказана. □

Теперь получим оценки на компоненты $u(t)$ и $v(t)$ решения начальной задачи (1), (3)–(6).

Теорема 13. *Пусть выполнены условия* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, (43) *и* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6). *Если начальные данные удовлетворяют условию* (56), *тогда справедлива оценка*

$$|u(t) - u^*| \le e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + rNe^{-\omega t/2}\int\limits_{0}^{\tau_1} e^{((\omega/2)-c_1)\xi}d\xi, \quad (62)$$

где

$$N = æ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\left(1 - \frac{2a}{\omega}æ\sqrt{W(0,\varphi - x^*,\psi)}\right)^{-1},$$

æ *определено в* (48)–(49), ω *определено в* (57), $W(0,\varphi - x^*,\psi)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (53).

Доказательство. Используя представление (7) и определение (9) величин x^* и u^*, получим

$$u(t) - u^* = e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + r\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-c_1(t-s)}(x(s) - x^*)ds.$$

В силу неравенства (58) будем иметь

$$|u(t) - u^*| \le e^{-c_1 t}\left(u^{(0)} - r\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{c_1 s}\varphi(s)ds\right) + rN\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{-c_1(t-s)}e^{-\omega s/2}ds,$$

откуда следует неравенство (62).

Теорема доказана. □

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$, (43) *и* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (3)–(6). *Тогда справедлива оценка*

$$v(t) \le e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s}f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nb\left(x^* + \sqrt{U(0,\varphi - x^*)}\right)æ\sqrt{V(0,\psi)}\; e^{-\sigma t/2}\int\limits_{0}^{\tau_2} e^{((\sigma/2)-c_2)\xi}d\xi, \quad (63)$$

где $U(0,\varphi - x^*)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (37), $V(0,\psi)$ *— модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, определенный в* (44), σ *и* æ *определены в* (48)–(49).

Доказательство. Учитывая явный вид функции $f(x,y)$ и используя неравенства (42) и (47), из представления (8) получим

$$v(t) \le e^{-c_2 t}\left(v^{(0)} - n\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{c_2 s}f(\varphi(s),\psi(s))ds\right)$$

$$+nb\left(x^*+\sqrt{U(0,\varphi-x^*)}\right)æ\sqrt{V(0,\psi)}\int\limits_{t-\tau_2}^{t}e^{-c_2(t-s)}e^{-\sigma s/2}ds,$$

откуда следует неравенство (63).

Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность профессору Г.В. Демиденко за внимание к работе и обсуждение результатов и профессору Н.В. Перцеву за интерес к исследованиям автора и указанную ссылку на работу [1].

References

[1] H. You, R. Yuan, *A stage-structured predator-prey model with two delays due to juvenile maturation*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, (2011), 1–20.

[2] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford: Stanford University Press, 1963. MR0147744

[3] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Asymptotic properties of solutions to delay differential equations*, Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, **5**:3 (2005), 20–28 [in Russian]. Zbl 1249.34211

[4] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms*, Siberian Mathematical Journal, **48**:5 (2007), 824–836. MR2364623

[5] D.Ya. Khusainov, A.F. Ivanov, A.T. Kozhametov, *Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay*, Differential Equations, **41**:8 (2005), 1196–1200. MR2202521

[6] S. Mondie, V.L. Kharitonov, *Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, **50**:2 (2005), 268–273. MR2116437

[7] M.A. Skvortsova, *Stability of solutions in the predator-prey model with delay*, Matematicheskie Zametki SVFU, **23**:2 (2016), 108–120 [in Russian]. Zbl 1399.34261

[8] M.A. Skvortsova, *Estimates for solutions in a predator-prey model with delay*, Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika", **25** (2018), 109–125 [in Russian].

[9] Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1964. MR0171038

Maria Aleksandrovna Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sm-18-nsu@yandex.ru