S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 175–185 (2018) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2018.15.017 MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ Γ С СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ ГРАФАМИ Γ_2 И Γ_3

М.С. НИРОВА

Abstract. It is investigated distance-regular graphs Γ of diameter 3 with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3. If Γ is antipodal graph then either Γ is Taylor graph without triangles or $\bar{\Gamma}_2$ is pseudo-geometric graph for $GQ(r-1, c_2+1)$. If Γ is primitive graph then Γ has intersection array $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$.

Last result gives intersection arrays in the case when Γ_3 is strongly regular graph without triangles. If $\mu(\Gamma_3) \leq 11$, then Γ has intersection array $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ or $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.

Keywords: distance-regular graph, graph with strongly regular Γ_2 and Γ_3.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не

Nirova, M.S., On distance-regular graph Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025.

Поступила 20 декабря 2017 г., опубликована 1 марта 2018 г.

зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. главу 1 [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s,t)$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1) + (\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. В таких графах граница Хоффмана для клик равна $s+1$ и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L. *Овоидом* псевдогеометрического графа для $pG_\alpha(s,t)$ называется коклика из $st/\alpha + 1$ точек. Для овоида $\mathcal{O}$ достигается граница Хоффмана для коклик и каждая вершина вне $\mathcal{O}$ смежна с $t+1$ точками из $\mathcal{O}$. *Спредом* псевдогеометрического графа для $pG_\alpha(s,t)$ называется разбиение множества вершин множеством $\mathcal{S}$ клик порядка $s+1$.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [2, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$. Если $c = a-1$, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$, собственные значения $\theta_1 = a+p$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -a$ и $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1, 2a)$.

В данной работе исследуются дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны.

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$b_2 = a_3 + 1$, $b_1 = rc_2$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, r)$;*

(2) *если Γ — антиподальный граф и граф Γ_2 сильно регулярен, то либо Γ — граф Тэйлора без треугольников, либо граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(r-1, c_2+1)$.*

Замечание. *Пусть псевдогеометрический граф для $GQ(s,t)$ имеет разбиение множества вершин множеством $\mathcal{S}$ клик порядка $s+1$ (спред). Превратив $\mathcal{S}$ в множество коклик, по* [1, предложение 12.5.2] *получим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{st, s(t-1), 1; 1, t-1, st\}$.*

Обобщенные четырехугольники имеют спред для порядков $(s,1)$, $(1,t)$, (q,q), (q,q^2), $(q-1,q+1)$ *для* q*, являющихся степенями простых чисел,* $(q+1,q-1)$ *для* q*, являющихся степенями 2.*

Теорема 2. *Пусть* Γ *является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого графы* Γ_2 *и* Γ_3 *сильно регулярны. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3+1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3+r-1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$*;*

(2) *если* $a_3 = \alpha(c_2+1)$*, то* $k = (r+\alpha)(c_2+1)$*,* Γ_3 — *псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(r+\alpha, \alpha(c_2+1))$ *и* $k_3 = (r+\alpha)(\alpha(c_2+1)+1)$*;*

(3) *если* $\alpha = 1$*, то* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(r+1, c_2+1)$*, граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$*, собственные значения* $\theta_1 = c_2+r+1$*,* $\theta_2 = -1$*,* $\theta_3 = -c_2-1$ *и* $\bar{\Gamma}_2$ — *псевдогеометрический граф для* $pG_2(r+1, 2c_2+2)$*.*

Приведем список допустимых массивов примитивных графов Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 из [1, p. 425-431].

- 1. $\{19,12,5;1,4,15\}$, $p^1_{33}=4$, граф не существует по [3].
- 2. $\{35,24,8;1,6,28\}$, $p^1_{33}=8$, Γ_3 – псевдо $GQ(5,7)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(5,14)$. Граф не существует по [2].
- 3. $\{39,30,4;1,5,36\}$, $p^1_{33}=2$, Γ_3 – граф с параметрами (300,26,4,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (300,65,10,15).
- 4. $\{44,30,5;1,3,40\}$, $p^1_{33}=5$, Γ_3 – граф с параметрами (540,55,10,5), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(11,8)$.
- 5. $\{44,30,9;1,5,36\}$, $p^1_{33}=12$, Γ_3 – граф с параметрами (375,66,9,12), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (375,110,25,35) Граф не существует по [4].
- 6. $\{44,35,3;1,5,42\}$, $p^1_{33}=1$, Γ_3 – граф с параметрами (375,22,5,1) не существует, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (375,66,9,12).
- 7. $\{44,36,5;1,9,40\}$, $p^1_{33}=2$, Γ_3 – граф с параметрами (243,22,1,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (243,66,9,21).
- 8. $\{48,35,9;1,7,40\}$, $p^1_{33}=9$, Γ_3 – псевдо $GQ(6,6)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(6,12)$ граф не существует.
- 9. $\{49,36,5;1,4,45\}$, $p^1_{33}=4$, Γ_3 – граф с параметрами (540,49,8,4), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (540,98,16,18).
- 10. $\{49,36,8;1,6,42\}$, $p^1_{33}=8$, Γ_3 – псевдо $GQ(7,7)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(7,14)$.
- 11. $\{54,40,7;1,5,48\}$, $p^1_{33}=7$, Γ_3 – псевдо $GQ(9,6)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(9,12)$.
- 12. $\{55,36,11;1,4,45\}$, $p^1_{33}=22$, Γ_3 – псевдо $pG_2(11,10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (672,176,40,48).
- 13. $\{56,36,9;1,3,48\}$, $p^1_{33}=16$, Γ_3 – псевдо $pG_2(14,8)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (855,182,37,39).
- 14. $\{63,48,10;1,8,54\}$, $p^1_{33}=10$, Γ_3 – псевдо $GQ(7,9)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(7,18)$.
- 15. $\{65,44,11;1,4,55\}$, $p^1_{33}=22$, Γ_3 – псевдо $pG_2(13,10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (924,208,42,48).
- 16. $\{69,56,10;1,14,60\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=6$, Γ_3 – граф с параметрами (392,46,0,6), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (392,115,18,40).
- 17. $\{74,54,15;1,9,60\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=21$, Γ_3 – граф с параметрами (630,111,12,21), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (630,185,40,60).

- 18. $\{74,55,9;1,5,66\}$, $p^1_{33}=12$, Γ_3 – граф с параметрами (1000,111,14,12), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (1000,185,30,35).

- 19. $\{74,63,5;1,9,70\}$, $p^1_{33}=3$, Γ_3 – граф с параметрами (630,37,4,2), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (630,111,12,21).

- 20. $\{77,60,13;1,12,65\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=12$, Γ_3 – граф с параметрами (540,77,4,12), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (540,154,28,50).

- 21. $\{80,63,11;1,9,70\}$, $p^1_{33}=11$, Γ_3 – псевдо $GQ(8,10)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдо $pG_2(8,20)$.

- 22. $\{87,66,16;1,11,72\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=20$, Γ_3 – граф с параметрами (726,116,10,20), $\bar\Gamma_2$ – псевдо $pG_2(8,20)$.

- 23. $\{90,78,7;1,13,84\}$, $p^1_{33}=3$, Γ_3 – граф с параметрами (676,45,2,3), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (676,135,14,30).

- 24. $\{99,80,12;1,10,88\}$, $p^1_{33}=12$, Γ_3 – псевдо $GQ(9,11)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф $pG_2(9,22)$.

- 25. $\{119,96,18;1,16,102\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=18$, граф Γ_3 – псевдо $GQ(7,17)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдо $pG_2(7,34)$. Граф не существует по [3].

- 26. $\{119,100,15;1,20,105\}$, Q-полиномиальный, $p^1_{33}=10$, Γ_3 – граф с параметрами (800,85,0,10), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (800,204,28,60).

Под номерами 16 и 26 приведены массивы пересечений графов, для которых Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Следующий результат посвящен изучению этой ситуации при условии $\mu(\Gamma_3)\le 11$.

Теорема 3. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Если Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3)\le 11$, то Γ имеет массив пересечений* $\{14,10,3;1,5,12\}$, $\{119,100,15;1,20,105\}$ *или* $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r=4,6,10,16,19,24,28,40,46,52,58,60,70,79$.

1. Параметры графа Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3

В этом параграфе мы докажем теоремы 1 и 2. Сначала приведем два вспомогательных результата.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$, $s>\alpha$ и α делит st. Тогда граф $\bar\Gamma$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{\bar\alpha}(\bar s,\bar t)$, где $\bar\alpha=t(s-\alpha)/\alpha$, $\bar s=st/\alpha$ и $\bar t=s-\alpha$.*

Доказательство. Граф $\Delta=\bar\Gamma$ имеет неглавные собственные значения $t,-(s-\alpha+1)$. Поэтому Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta,s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1)=k(k-\lambda-1)/\mu=s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta=st/\alpha-t$.

Наконец, число вершин в $pG_\alpha(s,t)$ равно числу вершин в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha,s-\alpha)$. □

Лемма 1.2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_2=-1$, u — вершина графа Γ и $k_i=|\Gamma_i(u)|$. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *$b_2-1=a_3$, $k+1=c_3+b_2$, граф Γ_3 сильно регулярен и Γ — антиподальный граф тогда и только тогда, когда Γ_3 — объединение изолированных клик;*

(2) *собственные значения графа $\Delta=\bar\Gamma_3$ равны $(\theta^2+(c_2-a_1)\theta-k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ и $\theta_2(\Delta)=-(b_1+c_2)/c_2$, в частности, c_2 делит b_1;*

(3) *$\theta_1(\Delta)=a_3$ и Δ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$.*

Доказательство. По [5, предложение 3.3] имеем $\theta_2 = -1$ тогда и только тогда, когда граф Γ_3 сильно регулярен. Кроме того, верны равенства $b_2 - 1 = a_3$ и $k + 1 = c_3 + b_2$.

Положим $\Delta = \bar{\Gamma}_3$. По замечанию после предложения 4.2.18 [1] собственные значения графа Δ равны $(\theta^2 + (c_2 - a_1)\theta - k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ. При $\theta = -1$ получим $\theta_2(\Delta) = -(b_1 + c_2)/c_2$ и c_2 делит b_1.

Заметим, что $k(\Delta) = k + k_2 = k(1 + b_1/c_2)$ делится на $\theta_2(\Delta)$, поэтому Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(k, b_1/c_2)$.

Из доказательства предложения 3.2 [5] имеем $-\theta_1\theta_3 = k + a_3c_2$ и $\theta_1 + \theta_3 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 - k = a_1 + a_2 + b_2 - k = a_1 - c_2$. Поэтому $\theta_1(\Delta) = (\theta_3^2 + (c_2 - a_1)\theta_3 - k)/c_2 = (-\theta_1\theta_3 - k)/c_2 = a_3$ и $\alpha = k - a_3 = c_3$. □

Если $b_1 = c_2r$ и c_3 делит a_3r, то Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_{ra_3/c_3}(ra_3/c_3 + r, a_3)$.

Лемма 1.3. *Пусть Γ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_2 сильно регулярен. Тогда либо Γ — граф Тэйлора без треугольников, либо граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(r-1, c_2+1)$.*

Доказательство. Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет массив пересечений $\{k, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k\}$. Если граф Γ_2 сильно регулярен, то по [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1a_2$.

С учетом равенств $c_3 = k$, $a_3 = 0$ получим $k(a_2 - a_1) = b_1a_2$. Так как $a_1 = k - rc_2 + c_2 - 1$, $a_2 = k - c_2 - 1$, то $k(rc_2 - 2c_2) = (r-1)c_2(k - c_2 - 1)$ и $k(r-2) = (r-1)(k - c_2 - 1)$. Отсюда $k = (r-1)(c_2+1)$, $a_2 = (r-2)(c_2+1)$ и $a_1 = r - 2$. В случае $r = 2$ получим граф Тэйлора без треугольников (полный двудольный граф $K_{k+1,k+1}$ с удаленным максимальным паросочетанием).

Пусть $r > 2$. Тогда $k_2 = (r-1)^2(c_2+1)$, $k_3 = r-1$ и граф $\bar{\Gamma}_2$ имеет параметры $((k+1)r, (r-1)(c_2+2), \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, где $\bar{\lambda} = a_1 + p^3_{33} = a_1$, $\bar{\mu} = p^2_{11} + p^2_{33} + 2p^2_{13} = c_2 + 0 + 2$. Таким образом, $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $GQ(r-1, c_2+1)$. □

Из лемм 1.2–1.3 следует теорема 1.

Лемма 1.4. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3 + 1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3 + r - 1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$ *и* $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$;

(2) *если* $a_3 = \alpha(c_2+1)$, *то* $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(r+\alpha, \alpha(c_2+1))$ *и* $k_3 = (r+\alpha)(\alpha(c_2+1)+1)$;

(3) *если* $\alpha = 1$, *то* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(r+1, c_2+1)$, *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, *собственные значения* $\theta_1 = c_2 + r + 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2 - 1$ *и* $\bar{\Gamma}_2$ *— псевдогеометрический граф для* $pG_2(r+1, 2c_2+2)$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем $b_2 = a_3 + 1$ и $b_1 = rc_2$, $r \geq 2$. По [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3+a_2-a_1) = b_1a_2$. Отсюда $c_3(r-1) = r(c_3-c_2-1)$, поэтому $c_3 = r(c_2+1)$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$ и $a_1 = a_3 + r - 1$. Таким образом, Γ имеет массив пересечений $\{a_3 + c_3, rc_2, a_3 + 1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$.

Теперь $k_2 = kr$, $k_3 = (a_3+c_3)(a_3+1)/(c_2+1)$, и с учетом равенства $kp^1_{33} = k_3a_3$ имеем $p^1_{33}(c_2+1) = a_3(a_3+1)$. Утверждение (1) доказано.

Если c_2+1 делит a_3, $a_3 = \alpha(c_2+1)$, то $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha+r, \alpha(c_2+1))$ и $k_3 = (\alpha+r)(\alpha(c_2+1)+1)$.

В случае $\alpha = 1$ граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(r+1, c_2+1)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, по [2] собственные значения графа Γ равны $\theta_1 = c_2+r+1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2-1$ и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(r+1, 2c_2+2)$. □

Из лемм 1.2, 1.4 следует теорема 2.

2. Случай графов Γ_3 без треугольников

Пусть Δ является сильно регулярным графом без треугольников, изоморфным графу Γ_3 для дистанционно регулярного графа Γ. Тогда либо Δ — полный двудольный граф, либо Δ — граф Мура, либо $1 < \mu(\Delta) < k$. Положим $\mu(\Delta) = \mu'$, $k(\Delta) = k_3$.

Лемма 2.1. *Если Δ является полным двудольным графом или графом Мура, то Γ имеет массив пересечений* $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.

Доказательство. Если Δ — полный двудольный граф, то $\bar{\Delta}$ — объединение двух изолированных клик, противоречие.

Пусть Δ — граф Мура. Ясно, что пятиугольник не возникает.

Если Δ — граф Петерсена, то $\bar{\Delta}$ — граф с параметрами (10,6,3,4) и неглавными собственными значениями $1, -2$, поэтому $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(3,1)$. Для графа Γ имеем $c_3 = 2$, $k = 3$ и $b_1 = c_2$, поэтому Γ — граф Тэйлора, противоречие.

Если Δ — граф Хофмана-Синглтона, то $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_12(14,2)$ с параметрами (50,42,35,36) и неглавными собственными значениями $2, -3$. Для графа Γ имеем $c_3 = 12$, $k = 14$, $b_1 = 2c_2$ и $k_2 = 28$. Далее, $k_3 = 7$, $b_2 = 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.

Если Δ — граф с параметрами (3250,57,0,1), то $\bar{\Delta}$ имеет $\bar{\mu} = 3136$ и неглавные собственными значениями $7, -8$, поэтому $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_{392}(399,7)$. Для графа Γ имеем $c_3 = 392$, $k = 399$ и $b_1 = 7c_2$. Далее, $k_2 = 2793$, $b_2 = 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{399, 7c_2, 8; 1, c_2, 392\}$, противоречие с тем, что указанный массив пересечений не является допустимым. □

Лемма 2.2. *Если $1 < \mu(\Delta) < k(\Delta)$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *Δ имеет неглавные собственные значения r, $-(\mu'+r)$, $k_3 = (r+1)\mu'+r^2$, причем μ' делит $r^2(r-1)$ и $\mu+2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$;*

(2) *$\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k,r)$, $p^3_{33} = 0$, и $k = k_3(\mu'+r-1)/\mu'$;*

(3) *если Γ_2 является сильно регулярным графом, то $\mu' = a_3+1-r$, $k_3 = a_3(r+1)+1$, $k = (a_3(r+1)+1)a_3/(a_3+1-r)$, $c_2+1 = (a_3+1)a_3/(a_3+1-r)$, параметры графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $k(\bar{\Gamma}_2) = (a_3(r+1)+1)(1+a_3/(a_3+1-r))$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2a_3$, $\mu(\bar{\Gamma}_2) = c_2-r+3(a_3+1)$;*

(4) *$\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$, $-(a_3+c_2+2)$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф без треугольников с $1 < \mu(\Delta) < k$. Тогда Δ имеет неглавные собственные значения r, $-(\mu'+r)$ и $k_3 = (r+1)\mu'+r^2$, причем μ' делит $r^2(r^2-1)$, $\mu+2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Теперь $\bar{\Delta}$ имеет неглавные собственные значения $\mu'+r-1$ и $-(r+1)$ и $\mu(\bar{\Delta}) = v(\Delta) - 2k_3 = 1 - k_3 + k_3(k_3-1)/\mu'$ делится на $r+1$. Отсюда $\mu(\bar{\Delta})$ сравнимо с $r^2(r^2-1)/\mu'$ по модулю $r+1$ и μ' делит $r^2(r-1)$.

Пусть $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k,t)$. Тогда $p^3_{33} = 0$, $r = t$ и $k_3(k_3-1)/\mu' = k(r+1) = ((r+1)\mu'+r^2)((r+1)\mu'+r^2-1)/\mu'$, поэтому $k = k_3(\mu'+r-1)/\mu'$.

Если Γ_2 является сильно регулярным графом, то по лемме 1.4 имеем $\mu' = a_3(a_3+1)/(c_2+1)$ и $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$. Отсюда $k = a_3k_3/(a_3+1-r) = k_3(c_2+1)/(a_3+1)$, $\mu' = a_3+1-r$ и $k_3 = (r+1)(a_3+1-r)+r^2 = a_3(r+1)+1$. Далее, $k = (a_3(r+1)+1)a_3/(a_3+1-r)$ и $c_2+1 = (a_3+1)a_3/(a_3+1-r)$.

Параметры сильно регулярного графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $k(\bar{\Gamma}_2) = k + k_3 = (a_3(r+1)+1)(1+a_3/(a_3+1-r))$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = p^1_{11} + p^1_{33} = 2a_3$, $\mu(\bar{\Gamma}_2) = p^2_{11} + p^2_{33} + 2p^2_{13} = c_2 + 2b_2 + (k_3 - b_2 - p^2_{23})$, где $p^2_{23} = b_2(a_3+a_2-a_1)/c_2 = (r-1)(a_3+1)$. Отсюда $\mu(\bar{\Gamma}_2) = c_2 - r + 3(a_3+1)$.

Заметим, что $\lambda(\bar{\Gamma}_2) - \mu(\bar{\Gamma}_2) = (r-1) - (a_3+c_2+2)$, $k(\bar{\Gamma}_2) - \mu(\bar{\Gamma}_2) = (a_3r + a_3+1)(2a_3+1-r)/(a_3+1-r) - c_2 + r - 3(a_3+1)$. Так как $(r-1)(a_3+c_2+2) = a_3r + a_3 + 1 + a_3(a_3r+a_3+1)/(a_3+1-r) - c_2 + r - 3(a_3+1)$ и $r(c_2+1) = a_3(a_3r+a_3+1)/(a_3+1-r) - a_3 = k - a_3$, то $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$, $-(a_3+c_2+2)$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть Γ_2 является сильно регулярным графом. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *число μ' не равно* 2 *и не равно* 4*;*

(2) *если $\mu' = 6$, то Γ имеет массив пересечений* $\{69,56,10;1,14,60\}$, $\{143,126,12;1,21,132\}$, $\{415,390,16;1,39,400\}$, $\{1253,1216,22;1,76,1232\}$, $\{1924,1881,25;1,99,1900\}$, $\{3509,3456,30;1,144,3480\}$, $\{5269,5208,34;1,186,5236\}$, $\{13845,13760,46;1,344,13800\}$, $\{20383,20286,52;1,441,20332\}$, $\{28709,28600,58;1,550,28652\}$, $\{39039,38918,64;1,671,38976\}$, $\{42965,42840,66;1,714,42900\}$, $\{66575,66430,76;1,949,66500\}$, $\{94094,93931,85;1,1189,94010\}$.

Доказательство. По условию целочисленности для $pG_{c_3}(k,r)$ число $c_3(a_3+r+1)$ делит $k(k+1)r(r+1)$.

Пусть $\mu' = 2$. Тогда $k_3 = (r+1)^2+1$, $r+1$ не делится на 4, $a_3 = r+1$, и из равенства $a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu'$ получим $c_2+1 = (r+1)(r+2)/2$, $c_2 = r(r+3)/2$ и $k = ((r+1)^2+1)(r+1)/2$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{((r+1)^2+1)(r+1)/2, r^2(r+3)/2, r+2; 1, r(r+3)/2, r(r+1)(r+2)/2\}$

Далее, $k(\bar{\Gamma}_2) = ((r+1)^2+1)(r+3)/2$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2(r+1)$ и $\mu(\bar{\Gamma}_2) = r(r+1)/2 + 3(r+2) = (r+3)(r+4)/2$.

По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $r-1$ и $-(r+2)(r+3)/2$, причем кратность $r-1$ равна $(r+1)(r^2+2r+2)(r+3)(r^2+3r+4)/(2(r^2+7r+4))$. Заметим, что $(r^2+7r+4, r+1) = (r+1, 6r+4)$ делит 2, $(r^2+7r+4, r+3) = (r+3, 4r+4)$ делит 8, $(r^2+7r+4, r^2+2r+2) = (5r+2, r^2+2r+2) = 2(5r+2, 4r+5)$ делит 34, $(r^2+7r+4, r^2+3r+4) = (4r, r^2+3r+4) = 4(r, 3r+4)$ делит 16. Отсюда r^2+7r+4 делит $2^8 \cdot 17$ и $r = 3, 5, 20$. В любом случае нарушается условие целочисленности кратностей собственных значений графа Γ.

Пусть $\mu' = 4$. Тогда $k_3 = (r+2)^2$, $a_3 = r+3$, и из равенства $a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu'$ получим $c_2 + 1 = (r+3)(r+4)/4$, $c_2 = (r^2+7r+8)/4$ и $k = (r+2)^2(r+3)/4$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{(r+2)^2(r+3)/4, r(r^2+7r+8)/4, r+4; 1, (r^2+7r+8)/4, r(r+3)(r+4)/4\}$. Далее, $k(\bar\Gamma_2) = (r+2)^2(r+7)/4$, $\lambda(\bar\Gamma_2) = 2(r+3)$ и $\mu(\bar\Gamma_2) = (r+7)(r+8)/4$.

По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar\Gamma_2$ равны $r-1$ и $-(r+7)(r+4)/4$. Кратность $r-1$ равна $(r+2)^2(r+7)^2(r^2+5r+8)/(4(r^2+15r+24))$, причем $(r^2+15r+24, r+2) = (13r+24, r+2)$ делит 2, $(r^2+15r+24, r+7) = (8r+24, r+7)$ делит 32, $(r^2+15r+24, r^2+5r+8) = 2(5r+8, r^2+5r+8)$ делит 16. Далее, кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $r(r+2)^2(r^2+3r+4)/(r^2+15r+24)$, (r^2+5r+8, r) делит 8, $(r^2+15r+24, r^2+3r+4) = (12r+20, r^2+3r+4) = 4(3r+5, r+3)$ делит 16. Отсюда $r^2+15r+24$ делит 2^9. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu' = 6$. Тогда $k_3 = (r+3)^2-3$, $r-1$ не делится на 4, $a_3 = r+5$, 6 делит $(r+5)(r+6)$ и из равенства $a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu'$ получим $c_2+1 = (r+5)(r+6)/6$, $c_2 = (r+3)(r+8)/6$ и $k = (r+5)((r+3)^2-3)/6$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$.

Далее, $k(\bar\Gamma_2) = (r^2+6r+6)(r+11)/6$, $\lambda(\bar\Gamma_2) = 2(r+5)$ и $\mu(\bar\Gamma_2) = (r+11)(r+12)/6$. По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar\Gamma_2$ равны $r-1$ и $-(r+6)(r+11)/6$. Кратность $r-1$ равна $(r+5)(r^2+6r+6)(r+11)(r+4)/(6(r+20))$, причем $(r+20, r+5)$ делит 15, $(r+20, r+11)$ делит 9, $(r+20, r^2+6r+6) = 2(r+20, 7r-3)$ делит 286, $(r+20, r+4)$ делит 16. Отсюда $r+20$ делит $32 \cdot 27 \cdot 55 \cdot 13$. Далее, кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $r(r+2)(r^2+6r+6)/(r+20)$, причем $(r+20, r)$ делит 20, $(r+20, r+2)$ делит 18. Отсюда $r+20$ делит $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ и Γ имеет один из следующих массивов пересечений: $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$, $\{5269, 5208, 34; 1, 186, 5236\}$, $\{13845, 13760, 46; 1, 344, 13800\}$, $\{20383, 20286, 52; 1, 441, 20332\}$, $\{28709, 28600, 58; 1, 550, 28652\}$, $\{39039, 38918, 64; 1, 671, 38976\}$, $\{42965, 42840, 66; 1, 714, 42900\}$, $\{66575, 66430, 76; 1, 949, 66500\}$, $\{94094, 93931, 85; 1, 1189, 94010\}$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть Γ_2 является сильно регулярным графом. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\mu' = r$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$;*

(2) *если $6 \neq \mu' \leq 11$, то Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.*

Доказательство. По уловию целочисленности для $pG_{c_3}(k,r)$ число $c_3(a_3+r+1)$ делит $k(k+1)r(r+1)$.

Пусть $\mu' = r$. Тогда $a_3 = 2r-1$, $k_3 = 2r^2+r$, $k = (2r+1)(2r-1)$ и $c_2+1 = 4r-2$. По уловию целочисленности для $pG_{c_3}(k,r)$ число $3(4r-3)$ делит $4r^2(4r^2-1)(r+1)$. Так как $(4r-3, r)$ делит 3, $(4r-3, 2r-1) = 1$, $(4r-3, 2r+1)$ делит 5, $(4r-3, r+1)$ делит 7, то $4r-3$ делит 105. Если $4r-3 = 7$, то $r = 5/2$, если $4r-3 = 35$, то $r = 19/2$, а если $4r-3 = 15$, то $r = 9/2$, противоречие.

Далее, $k(\bar\Gamma_2) = (2r+1)(3r-1)$ и $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(6r-2)$, причем кратность $r-1$ равна $(2r-1)(2r+1)(3r-1)(2r+3)/(7r-3)$. Так как $(7r-3, 2r-1) = 1$, $(7r-3, 2r+1)$ делит 13, $(7r-3, 3r-1)$ делит 2, $(7r-3, 2r+3)$ делит 27, то $7r-3$ делит $26 \cdot 27$.

Если $4r-3=5$, то $7r-3=11$ не делит $26\cdot 27$, а если $4r-3=105$, то $7r-3=186$ не делит $26\cdot 27$, противоречие. Если $4r-3=21$, то $r=6$, Γ имеет массив пересечений $\{143,126,12;1,21,132\}$, Γ_3 имеет параметры (1080,78,0,6) и $\bar{\Gamma}_2$ имеет параметры (1080,221,22,51) и неглавные собственные значения $5,-34$.

Пусть $\mu'=3$. Тогда $k_3=r^2+3r+3$, причем 3 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+3$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+3$ делит 9 и $r=3$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=5$. Тогда $k_3=r^2+5r+5$, причем 5 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+5$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+5$ делит 15 и $r=5$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=7$. Тогда $k_3=r^2+7r+7$, причем 7 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+7$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+7$ делит $3\cdot 5\cdot 7$ и $r=7,14,49$. В случае $r=7$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $a_3=r+6$, $k=(r+6)(r^2+7r+7)/7$, $c_2+1=(r+6)(r+7)/7$ и $c_2=(r^2+13r+35)/7$. Имеем $k(\bar{\Gamma}_2)=(r^2+7r+7)(r+13)/7$, $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+7)(r+13)/7$, причем кратность $r-1$ равна $(r+6)(r^2+7r+7)(r+13)(r^2+8r+14)/(7(r^2+27r+84))$. При $r=14$ кратность равна $20\cdot 27\cdot 301\cdot 322/(14\cdot 7\cdot 47)$, а при $r=49$ число $49\cdot 61$не делит $(r+6)(r^2+7r+7)(r+13)(r^2+8r+14)$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $\mu'=8$. Тогда $k_3=r^2+8r+8$, причем 8 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+8$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $r+4$ делит 24. Далее, $a_3=r+7$, $k=(r+7)(r^2+8r+8)/8$, $c_2+1=(r+7)(r+8)/8$, $c_2=(r^2+15r+48)/8$ и $r=8$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=9$. Тогда $k_3=r^2+9r+9$, причем 9 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+9$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+9$ делит $27\cdot 5\cdot 7$. В случае $r=9$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $k=(r^2+9r+9)(r+8)/9$, $a_3=r+8$, $c_3=r(c_2+1)=r(r+8)(r+9)/9$, $c_2+1=(r+8)(r+9)/9$ и $c_2=(r^2+17r+63)/9$. Если r не делится на 3, то $2r+9=35$, $r=13$ и $c_2+1=21\cdot 22/9$, противоречие. Если же r делится на 3, то $r+9$ делится на 9 и r делится на 9. Далее, $k(\bar{\Gamma}_2)=(r^2+9r+9)(r+17)/9$, $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+9)(r+17)/9$, причем кратность $r-1$ равна $(r+8)(r^2+9r+9)((r^2+9r+9)(r+17)/9+(r+9)(r+17)/9)/(r^2+35r+144)$. Заметим, что $(r+8,r^2+35r+144)=(r+8,3r+16)$ делит 8, $(r^2+35r+144,r^2+9r+9)=(r^2+9r+9,26r+135)$, $(r+17,r^2+35r+144)=(r+17,2r+16)$ делит 2, $(r^2+35r+144,r^2+10r+18)=(25r+126,r^2+10r+18)$.

Если $2r+9=45$, то $r=18$, $r^2+35r+144=9\cdot 122$, $r^2+9r+9=9\cdot 55$ и $r^2+10r+18=9\cdot 58$, противоречие.

Если $2r+9=63$, то $r=27$, $r^2+35r+144=9\cdot 202$, $r^2+9r+9=9\cdot 109$ и $r^2+10r+18=9\cdot 113$, противоречие.

Если $2r+9=315$, то $r=153=9\cdot 17$, $r^2+35r+144=9\cdot 4\cdot 11\cdot 73$, $r^2+9r+9=9(4\cdot 727)$ и $r^2+10r+18=9(2753)$, противоречие.

Если $2r+9=135$, то $r=63$, $r^2+35r+144=243\cdot 26$, $r^2+9r+9=9\cdot 505$ и $r^2+10r+18=9\cdot 513$, противоречие.

Если $2r+9=189$, то $r=90$, $r^2+35r+144=54\cdot 211$, $r^2+9r+9=9\cdot 991$ и $r^2+10r+18=9\cdot 1002$, противоречие.

Если $2r+9=945$, то $r=468=9\cdot 52$, $r^2+35r+144=9\cdot 26172=81\cdot 4\cdot 727$, $r^2+9r+9=9(50+350+29+1)=9(5\cdot 4561)$ и $r^2+10r+18=9(4\cdot 837)$, противоречие.

Пусть $\mu' = 10$. Тогда $k_3 = r^2 + 10r + 10$, причем 10 делит $r^2(r^2 - 1)$, $2r + 10$ делит $r(r + 1)(r + 2)(r + 3)$. Поэтому $r + 5$ делит $5 \cdot 24$. В случае $r = 10$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $k = (r^2 + 10r + 10)(r + 9)/10$, $a_3 = r + 9$, $c_3 = r(c_2 + 1) = r(r + 9)(r + 10)/10$, $c_2 + 1 = (r + 9)(r + 10)/10$ и $c_2 = (r^2 + 19r + 80)/10$. Если r не делится на 5, то $r + 5$ делит 24, $r = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{21, 10, 11; 1, 10, 11\}$, противоречие. Значит, r делится на 5. Имеем $k(\bar\Gamma_2) = (r^2 + 10r + 10)(r + 19)/10$, $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r - 1$ и $-(r + 19)(r + 10)/10$, причем кратность $r - 1$ равна $(r^2 + 10r + 10)((r^2 + 10r + 10)(r + 19)/10 + (r + 19)(r + 10)/10)/(r + 21)$. Заметим, что $(r+21, r^2+10r+10) = (r+21, 11r-10)$ делит 241, $(r+21, r+19)$ делит 2 и $(r + 21, r^2 + 11r + 20) = (r + 21, 10r - 20)$.

Если $r + 5 = 10$, то $r = 5$ и $r + 21 = 26$ не делит $241 \cdot 60$. Если $r + 5 = 20$, то $r = 15$ и $r + 21 = 36$ не делит $241 \cdot 260$. Если $r + 5 = 40$, то $r = 35$ и $r + 21 = 56$ не делит $241 \cdot 66$. Если $r + 5 = 60$, то $r = 55$ и $r + 21 = 76$ не делит $241 \cdot 106$. Если $r + 5 = 120$, то $r = 115$ и $r + 21 = 136 = 8 \cdot 17$ не делит $241 \cdot 268$.

Если $r + 5 = 30$, то $r = 25$ и $r + 21 = 46$ делит $241 \cdot 46$. Итак Γ имеет массив пересечений $\{3009, 2950, 35; 1, 118, 2975\}$, противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения графа не является целым числом.

Пусть $\mu' = 11$. Тогда $k_3 = r^2 + 11r + 11$, причем 11 делит $r^2(r^2 - 1)$, $2r + 11$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r + 11$ делит $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$. В случае $r = 11$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $a_3 = r+10$, $k = (r+10)(r^2 + 11r+11)/11$, $c_2+1 = (r+10)(r+11)/11$, $k(\bar\Gamma_2) = (r^2+11r+11)(r+11)/11$ и $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r - 1$, $-(r + 11)(r + 21)/11$. Если r не делится на 11, то $2r+11$ делит $5\cdot7\cdot9\cdot11$ и $r-1$ делится на 11. Отсюда $r = 12$.

Имеем $k(\bar\Gamma_2) = (r^2 + 11r + 11)(r + 21)/11$, $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+11)(r+21)/11$, причем кратность $r-1$ равна $(r+10)(r^2 + 11r+11)((r^2+11r+11)(r+21)/11+(r+11)(r+21)/11)/(r^2+43r+220)$. Заметим, что $(r^2 + 43r + 220, r + 10) = (r + 10, 33r + 220)$ делит 110, $(r^2 + 43r + 220, r^2 + 11r+11) = (32r+209, r^2+11r+11)$, $(r^2+43r+220, r+21) = (r+21, 22r+220)$ делит $22 \cdot 11$ и $(r^2 + 43r + 220, r^2 + 12r + 22) = (31r + 198, r^2 + 12r + 22)$.

При $r = 12$ имеем $r^2+43r+220 = 880$ и 8 не делит $22\cdot110$. Значит, r делится на 11.

Если $2r + 11 = 55$, то $r = 22$, $r^2 + 43r + 220 = 22 \cdot 75$ и 25 не делит $(31r + 198)(32r+209)$. Если $2r+11 = 77$, то $r = 33$, $r^2+43r+220 = 11\cdot162$ и 81 не делит $(31r+198)(32r+209)$. Если $2r+11 = 99$, то $r = 44$, $r^2+43r+220 = 44\cdot92$ и 23 не делит $(31r+198)(32r+209)$. Если $2r+11 = 165$, то $r = 77$, $r^2+43r+220 = 11\cdot8\cdot83$ и 8 не делит $4(31r + 198)(32r + 209)$.

Если $2r + 11 = 231$, то $r = 110$, $r^2 + 43r + 220 = 110 \cdot 5 \cdot 31$ и 31 не делит $(31r+198)(32r+209)$. Если $2r+11 = 1155$, то $r = 572$, $r^2+43r+220 = 22\cdot1700$ и 17 не делит $(31r+198)(32r+209)$. Если $2r+11 = 495$, то $r = 242$, $r^2+43r+220 = 220 \cdot 343$ и 49 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 693$, то $r = 341$, $r^2 + 43r + 220 = 44 \cdot 11 \cdot 271$ и 271 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$.

Если $2r + 11 = 3465$, то $r = 1727 = 11 \cdot 157$, $r^2 + 43r + 220 = 110 \cdot 27791$ и 277911 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. $\square$

Из лемм 2.3–2.4 следует теорема 3.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[2] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr, **65**:1–2 (2012), 29–47. MR2943642

[3] J. Degraer, *Isomorph-free exhaustive generation algorithms for assocition chemes*, PHD, Gent, Univ. Gent, 2007.

[4] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. MR2718281

[5] J.H. Koolen, J. Park , H. Yu, *An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph*, Linear Algebra and its Applications, **434**:12 (2011), 2404–2412. MR2781987

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: nirova_m@mail.ru