S@MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1719–1734 (2018) УДК 512.667.5, 515.123
DOI 10.33048/semi.2018.15.142 MSC 18F10, 55N30

КАТЕГОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ НОРМАЛЬНЫХ СТРУКТУР НА МНОЖЕСТВАХ

Е.Е. СКУРИХИН

Abstract. The results of the theory of categorical topological spaces are applied to sheaf cohomology of normal structures and uniform spaces.
Keywords: Grothendieck topology, Sheaf cohomology, categorical topological space, uniform space.

1. Введение

Категорное топологическое пространство - это предпучок множеств на произвольной категории, со структурами, определяемыми заданной на этой категории топологией Гротендика. Основной, при этом, является структура полной брауэровой решётки на некотором, определяемом заданной топологией Гротендика, классе подпредпучков данного предпучка. Наличие такой структуры позволяет изучать строение произвольного категорного топологического пространства методами общей топологии. А именно, используется тот факт, что класс открытых подмножеств фиксированного топологического пространства образует полную брауэрову решётку и на этом основана значительная часть результатов общей топологии. Наличие топологии Гротендика позволяет пользоваться глубоко и широко развитой теорией когомологий Гротендика. Поскольку любой объект произвольной категории представляет предпучок множеств, то мы фактически получаем на произвольном объекте произвольной категории структуру, близкую к структуре топологического пространства и возможность изучать её топологическими, геометрическими и гомологическими методами.

В рамках теории топосов Гротендика [1], основы теории категорных топологических пространств изложены в работах [3], [4], [5]. Описанный выше подход был использован при изучении топологических пространств, равномерных

Skurikhin, E.E., Categorical topology of normal structures.

Поступила 7 декабря 2018 г., опубликована 20 декабря 2018 г.

пространств, пространств Чу [6]. В сочетании с изоморфностью когомологий Чеха и Гротендика, удалось, в частности охарактеризовать когомологическими методами размерности лебеговского типа, к которым относятся нормальные размерности топологических пространств [6], размерность Исбелла [8], [6], а также, в контексте пространств Чу [7], [9], длины цепочек логических выводов, алгебраические и линейные размерности, размерности неприводимых пространств, другие характеристики математических объектов, выражаемые через длины тех или иных цепочек.

Во всех перечисленных случаях использовался факт изоморфности когомологий Гротендика и Чеха, который для паракомпактных топологических пространств является классическим. Известно, что паракомпактность топологического пространства, то есть возможность вписать в каждое открытое покрытие локально конечное открытое покрытие, равносильна, во всяком случае для регулярных пространств, возможности вписать в каждое открытое покрытие локально конечное замкнутое покрытие.

Это последнее условие, соответственным образом сформулированное, позволяет развить теорию паракомпактных категорных топологических пространств, в том числе теорию мягких пучков и мягкой размерности, увязать последнюю с лебеговской размерностью и размерностью Бредона, и приложить её уже к произвольным топологическим пространствам, равномерным пространствам, когомологиям, определяемым по различным классам покрытий, в том числе конечным.

В данной работе мы вводим понятие нормальной структуры на множестве и показываем, что задаваемая такой структурой топология Гротендика делает каждое подмножество паракомпактным в категорном смысле. Доказывается, что каждая их этих структур задаёт топологию Гротендика на решётке 2^X, относительно которой каждое подмножество является паракомпактным. Используя естественную связь нормальности с равномерными структурами и структурами близости, можно применять имеющиеся результаты теории мягких пучков и мягких размерностей [3] к указанным структурам.

Доказывается общая теорема об изоморфности когомологий Гротендика и Чеха паракомпактных элементов нижних полурешёток, частными случаями которой являются соответствующий результат для рассматриваемых в данной работе нормальных пространств, а также для топологических (не обязательно паракомпактных) пространств, равномерных пространств, пространств близости.

2. Нормальные пространства

Определение 1. *Пусть* $\overset{\delta}{\supset}$ *бинарное отношение на множестве* SX *всех подмножеств множества* X*, то есть подмножество множества* $SX\times SX$*. Тот факт, что* (A,B) *элемент* $\overset{\delta}{\supset}$*, будем записывать в виде* $A\overset{\delta}{\supset}B$ *или* $B\overset{\delta}{\subset}A$*.*

Отношение $\overset{\delta}{\supset}$ *называется нормальностью на* X*, если выполняются следующие условия:*

(Nδ1) $(A_1\overset{\delta}{\supset}B$ *и* $A_2\overset{\delta}{\supset}B)\Leftrightarrow A_1\cap A_2\overset{\delta}{\supset}B$*.*

(Nδ2) $A\overset{\delta}{\supset}B\Rightarrow (X\setminus B)\overset{\delta}{\supset}(X\setminus A)$

(Nδ3) Если $A\overset{\delta}{\supset}B$*, то* $\exists C\subset X: A\overset{\delta}{\supset}C\overset{\delta}{\supset}B$*.*

(Nδ4) $A \overset{\delta}{\supset} B \Rightarrow A \supset B$.

(Nδ5) $\emptyset \overset{\delta}{\supset} \emptyset$.

Пару $(X, \overset{\delta}{\supset})$, *где* $\overset{\delta}{\supset}$ *нормальность на* X, *будем называть нормальным пространством. Соотношение* $A \overset{\delta}{\supset} B$ *будем также выражать словосочетанием* A *является* δ*-окрестностью* B.

Лемма 1. *Любая нормальность* $\overset{\delta}{\supset}$ *на* X *обладает следующими свойствами:*

(N$\delta 1'$) Если $\{A_i \overset{\delta}{\supset} B_i \mid i = 1, ..., k\}$, *то* $\cup_{i=1}^{k} A_i \overset{\delta}{\supset} \cup_{i=1}^{k} B_i$ *и* $\cap_{i=1}^{k} A_i \overset{\delta}{\supset} \cap_{i=1}^{k} B_i$.

(N$\delta 1''$) $A \supset C \overset{\delta}{\supset} D \supset B \Rightarrow A \overset{\delta}{\supset} B$

(N$\delta 5'$) $\forall A \subset X (A \overset{\delta}{\supset} \emptyset, X \overset{\delta}{\supset} A)$.

(N$\delta 5''$) $A \overset{\delta}{\supset} (X \setminus A) \Leftrightarrow A = X$.

Доказательство. ((Nδ1) и (Nδ2))$\Rightarrow$(N$\delta 1''$). Пусть $A \supset C \overset{\delta}{\supset} D$. Тогда $A \cap C \overset{\delta}{\supset} D$ и по (Nδ1), $A \overset{\delta}{\supset} D$. Таким образом, если $A \supset C \overset{\delta}{\supset} D \supset B$, то $A \overset{\delta}{\supset} D \supset B$, и значит по (N$\delta$2), $X \setminus B \supset X \setminus D \overset{\delta}{\supset} X \setminus A$. По (N$\delta$1), $X \setminus B \overset{\delta}{\supset} X \setminus A$ и по (Nδ2), $A \overset{\delta}{\supset} B$.

((Nδ1) и (Nδ2))$\Rightarrow$(N$\delta 1'$). Пусть $k = 2$ и $\{A_i \overset{\delta}{\supset} B_i \mid i = 1, 2\}$.

По (N$\delta 1''$), $\{A_i \overset{\delta}{\supset} B_1 \cap B_2 \mid i = 1, 2\}$, и по (N$\delta$1), $A_1 \cap A_2 \overset{\delta}{\supset} B_1 \cap B_2$.

Имеем также, по (Nδ2), $\{X \setminus B_i \overset{\delta}{\supset} X \setminus A_i \mid i = 1, 2\}$ и значит, по доказанному, $(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2) \overset{\delta}{\supset} (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)$, откуда, по (N$\delta$2), $A_1 \cup A_2 \overset{\delta}{\supset} B_1 \cup B_2$.
Далее индукция по k.

((Nδ5) и (Nδ2) и $(N\delta 1)$)$\Rightarrow$(N$\delta 5'$). По (Nδ5), $\emptyset \overset{\delta}{\supset} \emptyset$, откуда по (N$\delta$2) $X \overset{\delta}{\supset} X$. По (N$\delta 1''$), $\emptyset \overset{\delta}{\supset} \emptyset \Rightarrow A \overset{\delta}{\supset} \emptyset$, $X \overset{\delta}{\supset} X \Rightarrow X \overset{\delta}{\supset} A$.

((Nδ5) и (Nδ4) и (Nδ2) и $(N\delta 1)$)$\Rightarrow$(N$\delta 5''$). По (Nδ5), $\emptyset \overset{\delta}{\supset} \emptyset$, откуда по (N$\delta 1''$) $X \overset{\delta}{\supset} \emptyset$. Наоборот, если $A \overset{\delta}{\supset} X \setminus A$, то по (N$\delta$4), $A \supset X \setminus A$, откуда $A = A \cup (X \setminus A) = X$.

□

Любое отображение множества в нормальное пространство задаёт индуцированную структуру на этом множестве, что позволяет определить понятие подпространства.

Лемма 2. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство,* $f : Y \to X$ *отображение. Зададим бинарное отношение* $\overset{\delta_f}{\supset}$ *на* SY, *полагая*

$E \overset{\delta_f}{\supset} F \Leftrightarrow$ *имеются такие* $A \overset{\delta}{\supset} B$, *что* $E \supset f^{-1}(A), f^{-1}B \supset F$. *Тогда:*

1). Отношение $\overset{\delta_f}{\supset}$ *является нормальностью на* Y, *так что* $(Y, \overset{\delta_f}{\supset})$ *нормальное пространство. Будем называть* $\overset{\delta_f}{\supset}$ *нормальностью,* f*-индуцированной нормальностью* $\overset{\delta}{\supset}$.

2). Если $C \overset{\delta}{\supset} D$, *то* $f^{-1}(C) \overset{\delta_f}{\supset} f^{-1}(D)$ *а если* f *сюръективно, то верно и обратное, то есть* $f^{-1}(C) \overset{\delta_f}{\supset} f^{-1}(D) \Leftrightarrow C \overset{\delta}{\supset} D$.

3). Если $Y \subset X$ и $f : Y \to X$ - включение, то $E \overset{\delta_f}{\supset} F \Leftrightarrow$ имеются такие $A \overset{\delta}{\supset} B$, что $E = A \cap Y, F = B \cap Y$.

Будем в этом случае обозначать $\overset{\delta_f}{\supset}$ через $\overset{\delta_Y}{\supset}$, а $(Y, \overset{\delta_Y}{\supset})$ называть подпространством нормального пространства $(X, \overset{\delta}{\supset})$.

Доказательство. 1). Требуется проверить нижеследующие условия:

(Nδ_f1) $(E_1 \overset{\delta_f}{\supset} F$ и $E_2 \overset{\delta_f}{\supset} F) \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 \overset{\delta_f}{\supset} F$.

(Nδ_f2) $E \overset{\delta_f}{\supset} F \Rightarrow (Y \setminus F) \overset{\delta_f}{\supset} (Y \setminus E)$

(Nδ_f3) Если $E \overset{\delta_f}{\supset} F$, то $\exists H \subset Y : E \overset{\delta_f}{\supset} H \overset{\delta_f}{\supset} F$.

(Nδ_f4)$A \overset{\delta_f}{\supset} B \Rightarrow A \supset B$.

(Nδ_f5) $\emptyset \overset{\delta_f}{\supset} \emptyset$.

(Nδ_f1)($\Rightarrow$). Имеем $E_1 \supset f^{-1}(A_1) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $A_1 \overset{\delta}{\supset} B$, $E_2 \supset f^{-1}(A_2) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $A_2 \overset{\delta}{\supset} B$. Поэтому $E_1 \cap E_2 \supset f^{-1}(A_1 \cap A_2) \supset f^{-1}(B) \supset F$, и по (N$\delta_1$), $A_1 \cap A_2 \overset{\delta}{\supset} B$, так что $E_1 \cap E_2 \overset{\delta_f}{\supset} F$.

($\Leftarrow$) Так как $E_1 \cap E_2 \overset{\delta_f}{\supset} F$, то $E_1 \cap E_2 \supset f^{-1}(A) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $A \overset{\delta}{\supset} B$. Поэтому $E_1 \supset f^{-1}(A) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $E_2 \supset f^{-1}(A) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $A \overset{\delta}{\supset} B$, то есть $E_1 \overset{\delta_f}{\supset} F$, $E_2 \overset{\delta_f}{\supset} F$.

(Nδ_f2) $E \overset{\delta_f}{\supset} F \Rightarrow (E \supset f^{-1}(A), f^{-1}B \supset F,\ A \overset{\delta}{\supset} B) \Rightarrow ((X \setminus B) \overset{\delta}{\supset} (X \setminus A)$, $(Y \setminus F) \supset f^{-1}(X \setminus B)$, $(Y \setminus E) \supset f^{-1}(X \setminus A)) \Rightarrow (Y \setminus F) \overset{\delta_f}{\supset} (Y \setminus E)$.

(Nδ_f3). $E \overset{\delta_f}{\supset} F \Rightarrow (E \supset f^{-1}(A), f^{-1}B \supset F,\ A \overset{\delta}{\supset} B) \Rightarrow A \overset{\delta}{\supset} C \overset{\delta}{\supset} B$, и полагая $H = f^{-1}(C)$, получаем: $E \supset f^{-1}(A) \supset f^{-1}(C) \supset H$, $A \overset{\delta}{\supset} C$, то есть $E \overset{\delta_f}{\supset} H$, и $H \supset f^{-1}(C) \supset f^{-1}(B) \supset F$, $C \overset{\delta}{\supset} B$, то есть $H \overset{\delta_f}{\supset} F$.

(Nδ_f4), (Nδ_f5). Прямо следуют из свойств (Nδ4) и (Nδ5).

2). Очевидно, что $C \overset{\delta}{\supset} D \Rightarrow f^{-1}(C) \overset{\delta_f}{\supset} f^{-1}(D)$. Наоборот, пусть $f^{-1}(C) \overset{\delta_f}{\supset} f^{-1}(D)$. Тогда $f^{-1}(C) \supset f^{-1}(A), f^{-1}(B) \supset f^{-1}(D), A \overset{\delta}{\supset} B$. Если f сюръективно, то $C \supset A, B \supset D, A \overset{\delta}{\supset} B$, то есть по свойству $(N\delta 1'')$, $C \overset{\delta}{\supset} D$.

3). ($\Leftarrow$). Следует из 2), так как $f^{-1}(A) = A \cap Y$.

($\Rightarrow$). По определению, $E \overset{\delta_f}{\supset} F \Rightarrow E \supset f^{-1}(C) = C \cap Y$, $f^{-1}(D) = D \cap Y \supset F$, $C \overset{\delta}{\supset} D$. Обозначим $A = E \cup C$, $B = D \cap F$. Тогда $A \cap Y = E$, $B \cap Y = F$, и по (Nδ_1''), $A \overset{\delta}{\supset} B$.

$\square$

Пусть X – множество, $\alpha = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$, $\beta = \{B_j \subset X \mid j \in J\}$, $x \in X$, $F, H \subset X$. Зафиксируем обозначения и термины:

$\alpha(F) = st_\alpha F = \cup\{A_i \mid A_i \cap F \neq \emptyset\}$,

$st_\alpha \beta = \{st_\alpha B_j \mid j \in J\}$, $\alpha^{**} = st_\alpha \alpha = \{st_\alpha A_i \mid i \in I\}$,

$\alpha(x) = st_\alpha x = \cup\{A_i \mid x \in A_i\}$, $\alpha^* = \{st_\alpha x \mid x \in X\}$,

$\alpha \cap B = \{A_i \cap B \mid i \in I\}$, $\alpha \cap \beta = \{A_i \cap B_j \mid i \in I, j \in J\}$.

$\alpha \prec \beta$ (α вписано в β) $\Leftrightarrow$ имеется отображение $\varphi : I \to J$, называемое отображением вписывания, такое, что $\forall i \in I, A_i \subset B_{\varphi(i)}$.

Пусть $\overset{\delta}{\subset}$ бинарное отношение на множестве подмножеств множества X. Через $\overset{\delta}{\supset}$ будем обозначать отношение, обратное к $\overset{\delta}{\subset}$.

$\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$ (β δ-вписано в α) $\Leftrightarrow$ имеется отображение $\varphi : J \to I$, называемое отображением δ-вписывания, такое, что $\forall j \in J, B_j \overset{\delta}{\subset} A_{\varphi(j)}$.

Отметим очевидные свойства: если α, β, γ произвольные семейства, то $\alpha \cap \beta \prec \alpha, \alpha \cap \beta \prec \beta$; если $\alpha \prec \beta$ и $\alpha \prec \gamma$, то $\alpha \prec \beta \cap \gamma$; $\alpha \prec \alpha$; если $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \gamma$, то $\alpha \prec \gamma$.

Сформулируем свойства рассматриваемых понятий, необходимые для дальнейшего.

Лемма 3. *Пусть X – множество, $\alpha = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$, $A = \cup\{A_i \subset X \mid i \in I\}$, $\beta = \{B_j \subset X \mid j \in J\}$, $B = \cup\{B_j \subset X \mid j \in J\}$, $\gamma = \{C_k \subset X \mid k \in K\}$, $C = \cup\{C_k \subset X \mid k \in K\}$, $F, H \subset X$.*

1). a). Если $\alpha \prec \beta$ и $F \subset H$, то $\alpha(F) \subset \beta(H)$.

b). $st_\alpha(B) \equiv \alpha(\cup\{(B_j) \mid j \in J\} = \cup\{\alpha(B_j) \mid j \in J\} \equiv \cup\{st_\alpha(B_j) \mid j \in J\}$.

c). Следующие условия эквивалентны:

(1) $\alpha(F) \cap H = \emptyset$;

(2) $F \cap \alpha(H) = \emptyset$;

(3) $\alpha \prec \{X \setminus F, X \setminus H\}$.

Таким образом, $\alpha(F) \cap H \neq \emptyset \Leftrightarrow F \cap \alpha(H) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists i \in I : A_i \cap F \neq \emptyset$ и $A_i \cap H \neq \emptyset$.

c'). Следующие условия эквивалентны:

(1') $X \setminus H \supset \alpha(X \setminus F)$

(2') $F \supset \alpha(H)$.

(3') $\alpha \prec \{F, X \setminus H\}$.

d). $\alpha \prec \{X \setminus C, st_\alpha C_k, \mid k \in K\}$, так что $\alpha \prec \{\alpha(F), X \setminus F\}$.

e). Пусть $r : M \to I$ отображение, и $\forall m_1, m_2 \in M, A_{r(m_1)} \cap A_{r(m_2)} \neq \emptyset$ (так будет, например, если $\cap\{A_{r(m)} \mid m \in M\} \neq \emptyset$). Тогда

$\cup\{A_{r(m)} \mid m \in M\} \subset \cap\{st_\alpha A_{r(m)} \mid m \in M\}$.

f). Если $\alpha \prec \beta$ и $\gamma' = \{C_k \mid st_\alpha C_k \neq \emptyset\} \prec \varepsilon$, то $st_\alpha \gamma \prec st_\beta \varepsilon$, в частности, если $\alpha \prec \beta$ и $\alpha \prec \gamma$, то $\alpha^{**} \prec st_\beta \gamma = \{st_\beta C_k \mid k \in K\}$.

f'). Пусть $J = \cup\{J_l \mid l \in L\}$, $\beta_l = \{b_j \mid j \in J_l\}$, и $\forall l \in L, st_{\gamma_l} \beta_l \prec \alpha$. Если $\forall l \in L, \gamma \prec \gamma_l$ (например, если L конечно и $\gamma = \cap\{\gamma_l \mid l \in L\}$), то $st_\gamma \beta \prec \alpha$.

В частности, если J конечно и $\{st_{\gamma_j} B_j \mid j \in J\} \prec \alpha$, то $st_\gamma \beta \prec \alpha$, где $\gamma = \cap\{\gamma_j \mid j \in J\}$.

g). $F \cap A = F \cap st_\alpha F$. Таким образом, $F \subset st_\alpha F \Leftrightarrow F \subset A$; $st_\alpha F \neq \emptyset \Leftrightarrow F \cap A \neq \emptyset$.

h). $\alpha^*(F) = \alpha(\alpha(F)) \subset \alpha^{**}(F)$. Таким образом, если $\alpha^{**} \prec \gamma$ или $\alpha^* \prec \gamma$ и $F \subset A$, то $F \subset \alpha(F) \subset \alpha(\alpha(F)) \subset \gamma(F)$.

i). Если $F \cap A_i \neq \emptyset$, то $A_i \subset \alpha(F)$ и $\alpha(A_i) \subset \alpha(\alpha(F))$. Таким образом, если $\emptyset \neq F \subset A_i$, то $A_i \subset \alpha(F) \subset \alpha(A_i) \subset \alpha(\alpha(F)) = \alpha^*(F)$.

j). Пусть $Y \subset X$. Тогда $\gamma \cap Y \prec \alpha \Leftrightarrow \gamma \prec \tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha} = \{A_i \cup (X \setminus Y) \mid i \in I\}$, и при этом $\alpha \cap Y$ является покрытием $Y \Leftrightarrow \tilde{\alpha}$ является покрытием X.

2). a). Если каждое непустое A_i имеет непустое пересечение с C, в частности, если $A \subset C$, то $\alpha \prec st_\alpha \gamma = \{st_\alpha C_k \mid k \in K\}$;

Если $C \subset A$, *то* $\gamma \prec st_\alpha\gamma$. *Точнее*, $\forall k \in K, C_k \subset st_\alpha C_k$.

Таким образом, если $A = C$, *например, если* α *и* γ *покрытия* X, *то* $\alpha \prec st_\alpha\gamma$, $\gamma \prec st_\alpha\gamma$, $\alpha \prec st_\gamma\alpha$, $\gamma \prec st_\gamma\alpha$.

b). Пусть $st_\alpha\beta \prec \gamma$. *Тогда имеется семейство* $\tilde{\beta} = \{\tilde{B}_k \mid k \in K\}$, *такое, что* $\cup\{\tilde{B}_k \mid k \in K\} = B \equiv \cup\{B_j \mid j \in J\}$ *и* $st_\alpha\tilde{B}_k \subset C_k$, *так что* $\beta \prec \tilde{\beta}$, $st_\alpha\tilde{\beta} \prec \gamma$.

c). Пусть $\{E_i \subset X \mid i \in I\}$ *такое семейство, что* $\forall i \in I$, $A_i \supset st_\gamma E_i$, $I_j \subset I$, $I = \cup\{I_j \mid j \in J\}$, $\tilde{E}_j = \cup\{E_i \mid i \in I_j\}$, $\alpha_j = \{A_i \mid i \in I_j\}$.

Тогда $\forall j \in J$, $\gamma \prec \{A_i, X \setminus \tilde{E}_j \mid i \in I_j\} \prec \tilde{\alpha_j} = \{A_i \cup (X \setminus \tilde{E}_j) \mid i \in I_j\}$, *так что* $\gamma \cap \tilde{E}_j \prec \alpha_j \cap \tilde{E}_j = \tilde{\alpha_j} \cap E_j$.

d). Пусть $\varepsilon = \{E_i \subset X \mid i \in I\}$ *и* $\forall i \in I$, $\gamma \prec \{A_i, X \setminus E_i\}$ *(например,* I *конечно и* $\gamma = \cap\{\{A_i, X \setminus E_i\} \mid i \in I\}$*). Тогда* $st_\gamma\varepsilon \prec \alpha$, *точнее*, $\forall i \in I$, $A_i \supset st_\gamma E_i$.

e). $\alpha \prec \alpha^* \prec \alpha^{**} \prec (\alpha^*)^*$.

Доказательство. 1). a). Если $i \in I$, то имеется $j \in J : A_i \subset B_j$, так что если $A_i \cap F \neq \emptyset$, то и $B_j \cap H \neq \emptyset$, то есть $A_i \subset st_\beta H$.

b). $A_i \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists j \in J : A_i \cap B_j \neq \emptyset$, откуда и следует требуемое равенство.

c). Эквивалентность условий (1) и (3) прямо следует из того факта, что пересечение H с объединением множеств пусто $\Leftrightarrow$ пусто пересечение H с каждым из этих множеств.

c'). Условие (1') эквивалентно условию $\alpha(X \setminus F) \cap H = \emptyset$, а условие (2') условию $(X \setminus F) \cap \alpha(H) = \emptyset$. Таким образом, условия (1'), (2'), (3') получаются из условий соответственно (1), (2) и (3) заменой F на $X \setminus F$.

d). Если $A_i \not\subset X \setminus C$, то $A_i \cap C \neq \emptyset$ и значит имеется $k : A_i \cap C_k \neq \emptyset$, то есть $A_i \subset st_\alpha C_k$. Полагая $\gamma = \{F\}$, получаем $\alpha \prec \{\alpha(F), X \setminus F\}$.

e). По условию, $\forall m_1, m_2 \in M, A_{r(m_1)} \subset st_\alpha A_{r(m_2)}$, откуда и следует соотношение $\cup\{A_{r(m)} \mid m \in M\} \subset \cap\{st_\alpha A_{r(m)} \mid m \in M\}$.

f). Если $st_\alpha C_k \neq \emptyset$, то по условию имеется $C_k \subset E_l$ и значит, по a), $st_\alpha C_k \subset st_\beta E_l$, откуда $st_\alpha\gamma \prec st_\beta\varepsilon$.

f'). Пусть $j \in J$, тогда $j \in J_l$ для некоторого $l \in L$ и по условию, $st_{\gamma_l} B_j \subset A_i$ для некоторого $i \in I$. По 1).a), $st_\gamma B_j \subset A_i$ и значит $st_\gamma\beta \prec \alpha$.

g). Также очевидным образом следует из стандартных теоретико множественных соотношений.

h). Так как $A_i \subset st_\alpha A_i$, то в силу b), $\alpha(\alpha(F)) = \cup\{A_i \mid A_i \cap \alpha(F) \neq \emptyset\} = \cup\{A_i \mid \alpha(A_i) \cap F \neq \emptyset\} \subset \cup\{\alpha(A_i) \mid \alpha(A_i) \cap F \neq \emptyset\} = \alpha^{**}(F)$. Включение $F \subset \alpha(F)$ следует из g).

Далее, используя b) и c) получаем: $\alpha^*(F) = \cup\{\alpha(x) \mid \alpha(x) \cap F \neq \emptyset\} = \cup\{\alpha(x) \mid x \in \alpha(F)\} = \alpha(\alpha(F))$.

i). По определению $\alpha(F)$, если $F \cap A_i \neq \emptyset$, то $A_i \subset \alpha(F)$ и значит по a), $\alpha(A_i) \subset \alpha(\alpha(F))$. Таким образом, если $\emptyset \neq F \subset A_i$, то $A_i \subset \alpha(F) \subset \alpha(A_i) \subset \alpha(\alpha(F)) = \alpha^*(F)$.

j). Следует из очевидного соотношения $F \cap Y \subset H \Leftrightarrow F \subset H \cup (X \setminus Y)$.

2). a). Прямо следует из 1)d) и 1)g).

b). Определим $J_k \subset J$, полагая $j \in J_k \Leftrightarrow st_\alpha B_j \subset C_k$. Так как $st_\alpha\beta \prec \gamma$, то $\cup\{J_k \mid k \in K\} = J$. Таким образом, существует (и вообще говоря, не одно) отображение r, сопоставляющее каждому $k \in K$ множество $r(k) \subset J_k$, так, что $\cup\{r(k) \mid k\} = J$. Из последнего равенства следует, что если $\tilde{B}_k = \cup\{B_j \mid j \in$

$r(k)\}$, то $\beta \prec \tilde{\beta}$ и $\cup\{\tilde{B}_k \mid k \in K\} = \cup\{B_j \mid j \in r(k), k \in K\} = \cup\{B_j \mid j \in J\} = B$. По 1)b), $st_\alpha \tilde{B}_k = \cup\{st_\alpha B_j \mid j \in r(k)\} \subset C_k$.

c). По 1)d), $\gamma \prec \{st_\gamma E_i, X \setminus \tilde{E}_j \mid i \in I_j\}$ и так как $st_\gamma E_i \subset A_i$, то $\gamma \prec \{A_i, X \setminus \tilde{E}_j \mid i \in I_j\}$. Остальное очевидно.

d). Прямо следует из 1)c').

e). Полагая в 1)i), $F = \{x\}$, где $x \in A_i$, получаем $A_i \subset \alpha(x) \subset \alpha(A_i) \subset \alpha^*(x)$. Так как $\alpha = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$, $\alpha^* = \{st_\alpha x \mid x \in X\}$, $\alpha^{**} = \{st_\alpha A_i \mid i \in I\}$, то отсюда прямо получается цепочка $\alpha \prec \alpha^* \prec \alpha^{**} \prec (\alpha^*)^*$.)

□

Определение 2. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство. Семейство* $\alpha = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$ *называется* δ*-нормальным покрытием* X, *если* $\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$ *для некоторого конечного покрытия* β *множества* X, *то есть если имеется такое* $\beta = \{B_j \mid j \in J\}$, *что* J *конечно,* $\cup\{B_j \mid j \in J\} = X$ *и* $\forall j \in J \exists i \in I : B_j \overset{\delta}{\subset} A_i$. *Класс всех* δ*-нормальных покрытий* X *будем обозначать* $\mathcal{U}_\delta$.

Лемма 4. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство.*

1). a). Если $\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$, *то* $\beta \prec \alpha$.

b). Если $\beta \prec \alpha \overset{\delta}{\prec} \gamma \prec \omega$, *то* $\beta \overset{\delta}{\prec} \omega$.

c). Если $\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$, *то имеется* γ: $\beta \overset{\delta}{\prec} \gamma \overset{\delta}{\prec} \alpha$.

d). Если $\beta_1 \overset{\delta}{\prec} \alpha_1$, $\beta_2 \overset{\delta}{\prec} \alpha_2$, *то* $\beta_1 \cap \beta_2 \overset{\delta}{\prec} \alpha_1 \cap \alpha_2$.

2). a). Если $\alpha \in \mathcal{U}_\delta$ *и* $\alpha \prec \gamma$, *то* $\gamma \in \mathcal{U}_\delta$.

b). Если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{U}_\delta$, *то* $\alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathcal{U}_\delta$.

3). Пусть $\alpha = \{A_i \mid i \in I\} \in \mathcal{U}_\delta$. *Тогда имеется такое* δ*-нормальное покрытие* $\{C_i \mid i \in I\}$, *что* $\forall i \in I$, $A_i \overset{\delta}{\supset} C_i$ *и* $I' = \{i \in I \mid C_i \neq \emptyset\}$ *конечно.*

Таким образом, $\{C_i \mid i \in I'\}$ *- конечное* δ*-нормальное покрытие и*

$\{C_i \mid i \in I'\} \overset{\delta}{\prec} \{A_i \mid i \in I'\} \prec \alpha$.

Доказательство. 1). a), b), c), d) следуют из свойств нормальности $(N\delta4)$ $(N\delta1'')$, $(N\delta3)$, $(N\delta1')$, сформулированных в определении 1 и лемме 1.

2). a). Так как $\alpha \in \mathcal{U}_\delta$, то $\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$, где β конечное покрытие множества X, так что по 1), $\beta \overset{\delta}{\prec} \gamma$, то есть $\gamma \in \mathcal{U}_\delta$.

b). По условию, $\beta_1 \overset{\delta}{\prec} \alpha_1$, $\beta_2 \overset{\delta}{\prec} \alpha_2$, где $\beta_k (k = 1, 2)$ конечные покрытия множества X. Поэтому $\beta_1 \cap \beta_2$ конечное покрытие X, и по 1)d), $\beta_1 \cap \beta_2 \overset{\delta}{\prec} \alpha_1 \cap \alpha_2$, так что $\alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathcal{U}_\delta$.

3). По условию, $\beta \overset{\delta}{\prec} \alpha$, где $\beta = \{B_j \mid j \in J\}$ покрытие множества X, J - конечное множество. Пусть $\varphi : J \to I$ отображение δ-вписывания β в α, $B_i = \cup\{B_j \mid j \in \varphi^{-1}(i)\}$. Тогда $I' = \{i \in I \mid B_i \neq \emptyset\} \subset \{i \in I \mid \varphi^{-1}(i) \neq \emptyset\}$ и значит конечно, $\cup\{B_i \mid i \in I'\} = \cup\{B_i \mid i \in I\} = \cup\{B_j \mid j \in J = X\}$, и так как $A_i \overset{\delta}{\supset} B_j$ при $\varphi(j) = i$, то по $(N\delta1')$, $A_i \overset{\delta}{\supset} B_i$. В силу $(N\delta3)$, существуют $C_i (i \in I')$, такие, что $A_i \overset{\delta}{\supset} C_i \overset{\delta}{\supset} B_i$.

□

Теорема 1. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство.*

1). Следующие условия эквивалентны:

(1) $A \overset{\delta}{\supset} B$*;*

(2) $\exists \gamma \in \mathcal{U}_\delta$*:* $A \supset \gamma(B) \equiv st_\alpha(B)$*;*

(3) $\exists \gamma \in \mathcal{U}_\delta$*:* $\gamma \overset{\delta}{\prec} \{A, X \setminus B\}$*;*

(4) $\{A, X \setminus B\} \in \mathcal{U}_\delta$*.*

В частности, $\{A_1, A_2\} \in \mathcal{U}_\delta \Leftrightarrow A_1 \overset{\delta}{\supset} X \setminus A_2 \Leftrightarrow A_2 \overset{\delta}{\supset} X \setminus A_1$*.*

2). Пара $(X,\mathcal{U}_\delta)$ *является равномерным пространством, то есть выполняются следующие условия*

$(\mathcal{U}_\delta 1)$ $\forall \alpha \in \mathcal{U}_\delta\ \exists \beta \in \mathcal{U}_\delta$*:* $\beta^{**} \prec \alpha$*;*

$(\mathcal{U}_\delta 2)$ $\forall \alpha, \gamma \in \mathcal{U}_\delta$*,* $\exists \varepsilon \in \mathcal{U}_\delta$*:* $\varepsilon \prec \alpha$ *и* $\varepsilon \prec \gamma$*;*

$(\mathcal{U}_\delta 3)$ $\forall \alpha, \gamma$ *- семейств подмножеств* X*, если* $\alpha \prec \gamma$ *и* $\alpha \in \mathcal{U}_\delta$*, то* $\gamma \in \mathcal{U}_\delta$*.*

Доказательство. 1). Эквивалентность условий (2) и (3) следует из леммы 3.1)c'), а эквивалентность условий (3) и (4) - из леммы 4.2)a).

(1) $\Rightarrow$ (4). Так как $A \overset{\delta}{\supset} B$, то по определению нормального пространства имеется $C : A \overset{\delta}{\supset} C \overset{\delta}{\supset} B$, то есть $A \overset{\delta}{\supset} C$, $X \setminus B \overset{\delta}{\supset} X \setminus C$. Так как $C \cup (X \setminus C) = X$, то по определению δ-нормального покрытия, $\{A, X \setminus B\} \in \mathcal{U}_\delta$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Так как $\{A, X \setminus B\} \in \mathcal{U}_\delta$, то имеются C, D, такие, что $C \cup D = X$, $A \overset{\delta}{\supset} C$, $X \setminus B \overset{\delta}{\supset} D$, откуда $A \overset{\delta}{\supset} C \supset X \setminus D \overset{\delta}{\supset} B$. По свойствам $(N\delta 4)$ и $(N\delta 1'')$ получаем $A \overset{\delta}{\supset} B$.

2). Условие $(\mathcal{U}_\delta 3)$ выполняется в силу пункта 2)a) леммы 4.

$(\mathcal{U}_\delta 2)$. Положим $\varepsilon = \alpha \cap \gamma$. Тогда $\varepsilon \prec \alpha$, $\varepsilon \prec \gamma$ и по пункту 1)d) леммы 4, $\varepsilon \in \mathcal{U}_\delta$.

$(\mathcal{U}_\delta 1)$. Пусть $\alpha = \{A_i \mid i \in I\} \in \mathcal{U}_\delta$. Тогда по лемме 4 имеется такое нормальное δ-покрытие $\gamma = \{C_i \mid i \in I\}$, что $\forall i \in I$, $A_i \overset{\delta}{\supset} C_i$ и $I' = \{i \in I \mid C_i \neq \emptyset\}$ конечно. По 1), $\omega_i = \{A_i, X \setminus C_i\} \in \mathcal{U}_\delta$ и значит, по пункту 2) леммы 4), $\omega = \cap\{\omega_i \mid i \in I'\} \in \mathcal{U}_\delta$. По пункту 2)d) леммы 3, $st_\omega \gamma \prec \alpha$. Полагая $\beta = \omega \cap \gamma$, получаем, что $\beta \in \mathcal{U}_\delta$ и по пункту 1)f) леммы 3, $\beta^{**} \prec \alpha$.

□

Лемма 5. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство.*

1). Пусть $f : Y \to X$ *отображение. Семейство* α *является* δ_f*-нормальным покрытием* $\Leftrightarrow$ *имеется* δ*-нормальное покрытие* γ*, такое, что* $f^{-1}(\gamma) \prec \alpha$*. В частности, для любого* δ*-нормального покрытия* γ*,* $f^{-1}(\gamma)$ *-* δ_f*-нормальное покрытие.*

2). Пусть $(Y, \overset{\delta_Y}{\supset})$ *подпространство* $(X, \overset{\delta}{\supset})$*,* $\alpha = \{A_i \subset Y \mid i \in I\}$ *семейство подмножеств. Следующие условия эквивалентны:*

(1) α *является* δ_Y*-нормальным покрытием* Y*.*

(2) Имеется δ*-нормальное покрытие* γ*, такое, что* $\gamma \cap Y \prec \alpha$*.*

(3) Имеется δ*-нормальное покрытие* γ *пространства* X*, такое, что* $\gamma \cap Y = \alpha$ *(а именно, таким покрытием является* $\tilde{\alpha} = \{A_i \cup (X \setminus Y) \mid i \in I\}$*).*

В частности, для любого δ*-нормального покрытия* ω*, семейство* $\omega \cap Y$ *является* δ_Y*-нормальным покрытием.*

Доказательство. Доказательство.

1). ($\Rightarrow$). По лемме 4, можно считать, что $\alpha = \{E_i \mid i \in I\}$ конечно и имеется такое семейство $\{F_i \mid i \in I\}$, что $\cup\{F_i \mid i \in I\} = Y$, $\forall i \in I$, $E_i \overset{\delta_f}{\supset} F_i$, так что $E_i \supset f^{-1}(A_i), f^{-1}(B_i) \supset F_i$, $A_i \overset{\delta}{\supset} B_i$. Пусть $\gamma = \{A_i, X \setminus B \mid i \in I\}$, где $B = \cup\{B_i \mid i \in I\}$, $\omega = \cap_{i\in I}\{A_i, X \setminus B_i\}$. По теореме 1, $\forall i \in I, \{A_i, X \setminus B_i\} \in \mathcal{U}_\delta$, а значит и ω является нормальным δ-покрытием. Так как $\forall i \in I, \omega \prec \{A_i, X \setminus B_i\}$, то $\omega \prec \gamma$, так что γ тоже нормальное δ-покрытие. Поскольку $f^{-1}(B) = Y$, то $f^{-1}(X \setminus B) = \emptyset$, следовательно, $f^{-1}(\gamma) \prec \alpha$.

($\Leftarrow$). Прямо следует из определения нормального покрытия и того факта, содержащегося в определении δ_f, что если $C_k \overset{\delta}{\supset} B_j$, то $f^{-1}(C_k) \overset{\delta_f}{\supset} f^{-1}(B_j)$.

Эквивалентнось условий (1) и (2) следует из 1), (3) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как $\gamma \cap Y \prec \alpha$, то по лемме 3, $\gamma \prec \tilde{\alpha}$, так что $\tilde{\alpha} \in \mathcal{U}_\delta$. Равенство $\tilde{\alpha} \cap Y = \alpha$ очевидно.

□

Доказанные свойства нормальных покрытий позволяют утверждать, что на решётке всех подмножеств множества X нормальные покрытия образуют топологию Гротендика, относительно которой каждое подмножество является паракомпактным в смысле [3].

Определение топологии Гротендика [1], [2] для случая, когда категория является нижней полурешёткой, может быть сформулировано так.

Определение 3. *Пусть K – $\wedge$-полурешетка. Обозначим через $T(a)$ класс всех семейств $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I, a_i \leq a\} \in \tau(a)$. Отображение τ, сопоставляющее каждому $a \in K$ класс $\tau(a) \subset T(a)$, называется топологией Гротендика на $K \Leftrightarrow$ выполняются следующие условия:*

(τ1). $\forall a \in K$, $\{a\} \in \tau(a)$.

(τ2). $\forall a \in K$, $\forall \alpha \in \tau(a)$, $\forall b \leq a$, $\alpha \wedge b \in \tau(b)$

(τ3). $\forall a \in K$, $\forall \alpha = \{a_i \mid i \in I\} \in \tau(a)$, если $\forall i \in I$, $\{a_{ij} \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$, то $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J_i\} \in \tau(a)$.

(τ4). $\forall a \in K$, $\forall \alpha = \{a_i \leq a \mid i \in I\}$, если $\exists \beta \in \tau(a)$, такое, что $\beta \prec \alpha$, то $\alpha \in \tau(a)$.

Если же выполняются только условия (τ1), (τ2), (τ3), то τ называется предтопологией на K.

Семейство α называется τ-покрытием a, если $\alpha \in \tau(a)$. Таким образом, $\tau(a)$ - это совокупность всех τ-покрытий a.

Обозначим через $M(a) = \{\alpha \in T(a) \mid \{a\} \prec \alpha\}$. Тогда для любой топологии Гротендика τ, $M(a) \subset \tau(a) \subset T(a)$, так что M минимальная топология Гротендика, T максимальная топология Гротендика на K.

Имеется понятие канонической топологии, однозначно задаваемой на каждой категории [1]. Топология Гротендика, более слабая, чем каноническая, называется субканонической. Известно, что топология на частично упорядоченном множестве является субканонической, если $\forall a \in K$, $\forall \alpha \in \tau(a)$, $\sup_K \alpha = a$.

Отметим, что из условий (τ2) и (τ3) следует

(τ5). Если $\alpha, \beta \in \tau(a)$, то $\alpha \wedge \beta \in \tau(a)$.

Отметим также, что если $p\tau$ предтопология на K, и τ задаётся условием $\alpha \in \tau(a) \Leftrightarrow \exists\ \beta \in p\tau(a) : \beta \prec \alpha$, то τ является топологией Гротендика на K, порождённой предтопологией $p\tau$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{U}$ непустой класс семейств элементов $\wedge$-полурешётки K, направленный по вписыванию, τ топология Гротендика на K. Определим для каждого отличного от нуля $a \in K$ класс $p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$ семейств, полагая $\beta \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$ $\Leftrightarrow$ β конечно, $\beta \in \tau(a)$ и $\exists \gamma \in \mathfrak{U}$: $\gamma \wedge a \prec \beta$. Если K имеет нуль $0 \in K$, то полагаем $p\tau_{\mathfrak{U}}(0) = \{\emptyset, \{0\}\}$, где $\emptyset$ - пустое семейство. Тогда*

1). $p\tau_{\mathfrak{U}}$ является предтопологией Гротендика, так что полагая $\alpha \in \tau_{\mathfrak{U}}(a)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \in T(a)$ и $\exists \beta \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a) : \beta \prec \alpha$, получаем топологию Гротендика $\tau_{\mathfrak{U}}$ на K.

2). Если $\forall a \in K$, $\forall \gamma \in \mathfrak{U}$, $\sup a \wedge \gamma = a$, то $\tau_{\mathfrak{U}}$ субканоническая топология Гротендика.

Доказательство. 1). Докажем, что выполняются следующие условия:

($p\tau_{\mathfrak{U}}1$) $\forall a \in K$, $\{a\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$

($p\tau_{\mathfrak{U}}2$) Если $\beta \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$, то $\forall b \leq a$, $\beta \wedge b \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$

($p\tau_{\mathfrak{U}}3$) Если $\beta = \{b_j \in K \mid j \in \mathcal{J}\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$, $\beta_j = \{b_{jk} \mid k \in \mathcal{K}_j\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b_j)$, то $\delta = \{b_{jk} \mid j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}_j\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$.

($p\tau_{\mathfrak{U}}1$). Так как $\{a\} \in \tau(a)$ и так как $\mathfrak{U} \neq \emptyset$, то $\gamma \wedge a \prec \{a\}$, где $\gamma \in \mathfrak{U}$ и значит $\{a\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$.

($p\tau_{\mathfrak{U}}2$). Если $\beta \in p\tau_{\mathfrak{U}}(a)$ и $b \leq a$, то $\beta \in \tau(a)$, β конечно и $\gamma \wedge a \prec \beta$ ($\gamma \in \mathfrak{U}$) и следовательно $\beta \wedge b \in \tau(b)$ и $\gamma \wedge b \prec \beta \wedge b$, то есть $\beta \wedge b \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$.

($p\tau_{\mathfrak{U}}3$). Если $\beta = \{b_j \in K \mid j \in \mathcal{J}\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$, $\beta_j = \{b_{jk} \mid k \in \mathcal{K}_j\} \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b_j)$, то имеются $\gamma, \gamma_j \in \mathfrak{U} : \gamma \wedge b \prec \beta$, $\gamma_j \wedge b_j \prec \beta_j$, По условию, имеется $\tilde{\gamma} = \{c_l \in K \mid l \in \mathcal{L}\} \in \mathfrak{U} : \tilde{\gamma} \prec \gamma, \tilde{\gamma} \prec \gamma_j \forall j \in \mathcal{J}$, так что $\tilde{\gamma} \wedge b \prec \beta, \tilde{\gamma} \wedge b_j \prec \beta_j$. Поэтому $c_l \wedge b \leq b_j$, $c_l \wedge b_j \leq b_{jk}$, то есть $c_l \wedge b = c_l \wedge b \wedge b_j = c_l \wedge b_j \leq b_{jk}$. Таким образом, $\tilde{\gamma} \wedge b \prec \delta$. Так как δ конечно и $\delta \in \tau(b)$, то $\delta \in p\tau_{\mathfrak{U}}(b)$.

2). Если $\beta \in \tau_{\mathfrak{U}}(a)$, то $\exists \gamma \in \mathfrak{U}$: $\gamma \wedge a \prec \beta$, и в силу условия, $\sup a \wedge \gamma = a$, и значит $\sup \beta = a$.

$\square$

Класс множеств $\mathcal{M}$ назовём классом индексов, если для любых множеств I, J из того, что $I \in \mathcal{M}$ и мощность J не превышает мощности I следует $J \in \mathcal{M}$, и для любого $f : I \to \mathcal{M}$, такого, что $I \in \mathcal{M}$, $\cup\{f(i) \mid i \in I\} \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$-семейством называется любое семейство, множество индексов которого принадлежит $\mathcal{M}$

Классами индексов являются:

класс всех одноэлементных множеств;

класс всех конечных множеств;

класс всех множеств мощности $\leq r$, где r – бесконечное кардинальное число;

класс всех множеств.

Определение 4. *Пусть K нижняя полурешётка с нулём 0, τ субканоническая топология Гротендика на K, $\mathcal{M}$ - класс индексов, $P \subset K$. Назовем $a \in K$ $P - \mathcal{M} - \tau$-паракомпактным, если для любого $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ существует такое $\mathcal{M}$-семейство $\beta = \{b_j \in P \mid j \in J\}$, что $\forall j \in J$ $\exists i \in I$: $\{a_i, b_j\} \in \tau(a)$, $\wedge\{b_j \mid j \in J = 0\}$ и $\{b'_j \in K^0 \mid j \in J\}$ – τ-локально конечно в a. Последнее означает, что существует $\gamma = \{c_l \in K \mid l \in L\} \in \tau(a)$, такое, что $\forall l \in L$ $\{j \in J \mid c_l \not\leq b_j\}$ конечно.*

В названии $P - \mathcal{M} - \tau$-паракомпактности опускается P, если $P = K$, и опускается $\mathcal{M}$, если $\mathcal{M}$ класс всех множеств.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство,* $K = S(X)$ *решётка всех подмножеств множества* X, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_\delta$ *класс всех* δ*-нормальных покрытий* X, $\tau = T$ *- максимальная топология Гротендика на* K*, то есть* $\alpha = \{A_i \mid i \in I\} \in T(A) \Leftrightarrow \forall i \in I, A_i \subset A$. *Тогда*

1). $\forall A \subset X$, $T_{\mathfrak{U}_\delta}(A)$ *совпадает с классом всех* δ_A*-нормальных покрытий, а* $pT_{\mathfrak{U}_\delta}(A)$ *- с классом всех конечных* δ_A*-нормальных покрытий* A*. Если* $A = \emptyset$*, то* $pT_{\mathfrak{U}_\delta}(A) = \{\emptyset, \{A\}\}$.

2). Топология $T_{\mathfrak{U}_\delta}$ *является субканонической.*

3). Любое $A \subset X$ *является* $\mathcal{M} - T_{\mathfrak{U}_\delta}$*-паракомпактным элементом решётки* $S(K)$*, где* $\mathcal{M}$ *класс всех конечных множеств.*

Будем называть $T_{\mathfrak{U}_\delta}$ δ*-нормальной топологией Гротендика на* $S(X)$.

Доказательство. 1). По пункту 2) леммы 5, $pT_{\mathfrak{U}_\delta}(A)$ совпадает с классом всех конечных δ_A-нормальных покрытий A. По пункту 3) леммы 4, $T_{\mathfrak{U}_\delta}(A)$ совпадает с классом всех δ_A-нормальных покрытий. Так как пустое множество является нулём решётки $S(X)$, то условие $A = \emptyset$, то $pT_{\mathfrak{U}_\delta}(A) = \{\emptyset, \{A\}\}$ при $A = \emptyset$ также содержится в лемме 6.

2). Поскольку, по определению δ_A-нормального покрытия $\alpha = \{A_i \mid i \in I\}$, $\sup_K \alpha \equiv \cup\{A_i \mid i \in I\} = A$, то топология $T_{\mathfrak{U}}$ является субканонической.

3). По лемме 5 можно считать, что $A = X$. Пусть $\alpha = \{A_i \subset X \mid i \in I\} \in T_{\mathfrak{U}_\delta}$ то есть δ-нормальное покрытие X. По определению, имеется такое $\gamma = \{C_j \mid j \in J\}$, что J конечно, $\cup\{C_j \mid j \in J\} = X$ и $\forall j \in J \exists i \in I : A_i \overset{\delta}{\supset} C_j$. Обозначим $B_j = X \backslash C_j$, $\beta = \{B_j \mid j \in J\}$. Тогда $\cap\{B_j \mid j \in J\} = \emptyset$, и по пункту 1) теоремы 1, $\{A_i, X \backslash C_j\} \in \tau(a)$, то есть $\{A_i, B_j\} \in \tau(a)$. Так как J конечно, то условие $\mathcal{M} - T_{\mathfrak{U}_\delta}$-паракомпактности X выполнено.

□

3. Пучки и когомологии

Зафиксируем обозначения и термины, относящиеся к когомологиям и пучкам.

Пусть K – частично упорядоченное множество, L – категория. L-предпучком на K называется отображение A, сопоставляющее каждому $a \in K$ объект $A(a) \in Ob(L)$, и каждой паре $a \leq b$ морфизм $\rho_a^b : A(b) \to A(a)$ (называется гомоморфизмом ограничения), так что ρ_a^a - тождественный морфизм, а если $a \leq b \leq c$, то $\rho_a^b \circ \rho_b^c = \rho_a^c$.

Гомоморфизмом L-предпучков $u : A \to B$ называется совокупность морфизмов $u(a) : A(a) \to B(a)$ $(a \in K)$, совместимая с гомоморфизмами ограничения, то есть такая, что при $a \leq b$, $\rho_a^b \circ u(b) = u(a) \circ \rho_a^b$

Категория L-предпучков на K обозначается $\mathcal{P}_{K,L}$. Отметим, что если K – одноэлементное множество, то $\mathcal{P}_{K,L} = L$.

Если L категория множеств, то L-предпучки называются предпучками множеств, а если L категория абелевых групп, то абелевыми предпучками. Категория абелевых предпуков обозначается $\mathcal{P}_K$, а категория предпучков множеств - $\hat{K}$.

Если L – категория универсальных алгебр, то L-предпучок A называется L-подпредпучком L-предпучка B, если $\forall a \in K$, $A(a) \subset B(a)$ и совокупность отображений включения $A(a) \to B(a)$ является гомоморфизмом предпучков.

Множество всех подпредпучков множеств данного предпучка D обозначается через K_D.

Обозначим через 1_K или 1 предпучок множеств, задаваемый с точностью до изоморфизма следующим условием: $1_K(c)$ – одноэлементное множество $\forall c \in K$. Еще один предпучок на K, обозначаемый $\emptyset$, задается равенством $\emptyset(c) = \emptyset$ $\forall c \in K$. Ясно, что для любого предпучка множеств A имеются единственные гомоморфизмы $A \to 1_K$, и $\emptyset \to A$, так что 1_K и $\emptyset$ является соответственно финальным (терминальным) и инициальным объектами категории $\hat{K}$. Для фиксированного $a \in K$ через $j(a)$ обозначим подпредпучок 1_K, определяемый условием: $j(a)(c) \neq \emptyset \Leftrightarrow c \leq a$.

Пусть K нижняя полурешётка, то есть частично упорядоченное множество, для любых 2 элементов a, b которого существует точная нижняя грань $a \wedge b$.

Когомологии Чеха семейства $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$ определяются так. Пусть $\mathcal{A}$ – абелев предпучок на K. Для каждого целого $n \geq 0$ обозначим $[n] = \{0, 1, ..., n\}$, $I^{n+1} = Hom([n], I)$, и если $(s : [n] \to I) \in I^{n+1}$, то $\alpha_s = u_{s(0)} \wedge \ldots \wedge u_{s(n)}$. Группа n-коцепей $C^n(\alpha, \mathcal{A}) = 0$ при $n < 0$, а если $n \geq 0$, то $C^n(\alpha, \mathcal{A}) = \prod\{\mathcal{A}(\alpha_s) \mid s \in I^{n+1}\}$, так что $c \in C^n(\alpha, \mathcal{A}) \Leftrightarrow c = \{c(s) \in \mathcal{A}(\alpha_s) \mid s \in I^{n+1}\}$.

Отображение $d^n : C^n(\alpha, \mathcal{A}) \to C^{n+1}(\alpha, \mathcal{A})$ задаётся формулой

$d^n(c)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k c(t_k)|\alpha_t$, где $t_k : [n] \to I$ определяется равенствами: $t_k(m) = t(m)$ при $m < k$ и $t_k(m) = t(m+1)$ при $m \geq k$, то есть является последовательностью $t_k = (t(0), ..., t(k), \widehat{t(k)}, ..., t(n+1))$. Значок ˆ обозначает, что индекс, над которым он стоит, вычёркивается. Получился комплекс коцепей семейства α с коэффициентами в $\mathcal{A}$

$\ldots \longrightarrow C^{n-1}(\alpha, \mathcal{A}) \stackrel{d^{n-1}}{\longrightarrow} C^n(\alpha, \mathcal{A}) \stackrel{d^n}{\longrightarrow} C^{n+1}(\alpha, \mathcal{A}) \longrightarrow \ldots$

Когомологии Чеха семейства α с коэффициентами в $\mathcal{A}$ - это $H^n(\alpha, \mathcal{A}) = kerd^n/imd^{n-1}$.

Отметим, что если $s \in \mathcal{A}(a)$, то $s|\alpha \equiv \{s|a_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\} \in H^0(\alpha, \mathcal{A}) \subset C^0(\alpha, \mathcal{A}) = \prod\{\mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$, так что соответствие $s \mapsto s|\alpha$ является каноническим гомоморфизмом $\mathcal{A}(a) \to H^0(\alpha, \mathcal{A})$.

Если τ топология Гротендика на K, и для всякого $a \in K$ и для всякого $\alpha \in \tau(a)$ канонический гомоморфизм $\mathcal{A}(a) \to H^0(\alpha, \mathcal{A})$ является изоморфизмом, то предпучок $\mathcal{A}$ называется τ-пучком. Категория абелевых τ-пучков, то есть полная подкатегория категории абелевых предпучков, объекты которой - это в точности τ-пучки, обозначается $\mathcal{S}_\tau$.

Пусть $\beta = \{b_j \mid j \in J\} \prec \alpha$ ещё одно семейство. Зафиксируем отображение вписывания $\varphi : J \to I$. Тогда $b_j \leq a_{\varphi(j)}$ и определён гомоморфизм комплеков $\varphi^* : C^*(\alpha, \mathcal{A}) \to C^*(\beta, \mathcal{A})$, где $\varphi^n : C^n(\alpha, \mathcal{A}) \to C^n(\beta, \mathcal{A})$ задаётся так: если $c \in C^n(\alpha, \mathcal{A})$, $r : [n] \to J$, то $\varphi^n(c)(r) = c(\varphi \circ r)|\beta_r$. Таким образом, определён гомоморфизм $\tilde{\varphi}^n = H^n(\varphi^*) : H^n(\alpha, \mathcal{A}) \to H^n(\beta, \mathcal{A})$. Известно, что если $\varphi, \psi : J \to I$ два отображения вписывания, то φ^* и φ^* цепно гомотопны, так что отображения $\tilde{\varphi}^n$ и $\tilde{\psi}^n$ совпадают. Если τ - топология Гротендика на K, $a \in K$ то рассматривая отношение вписанности, как квазипорядок на $\tau(K)$, можно перейти к пределу и получить когомологии Чеха

$\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = colim\{H^n(\alpha, \mathcal{A}) \mid \alpha \in \tau(a)\}$ элемента a с коэффициентами в предпучке $\mathcal{A}$.

Когомологии Гротендика определяются так. Пусть τ топология Гротендика на K, $a \in K$, A предпучок множеств на K, $\mathcal{A}$ абелев предпучок. Тогда на множестве всех гомоморфизмов $Hom_{\hat{K}}(A, \mathcal{A})$ предпучков множеств естественно задаётся структура абелевой групппы, так что равенство $\Gamma_A(\mathcal{A}) = Hom_{\hat{K}}(A, \mathcal{A})$ определяет аддитивный функтор $\Gamma_A : \mathcal{P}_K \to Ab$ из категории абелевых предпучков в категорию абелевых групп. Его ограничение на категорию τ-пучков обозначим через $\Gamma_{\tau,A} : \mathcal{S}_\tau \to Ab$.

Пусть B подпредпучок A. Отображение, сопоставляющее каждому $u : A \to \mathcal{A}$ ограничение $u|B : B \to \mathcal{A}$ является гомоморфизмом абелевых групп $\Gamma_A(\mathcal{A}) \to \Gamma_B(\mathcal{A})$. Обозначим $\Gamma_{A,B}(\mathcal{A}) = ker\{\Gamma_A(\mathcal{A}) \to \Gamma_B(\mathcal{A})\}$. Этим определены аддитивные точные слева функторы $\Gamma_{A,B} : \mathcal{P}_K \to Ab$ и $\Gamma_{\tau,A,B} : \mathcal{S}_\tau \to Ab$.

Группа когомологий Гротендика $H^n_\tau(A, \mathcal{A})$ предпучка множеств A с коэффициентами в абелевом τ-пучке $\mathcal{A}$ определяется, как значение на $\mathcal{A}$, порождённом предпучком $\mathcal{A}$, n–го правого производного функтора $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,A}$. Аналогично, $H^n_\tau(A, B, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,A,B})(\mathcal{A})$, $H^n_\tau(a, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a})(\mathcal{A})$, $H^n_\tau(a, b, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a,b})(\mathcal{A})$, где $a, b \in K, b \le a$, $\Gamma_{\tau,a}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$, $\Gamma_{\tau,a,b}(\mathcal{A}) = ker\{\rho^a_b : \mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(b)\}$.

Отметим, что $H^n_\tau(A, \emptyset, \mathcal{A}) = H^n_\tau(A, \mathcal{A})$, $H^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(j(a), \mathcal{A})$, $H^n_\tau(a, b, \mathcal{A}) = H^n_\tau(j(a), j(b), \mathcal{A})$.

Если $M = \tau$ - минимальная топология, то индекс τ в обозначениях не пишем: $H^n(A, \mathcal{A})$. Отметим, что если $A = 1_K$, то $Hom_{\hat{K}}(1_K, \mathcal{A}) = \lim \mathcal{A}$, так что $H^n(1_K, \mathcal{A}) = \lim^n \mathcal{A}$ - n-й производный функтор обратного предела.

Лемма 7. *Пусть K - $\wedge$-полурешётка с 0, $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$, $\varepsilon = \{e_i \in K \mid i \in I\}$, $\beta = \{v_j \in K \mid j \in J\}$ семейства элементов, и при этом $v_j \wedge e_i \ne 0 \Rightarrow v_j \le a_i$. Предположим, что $\beta \prec \varepsilon$ и $q : J \to I$ отображение вписывания β в ε. Утверждается, что если $s : S \to J$ отображение множеств и $\forall k, m \in S$, $v_{s(k)} \wedge v_{s(m)} \ne 0$, то $\forall k, m \in S$, $v_{s(m)} \le a_{q(s(k))}$, так что если существует $\alpha_{q\circ s} \equiv \wedge\{a_{q(s(k))} \mid k \in S\}$, то $\forall m \in S$, $v_{s(m)} \le \alpha_{q\circ s}$, а если существует $\vee\{v_{s(m)} | m \in S\}$, то $\vee\{v_{s(m)} | m \in S\} \le \alpha_{q\circ s} \equiv \wedge\{a_{q(s(k))} \mid k \in S\}$.*

Доказательство. Пусть $k, m \in M$ - произвольные элементы. Так как $v_{s(k)} \wedge v_{s(m)} \ne 0$, то $e_{q(s(k))} \wedge v_{s(m)} \ne 0$, а значит по (3), $v_{s(m)} \le a_{q(s(k))}$. □

Лемма 8. *Пусть K - $\wedge$-полурешётка с 0, τ топология Гротендика на K, $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$, $\varepsilon = \{e_i \in K \mid i \in I\}$, $\beta = \{v_j \in K \mid j \in J\}$ семейства элементов, и при этом:*

(1) $\forall i \in I, e_i \le a_i$;

(2) если $v_j \wedge e_i \ne 0$, то $v_j \le a_i$;

(3) $\forall j \in J, I_j = \{i \in I \mid v_j \le a_i\}$ конечно;

(4) $\beta \prec \varepsilon$.

Предположим, что $\mathcal{A}(0) = 0$ и $\mathcal{A}$ - τ-локально нулевой абелев предпучок, то есть такой, что $\forall c \in K \forall h \in \mathcal{A}(c) \exists \gamma \in \tau(c) : s|\gamma = 0$. Тогда для любой коцепи $c \in C^n(\alpha, \mathcal{N})$ существует семейство $\delta = \{v_{j,l} \le v_j \mid j \in J, l \in L_j\}$ и отображение φ вписывания δ в α, а значит и цепное отображение $\varphi^* : C^*(\alpha, \mathcal{N}) \to C^*(\delta, \mathcal{N})$, такие, что $\forall j \in J, \{v_{j,l} \mid l \in L_j\} \in \tau(v_j)$ и $\varphi^*(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $j \in J$. По условию (3), $\{s \in I^{n+1} \mid \alpha_s \ge v_j\} \subset (I_j)^{n+1}$ конечно (и непусто, так как $\beta \prec \alpha$), и значит существует такое семейство $\{v_{j,l} \mid l \in L_j\} \in \tau(v_j)$, что $\forall s \in I^{n+1}$, $\alpha_s \ge v_j \Rightarrow c(s)|v_{j,l} = 0 \ \forall l \in L_j$. Обозначим $M = \{(j,l) \mid j \in J, l \in L_j\}$, $\delta = \{v_{j,l} \mid (j,l) \in M\}$, $p : M \to J$, где $p(j,l) = j$, так что p отображение вписывания δ в β. По условию (4), существует $q: J \to I$ - отображение вписывания β в ε. Тогда $\varphi = q \circ p : M \to I$ отображение вписывания δ в α, и если $r : [n] \to M$, $r(k) = (j_k, l_k)$, то $\delta_r = v_{j_0,l_0} \wedge ... \wedge v_{j_n,l_n}$, $\alpha_{\varphi \circ r} = a_{q(j_0)} \wedge ... \wedge a_{q(j_n)}$, $(\varphi^*(c))(r) = c(\varphi \circ r)|\delta_r$. Убедимся, что $\varphi^*(c) = 0$.

Если $\delta_r = 0$, то $\varphi^*(c)(r) = c(\varphi \circ r)|\delta_r \in \mathcal{N}(0) = \{0\}$.

Пусть $\delta_r \neq 0$. Так как $\delta_r \leq \beta_{p \circ r}$, то $\beta_{p \circ r} \neq 0$ и по лемме 7, для любого $k \in [n]$, $\alpha_{\varphi \circ r} = \alpha_{q \circ p \circ r} \geq v_{p(r(k))}$. По построению покрытия δ, $c(\varphi \circ r)|v_{j_k,l} = 0 \forall l \in L_{j_k}$, так что фиксируя, например, $k = 0$, получаем $(\varphi^*(c))(r) = c(\varphi \circ r)|\delta_r = (c(\varphi \circ r)|v_{j_0,l_0})|\delta_r = 0$. □

Теорема 3. *Пусть τ топология Гротендика на нижней полурешётке K, $a \in K$. Предположим, что в каждое τ-покрытие a вписывается $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, обладающее следующими свойствами:*

(a) α - τ-локально конечно, то есть имеется $\gamma \in \tau(a)$, для каждого элемента c которого $\{i \in I \mid a_i \wedge c \neq 0\}$ конечно.

(b) Имеются $\varepsilon = \{e_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, $\omega \in \tau(a)$, такие, что $\forall i \in I, e_i \leq a_i$ и для любого элемента c семейства ω, $c \wedge e_i \neq 0 \Rightarrow c \leq a_i$. Тогда:

1). Для любого τ-локально нулевого абелева предпучка $\mathcal{N}$ на K, такого, что $\mathcal{N}(0) = 0$, $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{N}) = 0$.

2). Если τ такая топология, что для любого абелева τ-пучка $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(0) = 0$ (так будет, например, если пустое семейство является τ-покрытием нуля $0 \in K$), то для любого абелева предпучка $\mathcal{A}$, такого, что $\mathcal{A}(0) = 0$, $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ - это τ-пучок, порождённый предпучком $\mathcal{A}$.

Доказательство. 1). По определению когомологий Чеха, достаточно доказать, что если $c \in C^n(\alpha, \mathcal{N})$ - коцикл, то имеется $\delta \in \tau(a)$ и отображение вписывания φ семейства δ в α, такие, что $\varphi^* c$ - кограница.

По условию, можно считать, что выполняются условия (a) и (b). Зафиксируем τ-покрытие a, вписанное в каждое из семейств $\gamma, \varepsilon, \omega$. Удалим из него все элементы, равные нулю. Полученное семейство также будет τ-покрытием a. Обозначим его через $\beta = \{v_j \in K \mid j \in J\}$.

Убедимся, что семейства $\alpha, \varepsilon, \beta$ удовлетворяют условиям (1)-(4) леммы 8. Условие (1) содержится в (b). По построению, $\beta \prec \varepsilon$, так что выполняется условие (4), и $\beta \prec \omega$, так что из условия (b) следует (2). Так как $v_j \neq 0$, то $v_j \leq a_i$ влечёт $a_i \wedge v_j \neq 0$ и значит $I_j = \{i \in I \mid v_j \leq a_i\} \subset \{i \in I \mid a_i \wedge v_j \neq 0\}$. Поскольку $\beta \prec \gamma$, то в силу (a), $\{i \in I \mid a_i \wedge v_j \neq 0\}$ конечно, а значит и I_j конечно. Условие (3) проверено.

По лемме 8, существует семейство $\delta = \{v_{j,l} \leq v_j \mid j \in J, l \in L_j\}$ и отображение φ вписывания δ в α, а значит и цепное отображение $\varphi^* : C^*(\alpha, \mathcal{N}) \to C^*(\delta, \mathcal{N})$, такие, что $\forall j \in J, \{v_{j,l} \mid l \in L_j\} \in \tau(v_j)$ и $\varphi^*(c) = 0$. Таким образом, $\varphi^*(c)$ - кограница, и так как $\beta \in \tau(a)$ и $\forall j \in J, \{v_{j,l} \mid l \in L_j\} \in \tau(v_j)$, то $\delta \in \tau(a)$. Равенство $\check{H}^n(a, \mathcal{N}) = 0$ доказано.

2). Равенство $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}})$, точнее, изоморфизм функторов

$\mathcal{A} \mapsto \check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A})$ и $\mathcal{A} \mapsto H^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}})$ выводится из 1) с помощью спектральной последовательности, связывающей когомологии Чеха и Гротендика [2], либо прямыми рассуждениями с помощью когомологичских функторов.

□

Пусть $(X, \overset{\delta}{\supset})$ нормальное пространство, $K = S(X)$ решётка всех подмножеств множества X, $T_{\mathfrak{U}_\delta}$ - δ-нормальная топология Гротендика на $S(X)$. Если $\tau = T_{\mathfrak{U}_\delta}$, то вместо $\check{H}^n_\tau(A, \mathcal{A})$ будем писать $\check{H}^n_\delta(A, \mathcal{A})$, а вместо $H^n_\tau(A, \mathcal{A})$ - $H^n_\delta(A, \mathcal{A})$ и называть, соответственно, δ-когомологиями Чеха и Гротендика множества $A \subset X$.

Теорема 4. *Пусть* $(X, \overset{\delta}{\supset})$ *нормальное пространство. Тогда:*

1). Для любого $T_{\mathfrak{U}_\delta}$*-локально нулевого абелева предпучка* $\mathcal{N}$ *на* $S(X)$*, такого, что* $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$*,* $\check{H}^n_\delta(A, \mathcal{N}) = 0 \forall A \subset X$*.*

2). Для любого абелева предпучка $\mathcal{A}$*, такого, что* $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$*,* $\forall A \subset X$*,* $\check{H}^n_\delta(A, \mathcal{A}) = H^n_\delta(A, \tilde{\mathcal{A}})$*, где* $\tilde{\mathcal{A}}$ *- это* $T_{\mathfrak{U}_\delta}$*-пучок, порождённый предпучком* $\mathcal{A}$*.*

Доказательство. По лемме 2 $(A, \overset{\delta_A}{\supset})$ является нормальным пространством, и по лемме 5, $\forall B \subset A$, $T_{\mathfrak{U}_{\delta_A}}(B) = T_{\mathfrak{U}_\delta}(B)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $A = X$.

1). Проверим условия (a) и (b) теоремы 2. По лемме 4), пункт 3), можно считать, что α конечно, так что (a) выполняется. По той же лемме, имеется такое δ-нормальное покрытие $\varepsilon = \{E_i \mid i \in I\}$, что $\forall i \in I$, $A_i \overset{\delta}{\supset} E_i$. По теореме 1, $\omega = \cap\{\{A_i, X \setminus E_i\} \mid i \in I\}$ является δ-нормальным покрытием X, а по лемме 3, пункт 2)d), $\forall i \in I$, $A_i \supset st_\omega E_i$, то есть для любого элемента C семейства ω, $C \cap E_i \neq 0 \Rightarrow C \subset A_i$. Условие (b) проверено.

Таким образом, равенство $\check{H}^n_\delta(X, \mathcal{N}) = 0$ следует из теоремы 2.

2). Так как, по определению топологии $T_{\mathfrak{U}_\delta}$, пустое семейство принадлежит $T_{\mathfrak{U}_\delta}(\emptyset)$, то нужный результат является частным случаем пункта 2) теоремы 2.

Как уже отмечалось в введении, этот результат, вместе с теоремой 2, позволяет применять методы работы [3] и, в силу имеющихся естественных связей между нормальностью, равномерностью и близостью, получать во всех 3 случаях результаты о мягких пучках и мягких размерностях, когомологических размерностях, размерностях Лебега, Исбелла, Бредона и их аналогов. В применении к непаракомпактным топологическим пространствам этот подход определяет новые группы когомологий, позволяющие получать упомянутые выше результаты. Отметим также, что в отличие от всех работ по когомологиям равномерных пространств, включая работы [6] и [8], пучковые когомологии на равномерном пространстве определяются и могут быть изучены вне зависимости от индуцированной на этом пространстве топологии.

□

References

[1] A. Grothendieck (with M. Artin and J.-L. Verdier), *Seminaire Geometrie Algebrique 4 [SGA4], Theorie de topos et cohomologie etale de schemas*, Lect. Notes in Math. **269, 270**, Heidelberg: Springer, 1972. Zbl 0237.00012

[2] M. Artin, *Grothendieck topologies*, Harvard Math. Dept. lecture Notes, Harvard: Harvard University, 1962. Zbl 0208.48701

[3] E. E. Skurikhin, *Sheaf Cohomology and Dimension of Ordered Sets*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **239** (2002), 289–317. MR1975151.

[4] E. E. Skurikhin, *Sheaves on Normal and Paracompact Lattices*, Vladivostok: Dalnauka, 1998.

[5] E. E. Skurikhin, *Sheaf Cohomology and Dimensions of Partially Ordered Sets*, Vladivostok: Dalnauka, 2004.

[6] E. E. Skurikhin, *Cohomology and Dimensions of Topological and Uniform Spaces*, Vladivostok: Dalnauka, 2008.
[7] E. E. Skurikhin, *On a class of categorical topological spaces*, Uspekhi Mat. Nauk, **63**:1 (2008), 167–168. MR2406190.
[8] E. E. Skurikhin, *Sheaf cohomology and the dimension of uniform spaces*, Uspekhi Mat. Nauk, **58**:4 (2003), 157–158. MR2042914.
[9] E. E.Skurikhin and A. G. Sukhonos, *Grothendieck topologies on Chu spaces*, Mat. Tr. **11**:2 (2008), 159–186. MR2500129.

Evgeniy Evgenyevich Skurikhin
Institute of Applied Mathematics,
Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
E-mail address: `eeskur@gmail.com`