

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1818–1822 (2018)

УДК 512.545

DOI 10.33048/semi.2018.15.146

MSC 06F15, 20F60

ОБ ϕ -АППРОКСИМИРУЕМЫХ НАКРЫТИЯХ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ m -ГРУПП

Н.В. БАЯНОВА, А.В. ЗЕНКОВ

ABSTRACT. In this article we present a full description of all solvable and representable covers of the variety $\mathcal{A}$ of all abelian m -groups in the lattice of m -varieties.

Keywords: m -group, variety, cover.

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, \quad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Согласно [1], m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge, * \rangle$ такая, что $\langle G, \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ -группой, а одноместная операция $*$ задает автоморфизм группы $\langle G, \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ порядка 2 и антиавтоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. $*$ взаимнооднозначно отображает G на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем $*$ называем реверсивным автоморфизмом ℓ -группы G второго порядка и m -группу G с фиксированным реверсивным автоморфизмом $*$ записываем как пару $(G, *)$.

Класс $\mathcal{M}$ всех m -групп образует многообразие сигнатуры m . Множество всех многообразий m -групп $\mathcal{M}$ является частично упорядоченным множеством

BAYANOVA, N.V., ZENKOV, A.V., ON REPRESENTABLE COVERS IN THE LATTICE OF VARIETIES OF m -GROUPS.

© 2018 БАЯНОВА Н.В., ЗЕНКОВ А.В.

Поступила 25 мая 2018 г., опубликована 30 декабря 2018 г.

относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m -групп.

Будем говорить, что многообразие m -групп $\mathcal{X}$ является покрытием многообразия m -групп $\mathcal{Y}$ ($\mathcal{X}$ покрывает $\mathcal{Y}$), если $\mathcal{Y} \not\subseteq \mathcal{X}$ и для любого многообразия m -групп $\mathcal{Z}$ такого, что $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ выполнено $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$, либо $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$.

Всякое многообразие m -групп, состоящее из тех m -групп в которых выполнено тождество $(y^{-1}x^{-1}y \wedge x) \vee e = e$ будем называть σ -аппроксимируемым.

В работе получено полное описание разрешимых σ -аппроксимируемых накрытий многообразия $\mathcal{A}$ всех абелевых m -групп в решетке M (теорема 1).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [2] и [3] соответственно.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Напомним, что m -идеалом m -группы $(G, *)$ называется ее всякая выпуклая нормальная m -подгруппа. Пусть H есть m -идеал m -группы $(G, *)$. Тогда фактор-группа G/H будет m -группой $(G/H, *)$, где $(gH)_* = g_*H$.

Для произвольной ℓ -группы G через G^* обозначим ℓ -группу, полученную из G путем обращения порядка. Тогда относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является ℓ -группой. Определим отображение $Exch : G \times G^* \rightarrow G \times G^*$ по правилу $(x, y)Exch = (y, x)$. Пара $(G \times G^*, Exch)$ является m -группой. Отметим, что всякий m -идеал группы $(G \times G^*, Exch)$ имеет вид $H \times H^*$, где H является ℓ -идеалом ℓ -группы G . Верна

Лемма 1. Пусть $H \times H^*$ есть m -идеал $(G \times G^*, Exch)$. Тогда m -группа $(G \times G^*/H \times H^*, Exch)$ m -изоморфна $(G/H \times (G/H)^*, Exch)$.

Доказательство. Во-первых (см.[4]), отметим, что $(G/H)^* \cong G^*/H^*$. Определим отображение $\Theta : G \times G^*/H \times H^* \rightarrow G/H \times (G/H)^*$ по правилу $((g, g')H \times H^*)\Theta = gH \times g'H^*$. Непосредственная проверка показывает, что Θ есть исконый m -изоморфизм. $\square$

Пусть $\{(G_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ – множество m -групп и $G = \prod_{i \in I} G_i$ – их декартово (прямое) произведение. Как показано в [5], верно $G^* = (\prod_{i \in I} G_i)^* \cong \prod_{i \in I} G_i^*$. На G стандартным образом определяется реверсивный автоморфизм 2-го порядка φ так, что пара (G, φ) есть m -группа. Справедлива

Лемма 2. Пусть $(G_i, \varphi_i) = (H_i \times H_i^*, Exch)$ для каждого $i \in I$. Тогда $(G, \varphi) \cong (\prod_{i \in I} H_i \times \prod_{i \in I} H_i^*, Exch)$.

Доказательство. Аналогично доказательству Предложения 2.2. из [6]. $\square$

Лемма 3. Пусть Θ есть m -гомоморфизм m -группы $(G \times G^*, Exch)$ на неабелеву m -группу $(F, *)$. Тогда найдутся такие $(w_1; e), (w_2; e) \in G \times G^*$, что $([w_1, w_2]; e)\Theta \neq e$.

Доказательство. Так как $(F, *)$ неабелева, то найдутся элементы $h_1 = (w_1; w_2)$, $h_2 = (w_3; w_4) \in G \times G^*$, что $([h_1, h_2])\Theta \neq e$. Пусть $h_1(l) = (w_1; e)$, $h_1(r) = (e; w_2)$, $h_2(l) = (w_3; e)$, $h_2(r) = (e; w_4)$. Очевидно, что $[h_1, h_2] = [h_1(l), h_2(l)][h_1(r), h_2(r)]$ и поэтому $([h_1(l), h_2(l)])\Theta \neq e$ или $([h_1(r), h_2(r)])\Theta \neq e$. Если верно первое

предположение, то пара элементов $h_1(l), h_2(l)$ будет искомой. Если имеет место $([h_1(r), h_2(r)])\Theta \neq e$, то $([h_1(r), h_2(r)])Exch)\Theta \neq e$ и поэтому пара элементов $h_1(r)Exch = (w_2; e)$, $h_2(r)Exch = (w_4; e)$ искомая. $\square$

Для положительных элементов x, y решеточно упорядоченной группы G выражение $x \gg y$ означает $x > y^n$ для любого натурального n , а $x \sim y$ означает $x > y^n$ и $y > x^m$ для подходящих натуральных n, m . Далее, $W = (a) \wr (b)$ – прямое сплетение бесконечных циклических групп (a) и (b) . Элемент $g \in W$ будем записывать в виде $g = b^s \cdot (a^{k_1})_1 \cdot \dots \cdot (a^{k_n})_n$, где $a^{k_i} \in (a)$, и $k_i \neq 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$, $s \in \mathbb{Z}$. Как обычно, сопряжение элемента $a = (a^{k_1})_1 \cdot \dots \cdot (a^{k_n})_n$ базы сплетения $A = \prod_{i \in \mathbb{Z}} (a)_i$ элементом b^s есть сдвиг индексов элементов базы

на s . Более точно $a^{b^s} = (a^{k_1})_{1-s} \cdot \dots \cdot (a^{k_n})_{n-s}$. Группа W допускает следующие два упорядочения: 1) $g > e \Leftrightarrow s > 0$ или $s = 0$ и $k_1 > 0$ (упорядочение по типу А), 2) $g > e \Leftrightarrow s > 0$ или $s = 0$ и $k_n > 0$ (упорядочение по типу В). Группы с этими упорядочениями обозначим через W^+ и W^- соответственно. В группе W^+ выполнено условие $b \gg a^b \gg a$, где $a > e$ – произвольный элемент базы сплетения A . В работе [4] доказано, что группы $(W^+)^*$ и W^- изоморфны как решеточно упорядоченные группы. Поэтому m -изоморфны $(W^+ \times (W^+)^*, Exch)$ и $(W^- \times (W^-)^*, Exch)$. Следовательно, эти группы порождают одно и тоже o -аппроксимируемое многообразие m -групп $\mathcal{W}$. Покажем, что $\mathcal{W}$ является покрытием $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{X}$ – такое многообразие m -групп, что $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}$. Тогда оно содержит неабелеву m -группу $(G, *)$. По теореме Биркгофа $(G, *)$ есть m -гомоморфный образ подгруппы H декартова произведения $D = \prod_{i \in I} G_i$, где $G_i = (W^+ \times (W^+)^*, Exch)$ для всех $i \in I$. Пусть

$\Theta : H \rightarrow G$ – указанный выше m -гомоморфизм. Так как группа G неабелева, то найдутся $h_1, h_2 \in H$, что $([h_1, h_2])\Theta \neq e$. В силу леммы 2 и леммы 3 можно считать $[h_1, h_2] = (\tilde{a}; e)$, где $\tilde{a} = (\dots, \tilde{a}_i, \dots)$, $\tilde{a}_i = [\alpha_i, \gamma_i]$ для соответствующих $\alpha_i, \gamma_i \in W^+$. Очевидно, что $\tilde{a}_i$ принадлежат базе сплетения i -ой компоненты для каждого $i \in I$. Далее $u = |[h_1, h_2]| = (|\tilde{a}|; e)$, $v = |h_1| \vee |h_2| = (w_5; e)$, где $w_5 = (\dots, \lambda_i, \dots)$, $\lambda_i = b^{s_i} a_i \in W^+$, $s_i \geq 0$. Так как $u \neq e$, то найдется $i' \in I$, что $s_{i'} > 0$. Следовательно, $v \gg u^{v'} \gg u$. Через $\overline{H} = gr_m(v, u)$ обозначим m -подгруппу группы H , порожденную этими элементами. Ясно, что $\overline{H}$ будет m -изоморфна $(W^+ \times (W^+)^*, Exch)$. Из построения $\overline{H}$ следует, что она имеет нетривиальный гомоморфизм на $(G, *)$. Следовательно, $\overline{H} \in \mathcal{X}$, что влечет $\mathcal{X} = \mathcal{W}$.

Пусть $N_2 = gr(a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = e)$ – двуступенно нильпотентная группа. Всякий элемент $g \in N_2$ представим в виде $g = a^m b^n c^k \geq e$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Определим на N_2 линейный порядок $\geq$, полагая, что $g = a^m b^n c^k \geq e$, если $m > 0$ либо $m = 0$ и $n > 0$, либо $m = n = 0$ и $k \geq 0$. Очевидно $a \gg b \gg c > e$ и $x, y \gg [x, y]$ для любых $x, y \in N_2$. Через $\mathcal{N}$ обозначим (o -аппроксимируемое) многообразие m -групп, порожденное $(N_2 \times N_2^*, Exch)$. Покажем, что $\mathcal{N}$ является покрытием $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{X}$ – такое многообразие m -групп, что $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{N}$. Тогда $\mathcal{X}$ содержит неабелеву двухступенно нильпотентную m -группу $(G, *)$. Как и выше в силу теоремы Биркгофа $(G, *)$ есть m -гомоморфный образ подгруппы H декартова произведения $D = \prod_{i \in I} G_i$, где

$G_i = (N_2 \times N_2^*, Exch)$ для всех $i \in I$. Пусть $\Theta : H \rightarrow G$ – указанный выше m -гомоморфизм. Так как группа G неабелева и двухступенно нильпотентная, то найдутся $x, y \in H$, что $([x, y])\Theta \neq e$. Как и ранее можно считать, что $x = (w_1; e), y = (w_2; e)$, где $w_1 = (\dots x_i \dots), w_2 = (\dots y_i \dots)$ и $x_i, y_i \in N_2$ для всех $i \in I$ и $x > y \gg [x, y] > e$. Пусть F – m -группа, порожденная x, y . Сужение Θ на F в силу выбора элементов x и y нетривиально и поэтому $(F, *) \in \mathcal{X}$. Рассмотрим счетную декартову степень группы $(F, *)$ и в ней элементы $(e, y, y^2, \dots, y^n, \dots), (x, x, \dots, x, \dots)$. Пусть $\bar{y}, \bar{x}$ – образы этих элементов в фактор-группе по прямой степени. Из построения этих элементов следует $\bar{x} \gg \bar{y} \gg [\bar{x}, \bar{y}]$ и поэтому m -группа, порожденная $\bar{y}, \bar{x}$, будет m -изоморфна $(N_2 \times N_2^*, Exch)$, что влечет $\mathcal{X} = \mathcal{N}$.

Произвольная σ -аппроксимируемая m -группа $(G, *)$ как ℓ -группа вложима в декартово произведение $\prod_{i \in I} G_i$ линейно упорядоченных групп. В работе [1], в частности, показано, что всякая m -группа $(G, *)$ вложима в $(G \times G^*, Exch)$. Следовательно, с учетом леммы 2, всякая σ -аппроксимируемая m -группа вложима в декартово произведение групп вида $(G \times G^*, Exch)$, где G – некоторая линейно упорядоченная группа. Таким образом при изучении σ -аппроксимируемых многообразий m -групп достаточно рассматривать группы именно такого вида.

Покажем, что $\mathcal{A}$ не имеет иных σ -аппроксимируемых разрешимых накрытий. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное разрешимое σ -аппроксимируемое накрытие $\mathcal{A}$. Тогда, как было отмечено выше, оно содержит неабелеву m -группу $(G \times G^*, Exch)$, где G – некоторая линейно упорядоченная разрешимая группа. Хорошо известно (см., например, [3]), что G содержит собственную нормальную выпуклую подгруппу H . Следовательно, $H \times H^*$ есть m -идеал $(G \times G^*, Exch)$. Теперь переходя к подгруппам и (или) фактор-группам можно считать, что рассматриваемая группа G двухступенно разрешимая. Пусть, как обычно, G' – коммутант G . Если найдутся положительные $a \in G', b \in G$, что, например, $a^b \gg a$, то тогда, как показано в [7], верно $b \gg a^b \gg a$. Последнее означает, что m -группа, порожденная элементами $(a; e), (b; e)$, будет m -изоморфна $(W^+ \times (W^+)^*, Exch)$. Если найдется пара непостоянных элементов $x, y \in G$, что их коммутатор $[x, y]$ перестановочен с каждым из них, то тогда $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$. Если, наконец, найдутся положительные элементы $a \in G', b \in G$, что $a^b \sim a$ и $[a, b]^b \neq [a, b]$, то и в этом случае рассуждения, аналогичные проведенным в [7], показывают, что $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$. Тем самым верна

Теорема 1. Многообразия $\mathcal{N}, \mathcal{W}$ – единственные разрешимые σ -аппроксимируемые накрытия многообразия всех абелевых m -групп $\mathcal{A}$.

Замечание 1. В работе [8] О.В. Исаевой было построено счетное множество разрешимых не σ -аппроксимируемых накрытий $\mathcal{A}$. Вопрос полного описания накрытий $\mathcal{A}$ остается открытым.

REFERENCES

- [1] M.Giraudet, J.Rachunek, *Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains*, Czech.Math.J., **49(124)**:4 (1999), 743–766. MR1746701
- [2] A.G. Kurosh, *Group theory*, M.: Nauka, 1967. MR0249495
- [3] V.M. Kopytov, N.Ya.Medvedev, *The theory of lattice-ordered groups*, Math. Its Appl., **307**, Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994. MR1369091

- [4] M.E.Huss, N.R.Reily, *On reversing the order of lattice-ordered group*, J. Algebra, **91**:1 (1984), 176–191. MR0765778
- [5] N.Ya. Medvedev, *On automorphisms of the lattice of quasivarieties of lattice-ordered groups*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, **35** (1996), 131–135. MR1485050
- [6] N.V. Bayanova, A.V.Zenkov, *On infinitely distributivity in the lattice of varieties of m -groups*, Algebra i Logika, **54**:1 (2015), 3–15. MR3444482
- [7] N.Ya. Medvedev, *On lattice of varieties of lattice ordered groups and Lie algebras*, Algebra i Logika, **16**:1 (1977), 40–45. MR0498317
- [8] O.V. Isaeva, *Covers in the lattice of varieties of m -groups*, Algebra i teoriya modelei-4, (2003), 35–43, Novosibirsk: NGTU.

NADEZDA VLADIMIROVNA BAYANOVA
ALTAI STATE UNIVERSITY,
PR. LENINA, 61,
656099, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: bayanova@math.asu.ru

ALEXEY VLADIMIROVICH ZENKOV
ALTAI STATE AGRICULTURAL UNIVERSITY,
PR. KRASNOARMEYSKY, 98,
656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: alexey_zenkov@yahoo.com