S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1813–1817 (2018) УДК 519.21
DOI 10.3048/semi.2018.15.145 MSC 60F10

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

А.С. ТАРАСЕНКО

Abstract. We study asymptotic behavior of the distribution of the sojourn time of a random walk over growing level. We assume here regular variation of the right tail distribution of summands and existence of the second moment. Some two-sided asymptotic bounds for the sojourn time distribution are established.

Keywords: random walk, sojourn time, asymptotic analysis.

1. Основные результаты

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Введем время пребывания случайного блуждания $\{S_i\}_{i=1}^\infty$ выше некоторой границы $b \geqslant 0$ до момента времени n:

$$T_n(b) = \sum_{i=1}^n I_{\{S_i \geqslant b\}},$$

где через I_A обозначен индикатор события A. Основной целью работы является изучение главного члена асимптотики вероятностей $\mathbb{P}(T_n(b) = j)$ при $b = b_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и условии правильного изменения функции $\mathbb{P}(\xi \geqslant t)$.

Изучение распределения $T_n(b)$ является весьма трудной задачей, и ей посвящено значительное число работ. Для простейших блужданий ряд результатов о времени пребывания может быть получен с помощью комбинаторных методов.

Tarasenko, A.S., On asymptotics of distribution of the sojourn time on a half-axis of a random walk with heavy tails.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00049).

Поступила 30 ноября 2018 г., опубликована 28 декабря 2018 г.

Хорошо известен классический закон арксинуса, характеризующий предельное поведение распределения времени пребывания случайного блуждания на положительной полуоси (см., например, [6]). Известны также предельные теоремы о времени пребывания, основанные на использовании сходимости распределений функционалов от траекторий случайного блуждания к распределению соответствующих функционалов от предельных процессов. Весьма подробная библиография и результаты этого направления исследований содержатся в [3], [7]. В последние годы появились также работы, в которых время пребывания случайного блуждания на отрезке и на полуоси изучается с помощью факторизационных методов (см. [4], [5]), а также общих методов теории вероятностей (см. [1]).

Обозначим для $t > 0$

$$F_+(t) = \mathbb{P}(\xi > t).$$

Везде в работе предполагается, что $F_+(t)$ является правильно меняющейся функцией (п.м.ф.), то есть для любого фиксированного v выполняется

$$\frac{F_+(vt)}{F_+(t)} \underset{t\to\infty}{\to} v^{-\beta}$$

для некоторого $\beta > 0$.

Мы будем писать $c_n \sim d_n$, если $d_n > 0$, $\dfrac{c_n}{d_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Предложение 1. *Пусть $F_+(t)$ — п.м.ф., $\mathbb{E}\xi = 0$ и $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда для любого фиксированного $j \geqslant 0$ выполняется*

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = n - j) \sim F_+(b_n),$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$b_n \to \infty, \ \text{при } n \to \infty.$$

Для любого конечного подмножества натуральных чисел A будем через $|A|$ обозначать его мощность.

Теорема 1. *Пусть $F_+(t)$ — п.м.ф., $\mathbb{E}\xi = 0$ и $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность множеств $E_n^\varepsilon \subset \{1, \ldots, n\}$ такая, что $|E_n^\varepsilon|/n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и*

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \geqslant F_+(b_n) + o(F_+(b_n)), \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \leqslant (1+\varepsilon)F_+(b_n), \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus E_n^\varepsilon,$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$b_n/\sqrt{n \ln n} \to \infty, \ \text{при } n \to \infty.$$

2. Доказательства

Доказательство предложения 1. Известно, что для любого фиксированного k выполнено (см. теорему 4.1 в [2]) $\mathbb{P}(S_k \geqslant b_n) = kF_+(b_n) + o(F_+(b_n))$. Поэтому, используя теорему 4 из недавней работы [8] имеем

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = n-j) = \mathbb{E}I_{\{T_n(b_n)=n-j\}} = \sum_{i=1}^{n} (I_{\{n-j=n-i+1\}} - I_{\{n-j=n-i\}})\mathbb{P}(S_i \geqslant b_n) +$$

$$o\left(\sum_{i=1}^{n} |I_{\{n-j=n-i+1\}} - I_{\{n-j=n-i\}}|\mathbb{P}(S_i \geqslant b_n)\right) =$$

$\mathbb{P}(S_{j+1} \geqslant b_n) - \mathbb{P}(S_j \geqslant b_n) + o(\mathbb{P}(S_{j+1} \geqslant b_n) + \mathbb{P}(S_j \geqslant b_n)) = F_+(b_n) + o(F_+(b_n))$, что и требовалось доказать. □

Для доказательства второй теоремы нам понадобится доказать вспомогательную лемму. Обозначим $\bar{S}_k = \max\limits_{1 \leqslant m \leqslant k} S_m$, $\eta(t) = \min\{k : S_k \geqslant t\}$. Также будем говорить, что $c_n \gg d_n$, если $\dfrac{c_n}{d_n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть b_n — последовательность положительных чисел такая, что $b_n/\sqrt{n \ln n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для $j \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n \geqslant b_n, \eta(b_n) = j) \sim \mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n) \sim F_+(b_n).$$

Доказательство леммы 1. Известно (см. теорему 9.1 в [2]), что

$$\mathbb{P}(\eta(x_n) = i, \bar{S}_n \geqslant x_n) \sim \mathbb{P}(\eta(x_n) = i, S_i \geqslant x_n) \sim F_+(x_n) \tag{1}$$

для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_n \gg \sqrt{n \ln n} \geqslant \sqrt{i \ln i}$. Таким образом мы имеем

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n \geqslant b_n, \eta(b_n) = j) \sim F_+(b_n)$$

и нам достаточно доказать что

$$F_+(b_n) \sim \mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n).$$

Выберем такую последовательность чисел $\Delta_n > 0$, что $\Delta_n/\sqrt{n} \to \infty$, $\Delta_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Введем следующие обозначения

$$A_j = A_j^{(n)} := \{S_j \geqslant b_n, \eta(b_n) = j\},\ B_j = B_j^{(n)} := \{S_j \geqslant b_n + \Delta_n, \eta(b_n + \Delta_n) = j\},$$

$$C_j = C_j^{(n)} := A_j^{(n)} \backslash B_j^{(n)}, \quad \widetilde{S}_{l_1,l_2} = \sup_{l_1 \leqslant l \leqslant l_2} |\xi_{l_1} + \ldots + \xi_l|, \quad \widetilde{S}_l = \widetilde{S}_{1,l},$$

$$D_j = D_j^{(n)} := \{S_{j+1} \geqslant b_n, \ldots, S_n \geqslant b_n\}, \quad D'_j = D'^{(n)}_j := \{\widetilde{S}_{j+1,n} \leqslant \Delta_n\},$$

где событие D'_j не зависит от B_j.

Нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(B_j) + \mathbb{P}(C_j), \tag{2}$$

$$\mathbb{P}(D'_j) = \mathbb{P}\{\widetilde{S}_{n-j} \leqslant \Delta_n\} \geqslant \mathbb{P}\{\widetilde{S}_n \leqslant \Delta_n\}, \quad B_j D'_j \subset B_j D_j. \tag{3}$$

Покажем сначала, что

$$\mathbb{P}(A_j D_j) = \mathbb{P}(B_j D_j) + \mathbb{P}(C_j D_j) \sim \mathbb{P}(A_j). \tag{4}$$

Из (1) имеем

$$\mathbb{P}(A_j) \sim F_+(b_n),$$

$$\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(S_j \geqslant b_n + \Delta_n, \eta(b_n + \Delta_n) = j) \sim F_+(b_n + \Delta_n) \sim F_+(b_n),$$

откуда $\mathbb{P}(A_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$.

Поэтому из (2) следует

$$\mathbb{P}(C_j D_j) \leqslant \mathbb{P}(C_j) = o(\mathbb{P}(A_j)).$$

Покажем теперь эквивалентность $\mathbb{P}(B_j D_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$. Из (3) и независимости D'_j и B_j получаем

$$\mathbb{P}(B_j D_j) \geqslant \mathbb{P}(B_j D'_j) = \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(D'_j).$$

Заметим, что из неравенства Колмогорова следует

$$\mathbb{P}\{\widetilde{S}_n > \Delta_n\} = \mathbb{P}\{\max_{1\leqslant l\leqslant n} |S_l| > \Delta_n\} \leqslant \frac{n\mathbb{D}\xi}{\Delta_n^2} = \left(\frac{\sqrt{n\mathbb{D}\xi}}{\Delta_n}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

откуда имеем

$$\mathbb{P}(D'_j) \geqslant \mathbb{P}\{\widetilde{S}_n \leqslant \Delta_n\} = 1 - \mathbb{P}\{\widetilde{S}_n > \Delta_n\} \to 1,$$

а значит

$$\mathbb{P}(B_jD_j) \geqslant \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(D'_j) \sim \mathbb{P}(B_j).$$

Очевидно, что

$$\mathbb{P}(B_jD_j) \leqslant \mathbb{P}(B_j),$$

поэтому $\mathbb{P}(B_jD_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$. Это доказывает (4), а именно

$$\mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \eta(b_n) = j) \sim \mathbb{P}(S_j \geqslant b_n, \eta(b_n) = j) \sim F_+(b_n).$$

Для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что

$$F_+(b_n) \sim \mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \eta(b_n) = j) =$$

$$\mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n, \eta(b_n) = j) = \mathbb{P}(\forall k \geqslant j\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n).$$

□

Доказательство теоремы 1. Доказательство основывается на том, что типичная траектория случайного блуждания S_n, пересекающая достаточно высокий уровень b, делает это лишь один раз. Таким образом, время, проведенное случайным блужданием выше b, будет определяться первым временем выхода за эту границу.

Построим сначала нижнюю оценку для $\mathbb{P}(T_n(b_n) = j)$. Имеем

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) = \mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \bar{S}_n \geqslant b_n) \geqslant$$

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \bar{S}_n \geqslant b_n, \eta(b_n) = n - j + 1) \geqslant$$

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \forall k \geqslant n - j + 1\ S_k \geqslant b_n, \eta(b_n) = n - j + 1) =$$

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \forall k \geqslant n - j + 1\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{n-j} < b_n) =$$

$$\mathbb{P}(\forall k \geqslant n - j + 1\ S_k \geqslant b_n, \bar{S}_{n-j} < b_n),$$

откуда по лемме 1 имеем

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \geqslant F_+(b_n) + o(F_+(b_n)). \tag{5}$$

Так как (см. [8], теорема 4) $\mathbb{P}(\bar{S}_n \geqslant b_n) \sim nF_+(b_n)$, то

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) > 0) = \mathbb{P}(\bar{S}_n \geqslant b_n) = nF_+(b_n) + o(nF_+(b_n)). \tag{6}$$

Положим

$$E_n^\varepsilon = \{k : \mathbb{P}(T_n(b_n) = k) > (1 + \varepsilon)F_+(b_n)\}$$

и предположим существование такого $\varepsilon > 0$, что $|E_n^\varepsilon|/n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Тогда найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_l\}_{l=1}^\infty$, что $|E_{m_l}^\varepsilon| \geqslant \delta m_l$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$. Используя (5), получаем

$$\mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) > 0) = \sum_{i=1}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) =$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\in E^{\varepsilon}_{m_l}}}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) + \sum_{\substack{i=1\\ i\notin E^{\varepsilon}_{m_l}}}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) \geqslant$$

$$m_l F_+(b_{m_l}) + \delta\varepsilon m_l F_+(b_{m_l}) + o(m_l F_+(b_{m_l})),$$

что противоречит (6). Значит $|E^{\varepsilon}_n|/n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для любого ε, что и требовалось доказать. □

References

[1] I. S. Borisov, E. I. Schaefer *Asymptotic of mean sojourn time of trajectory of random walk above growing nonlinear boundary,* Sib. Zhurnal Chist. i Priklad. Matem, **17**:4 (2017), 18–27.

[2] A. A. Borovkov, K. A. Borovkov, *Asymptotical analysis of random walks. Vol. 1. Slowly varying distributions of jumps,* M.: Fizmatlit, 2008, 652 p. Zbl 1231.60001

[3] A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks,* Trudy Mat. Inst. Steklov **195**, 3 (1994) [Proc. Steklov Inst. Math. 195, 1 (1995)]. MR1368394

[4] V. I. Lotov, *Asymptotic expansions for the distribution of the sojourn time of a random walk on a halfxis,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **282** (2013), 146–156. MR3308589

[5] V. I. Lotov, A. S. Tarasenko, *On the asymptotics of the mean sojourn time of a random walk on a semi-axis,* Izvestiya: Mathematics, **79**:3 (2015), 449–466. MR3397411

[6] Spitzer F., *Principles of Random Walks,* 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1976. Zbl 0359.60003

[7] A. V. Skorokhod, N. P. Slobodenyuk, *Limit Theorems for Random Walks,* (Naukova Dumka, Kiev, 1970) [in Russian].

[8] A. S. Tarasenko, *Inequalities for the sojourn time of random walk above a certain boundary,* Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 434–451.

Anton Sergeevich Tarasenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sunakdb@gmail.com