S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 186–197 (2018) УДК 517.538
DOI 10.17377/semi.2018.15.018 MSC 35R10

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А.А. БОБОДЖАНОВ, В.Ф. САФОНОВ

Abstract. In this paper, the method of regularization of S.A. Lomov is generalized to integro-differential equations of Volterra type with multiple integral operator.We consider the case when the operator of multiplication of the differential part depends only on the differentiation variable. In this case, in contrast to the works of M.I. Imanaliev, a regularized asymptotic solution of any order (with respect to a parameter) is constructed. In addition, we consider and solve the so-called initialization problem. The formulation of this problem is as follows. It is necessary to choose a class of given data (say, Σ) so that the passage to the limit of an exact solution to a certain limiting regime (when the small parameter tends to zero) holds true on the entire set of changes of independent variables, including the boundary layer zone.

Keywords: singularly perturbed, integro-differential equations, regularization of the integral.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об асимптотическом анализе решений интегродифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{\partial y(t,x,\varepsilon)}{\partial t} = a\left(t\right) y\left(t,x,\varepsilon\right) + \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) y\left(s,v,\varepsilon\right) dsdv + h\left(t,x\right), \\ y\left(0,x,\varepsilon\right) = y^0\left(x\right) \ \left(\left(t,x\right) \in \left[0,T\right] \times \left[0,X\right]\right). \end{gathered} \tag{1}$$

Bobodzhanov, A.A., Safonov, V.F., Asymptotic integration of integridifferential equations with two independent variables.

© 2018 Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Поступила 5 октября 2017 г., опубликована 1 марта 2018 г.

с двумерным интегральным оператором:

$$\int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y(s,v,\varepsilon)\, dsdv \equiv \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t Q(t,x,s,v)\, y(s,v,\varepsilon)\, ds \right) dv$$

была поставлена еще в конце прошлого столетия М. И. Иманалиевым в его монографии [4]. При этом в правой части уравнения (1) присутствовало еще слагаемое $\int\limits_0^t K(t,x,s)\, y(s,x,\varepsilon) ds$ с одномерным интегралом. Однако при развитии алгоритма регуляризованных асимптотических решений уравнения (1) наличие одномерного интеграла повлекло бы лишь дополнительные вычислительные трудности, оставляя неизменными идеи, используемые при разработке этого алгоритма. Поэтому ради упрощения выкладок слагаемое с одномерным интегралом опускается. Как мы уже заметили ранее, аналогичное уравнение рассматривалось в монографии [4]; при этом коэффициент a, зависел не только от переменной t, но и от x. Можно было бы и в нашем случае оставить в коэффициенте a зависимость от x, но это слишком бы усложнило излагаемый ниже алгоритм. В [4] (стр. 52–64) дальше изучения предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ дело не дошло. Вопрос о построении асимптотического решения (любого порядка по ε) даже не обсуждался. В настоящей работе для уравнения (1) ставится задача о развитии алгоритма построения регуляризованных по Ломову (см. [2], стр. 34–42) асимптотических решений любого порядка (по ε) и изучается так называемая *проблема инициализации* (т. е. выбора класса Σ исходных данных задачи, при которых возможен предельный переход ее решения $y(t,x,\varepsilon)$ к некоторому предельному режиму $\bar{\bar{y}}(t,x)$ при $\varepsilon \to +0$ на всем множестве $[0,T] \times [0,X]$, включая и зону пограничного слоя).

§1. Регуляризация задачи (1)

Не умаляя общности, можно считать, что $T = X = 1$. Следуя методу С. А. Ломова (см. [2], стр. 34–42), введем регуляризирующую переменную

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\theta)\, d\theta \equiv \frac{\psi(t)}{\varepsilon} \tag{2}$$

и для функции $\tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + a(t) \tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} - a(t)\, \tilde{y} - \textstyle\int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, \tilde{y}\left(s, v, \tfrac{\psi(s)}{\varepsilon} \varepsilon\right) dsdv = h(t,x), \\ &\tilde{y}(0,x,0,\varepsilon) = y^0(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Связь задачи (3) с исходной задачей (1) такова: если $\tilde{y} = \tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon)$ — решение задачи (3), то его сужение $y(t,x,\varepsilon) \equiv \tilde{y}\left(t, x, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ на регуляризирующей функции (2) будет, очевидно, точным решением исходной задачи (1). Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{y} = \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, \tilde{y}\left(s, v, \frac{\psi(s)}{\varepsilon} \varepsilon\right) dsdv.$$

Для его регуляризации надо ввести, как известно (см. [1], стр. 62), пространство M_ε, асимптотически инвариантное относительно оператора J.

Введем класс функций

$$U = \left\{ y(t,x,\tau) :\ y = y_1(t,x)\, e^\tau + y_0(t,x),\ \ y_0(t,x),\, y_1(t,x) \in C^\infty([0,1] \times [0,1]) \right\}.$$

Тогда сужение этого класса при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$ и будет пространством M_ε. Для обоснования этого факта надо показать, что образ $Jy(t,x,\tau)$ интегрального оператора J на элементе пространства U представим в виде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(y_1^{(k)}(t,x) e^{\frac{\psi(t)}{\varepsilon}} + y_0^{(k)}(t,x) \right)$, сходящегося асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$). Займемся этим вопросом. Введем некоторые ограничения на исходные данные задачи (1). Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) функции $a(t) \in C^\infty[0,1]$, $h(t,x) \in C^\infty([0,1]\times[0,1])$, ядро $Q(t,x,s,v)$ принадлежит классу $C^\infty(0 \le s \le t \le 1,\, 0 \le v \le x \le 1)$;

2) $\operatorname{Re} a(t) \le 0,\ a(t) \ne 0\ \ (\forall t \in [0,1])$.

Рассмотрим образ интегрального оператора на элементе $y(t,x,\tau)$ пространства U:

$$Jy(t,x,\tau) = \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} ds dv + \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_0(s,v)\, ds dv.$$

К первому интегралу применим операцию интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} ds dv \\
&= \varepsilon \int_0^x dv \int_0^t \frac{Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)}{a(s)} d_s\big(e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta}\big) \\
&= \varepsilon \int_0^x \Bigg(\frac{Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)}{a(s)} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} \Big|_{s=0}^{s=t} \\
&\quad - \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)}{a(s)} \right) ds \Bigg) dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \int_0^x \left[\frac{Q(t,x,t,v)\, y_1(t,v)}{a(t)} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} - \frac{Q(t,x,0,v)\, y_1(0,v)}{a(0)} \right] dv \\
&- \varepsilon \int_0^x \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)}{a(s)} \right) ds dv.
\end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$I^0\left(Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)\right) \equiv \frac{Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)}{a(s)},$$

запишем последний результат в виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} ds dv \\
&= \varepsilon \left(\int_0^x \left(I^0\left(Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)\right) \right)_{s=t} dv \right) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} \\
&- \varepsilon \left(\int_0^x \left(I^0\left(Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)\right) \right)_{s=0} dv \right) \\
&- \varepsilon \int_0^x \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(I^0\left(Q(t,x,s,v)\, y_1(s,v)\right) \right) ds dv
\end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру далее, получим разложение

$$\begin{gathered} Jy\left(t,x,\tau\right) \\ = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-1\right)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(\int_0^x\left(I^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_1\left(s,v\right)\right)\right)_{s=t}dv\right)\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} \\ -\left(\int_0^x\left(I^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_1\left(s,v\right)\right)\right)_{s=0}dv\right)\right]+\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y_0\left(s,v\right)dsdv, \end{gathered} \tag{4}$$

где введены операторы:

$$\begin{gathered} I^0\left(q\left(t,x,s,v\right)\right)\equiv\frac{q(t,x,s,v)}{a(s)},\ I^1\left(q\left(t,x,s,v\right)\right)\equiv\frac{1}{a(s)}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\frac{q(t,x,s,v)}{a(s)},..., \\ I^{\nu}\left(q\left(t,x,s,v\right)\right)\equiv\frac{1}{a(s)}\cdot\frac{\partial}{\partial s}I^{\nu-1}\left(q\left(t,x,s,v\right)\right),\ \nu=2,3,4,\ldots\ . \end{gathered} \tag{5}$$

Как и в [1], показываем, что (4) сходится асимптотически (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $(t,x)\in[0,T]\times[0,T]$. Для любого элемента

$$y\left(t,x,\tau\right)=y_1\left(t,x\right)e^{\tau}+y_0\left(t,x\right)$$

пространства U введем операторы

$$\begin{gathered} R_0y\left(t,x,\tau\right)=\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y_0\left(s,v\right)dsdv, \\ R_{\nu+1}y\left(t,x,\tau\right)=\left(-1\right)^{\nu}\left[\left(\int_0^x\left(I^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_1\left(s,v\right)\right)\right)_{s=t}dv\right)\cdot e^{\tau} \\ -\left(\int_0^x\left(I^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_1\left(s,v\right)\right)\right)_{s=0}dv\right)\right],\ \ \nu\geq 0, \end{gathered} \tag{6}$$

действующие из U в U. Тогда формальным расширением интегрального оператора J на рядах

$$\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k\left(t,x,\tau\right), \tag{7}$$

сходящихся асимптотически (при $\varepsilon\to 0+$) равномерно по $(t,x,\tau)\in[0,1]\times\times[0,1]\times\{\operatorname{Re}\tau\leq 0\}$ естественно считать оператор

$$\tilde{J}\tilde{y}\equiv\tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k\left(t,x,\tau\right)\right)\triangleq\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left(\sum_{k=0}^{r}R_{r-k}y_k\left(t,x,\tau\right)\right). \tag{8}$$

Теперь нетрудно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к (1):

$$\mathscr{L}_{\varepsilon}\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+a\left(t\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau}-a\left(t\right)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=h\left(t,x\right),\ \tilde{y}\left(0,x,0,\varepsilon\right)=y^0\left(x\right), \tag{9}$$

где $\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)$ — ряд (7).

§ 2. Построение регуляризованного асимптотического решения

Подставляя ряд (7) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$\mathscr{L}\ y_0\left(t,x,\tau\right)\equiv a\left(t\right)\frac{\partial y_0}{\partial\tau}-a\left(t\right)y_0-R_0y_0=h\left(t,x\right),\ y_0\left(0,x,0\right)=y^0\left(x\right); \tag{10_0}$$

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\ y_1\left(t,x,\tau\right)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+R_1y_0,\quad y_1\left(0,x,0\right)=0; \\ \cdots \end{gathered} \tag{10_1}$$

$$\mathscr{L}\ y_k\left(t,x,\tau\right)=-\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t}+R_1y_{k-1}+...+R_ky_0,\quad y_k\left(0,x,0\right)=0,\ k\geq 1. \tag{10_k}$$

Каждая из итерационных задач (10_k) имеет вид

$$\mathscr{L}\ y\left(t,x,\tau\right)\equiv a\left(t\right)\frac{\partial y}{\partial\tau}-a\left(t\right)y-R_0y=H\left(t,x,\tau\right),\ y\left(0,x,0\right)=y_*\left(x\right), \tag{11}$$

где $H(t,x,\tau) = H_1(t,x)e^{\tau} + H_0(t,x) \in U,\ y_*(x) \in C^{\infty}[0,1]$ — известные функции, а оператор $R_0 y$ имеет вид (6). Попробуем решить задачу (11). Подставляя элемент $y(t,x,\tau) = y_1(t,x)e^{\tau} + y_0(t,x)$ пространства U в (11), будем иметь

$$a(t)\,y_1(t,x)\,e^{\tau} - a(t)\,y_1(t,x)\,e^{\tau} - a(t)\,y_0(t,x) - \int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\,y_0(s,v)\,dsdv = \\ = H_1(t,x)\,e^{\tau} + H_0(t,x)\,.$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при экспоненте, получим уравнения

$$0 \cdot y_1(t,x) = H_1(t,x)\,, \tag{12_1}$$

$$y_0(t,x) = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{Q(t,x,s,v)}{-a(t)}\right) y_0(s,v)\,dsdv - \frac{H_0(t,x)}{a(t)}. \tag{12_2}$$

Для разрешимости уравнения (12_1) в пространстве $C^{\infty}[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы $H_1(t,x) \equiv 0\ \ (\forall\,(x,t) \in [0,1]\times[0,1])$. Уравнение (12_2) является уравнением Вольтерра второго рода с гладким ядром $-a^{-1}(t)\,Q(t,x,s,v)$, поэтому оно имеет единственное решение в пространстве $C^{\infty}([0,1]\times[0,1])$ (см., например, [5, стр. 149]). Если ввести в пространстве U скалярное (при каждом $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$) произведение

$$< y(t,x,\tau)\,,\, z(t,x,\tau) > \equiv < y_1(t,x)\,e^{\tau} + y_0(t,x)\,,\, z_1(t,x)\,e^{\tau} + z_0(t,x) > \\ \triangleq y_1(t,x)\cdot \bar{z}_1(t,x) + y_2(t,x)\cdot \bar{z}_2(t,x)\,,$$

то из предыдущих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (11) правая часть* $H(t,x,\tau) \in U$ *и выполнены условия 1) и 2). Тогда для разрешимости уравнения (10) в пространстве* U *необходимо и достаточно, чтобы*

$$< H(t,x,\tau)\,,\, e^{\tau} > \equiv 0\ \ (\forall\,(t,x) \in [0,1]\times[0,1])\,. \tag{13}$$

При выполнении этого условия уравнение (11) имеет следующее решение в пространстве U :

$$y(t,x,\tau) = \alpha(t,x)\,e^{\tau} + y_0(t,x)\,, \tag{14}$$

где $y_0(t,x)$ *— решение уравнения* (12_2), $\alpha(t,x)$ *— произвольная функция класса* $C^{\infty}([0,1]\times[0,1])$.

Подчиним решение (14) начальному условию $y(0,x,0) = y_*(x)$. Будем иметь

$$\alpha(0,x) - \frac{H_0(0,x)}{a(0)} = y_*(x) \Leftrightarrow \alpha(0,x) = \frac{H_0(0,x)}{a(0)} + y_*(x)\,. \tag{15}$$

Однако функция $\alpha(t,x)$ не найдена полностью. Необходимо дополнительное требование на решение задачи (11). Такое требование диктуют итерационные задачи (10_k), из которых видно, что естественным дополнительным ограничением является условие

$$< -\frac{\partial y}{\partial t} + R_1 y + P(t,x,\tau)\,,\, e^{\tau} > \equiv 0\ \ (\forall\,(t,x) \in [0,1]\times[0,1])\,, \tag{16}$$

где $P(t,x,\tau) \in U$ — известная функция. Покажем, что при выполнении требования (16) задача (11) имеет единственное решение в пространстве U.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)-2) и правая часть* $H(t,x,\tau) \in U$ *удовлетворяет условию ортогональности (13). Тогда задача (11) при дополнительном условии (16) однозначно разрешима в пространстве* U.

Доказательство. Чтобы воспользоваться условием (16), вычислим выражение

$$-\frac{\partial y}{\partial t}+R_1y+P\left(t,x,\tau\right)=-\frac{\partial\alpha(t,x)}{\partial t}e^{\tau}-\frac{\partial y_0(t,x)}{\partial t}$$
$$+\int_0^x\left(I^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha\left(s,v\right)\right)\right)_{s=t}dv\cdot e^{\tau}-\int_0^x\left(I^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha\left(s,v\right)\right)\right)_{s=0}dv$$
$$+P_1\left(t,x\right)e^{\tau}+P_0\left(t,x\right).$$

Так как $I^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha\left(s,v\right)\right)=\frac{1}{a(s)}Q\left(t,x,s,v\right)\alpha\left(s,v\right)$, то условие (16) принимает вид

$$-\frac{\partial\alpha\left(t,x\right)}{\partial t}+\int_0^x\frac{1}{a\left(t\right)}Q\left(t,x,t,v\right)\alpha\left(t,v\right)dv+P_1\left(t,x\right)\equiv0.$$

С учетом начального условия (15) это уравнение можно записать в эквивалентной форме:

$$\alpha\left(t,x\right)=y_*\left(x\right)+\frac{H_0\left(0,x\right)}{a\left(0\right)}+\int_0^t\left(\int_0^x\frac{Q\left(s,x,s,v\right)}{a\left(s\right)}\alpha\left(s,v\right)dv\right)ds+\int_0^tP_1\left(s,x\right)ds, \tag{17}$$

Так как здесь ядро $a^{-1}\left(s\right)Q\left(s,x,s,v\right)$ принадлежит классу

$$C^{\infty}\left(0\le s\le t\le1,\,0\le v\le x\le1\right),$$

то уравнение (17) имеет единственное решение $\alpha\left(t,x\right)\in C^{\infty}\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)$. Теорема доказана. $\square$

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (10_k), построим ряд (7) с коэффициентами из класса U. Пусть $y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)=\sum_{k=0}^N\varepsilon^ky_k\left(t,x,\frac{a(x)t}{\varepsilon}\right)$ — сужение N-й частичной суммы $S_N(t,x,\tau,\varepsilon)$ этого ряда при $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Имеет место следующий результат.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1) – 2). Тогда функция $y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{N+1}, т.е.*

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t}=a\left(t\right)y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)+\int_0^x\int_0^tQ\left(t,x,s,v\right)y_{\varepsilon N}\left(s,v\right)dsdv+h\left(t,x\right)$$
$$+\varepsilon^{N+1}K_N\left(t,x,\varepsilon\right),\quad y_{\varepsilon N}\left(0,x\right)=y^0\left(x\right),$$

где $\varepsilon_0>0$ — достаточно мало, $||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]}\le\bar{K}_N,\bar{K}_N>0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_N]$.

Доказательство. Подставим решения $y_0(t,x,\tau),y_1(t,x,\tau),\ldots,y_N(t,x,\tau)\in U$ в системы $(10_0),(10_1),\ldots,(10_N)$ соответственно. Полученные тождества умножим последовательно на $\varepsilon^0,\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^N$ и сложим полученные результаты. Будем иметь

$$a\left(t\right)\frac{\partial S_N(t,x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial S_N(t,x,\tau,\varepsilon)}{\partial t}-a\left(t\right)S_N(t,x,\tau,\varepsilon)\equiv\varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_N(t,x,\tau)}{\partial t}$$
$$+R_0y_0+\varepsilon(R_0y_1+R_1y_0)+\ldots+\varepsilon^N(R_0y_N+R_1y_{N-1}+\ldots+R_Ny_0+h(t,x).$$

Производя здесь сужение при $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$ и вычитая из обеих частей интеграл $\int_0^x\int_0^tQ\left(t,x,s,v\right)y_{\varepsilon N}\left(s,v\right)dsdv$, получим тождество

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t}-a(t)y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)-\int_0^x\int_0^tQ\left(t,x,s,v\right)y_{\varepsilon N}\left(s,v\right)dsdv\equiv\varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_N(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon})}{\partial t}$$
$$-\left[\int_0^x\int_0^tQ\left(t,x,s,v\right)y_{\varepsilon N}\left(s,v\right)dsdv-\sum_{r=0}^N\varepsilon^r\sum_{k=0}^rR_{r-k}y_k(t,x,\tau)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}\right]$$
$$+h(t,x).$$

По построению операторов R_ν выражение в квадратных скобках представляется в виде $\varepsilon^{N+1}l_N(t,\varepsilon)$, где $||l_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]}\le\bar{l}_N,\bar{l}_N>0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_N], \hat{\varepsilon}_N > 0$ — достаточно мало. Учитывая равномерную ограниченность функции $y_N(t, x, \frac{\psi(t)}{\varepsilon})$ при $(t, x, \varepsilon) \in [0,1] \times [0,1] \times \{\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, будем иметь

$$\varepsilon \frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t} = a(t) y_{\varepsilon N}(t,x) + \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) y_{\varepsilon N}\left(s,v\right) ds dv + h(t,x) \\ + \varepsilon^{N+1} K_N(t,x,\varepsilon),$$

где $K_N(t,\varepsilon) \equiv \partial y_{\varepsilon N}(t,x)/\partial t + l_N(t,x,\varepsilon)$, причем $||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \leq \bar{K}_N, \bar{K}_N > > 0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_N]$. Начальные условие $y_{\varepsilon N}(0,x) = y^0(x)$, очевидно, также выполняется. Лемма доказана. □

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *где* $\varepsilon_0 > > 0$ *— достаточно мало, задача (1) имеет единственное решение* $y\left(t,x\right) \in \in C^1\left([0,1] \times [0,1]\right)$ *и имеет место оценка*

$$\|y\left(t,x,\varepsilon\right) - y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)\|_{C([0,1]\times[0,1])} \leq C_N \varepsilon^{N+1} \quad \left(N = 0,1,2,...\right), \tag{18}$$

где постоянная $C_N > 0$ *не зависит от* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство. Покажем сначала, что задача

$$\varepsilon \frac{\partial Z\left(t,x,\varepsilon\right)}{\partial t} = a(t) Z\left(t,x,\varepsilon\right) + \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) Z\left(s,v,\varepsilon\right) ds dv = \\ \Phi(t,x,\varepsilon), Z\left(0,x,\varepsilon\right) = 0 \tag{19}$$

корректно разрешима, т.е. что она имеет решение при любой правой части $\Phi(t,x,\varepsilon) \in \in \mathrm{C}([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}^1)$ и что имеет место оценка

$$||Z(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq \frac{\nu_0}{\varepsilon} ||\Phi(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])}, \tag{20}$$

где $\nu_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от ε $(\varepsilon > 0)$. Однозначная разрешимость задачи (20) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ доказывается так же, как и разрешимость обычной системы дифференциальных уравнений, сведением ее к интегральной системе и применением метода последовательных приближений. Покажем справедливость оценки (20). Введём для этого еще одну неизвестную функцию $V = \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) Z\left(s,v,\varepsilon\right) ds dv$. Дифференцируя ее по t, будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} Q\left(t,x,s,v\right) \right) Z\left(s,v,\varepsilon\right)\ ds + Q\left(t,x,t,v\right) Z\left(t,v,\varepsilon\right) \right)\ dv.$$

Тогда для вектор-функции $W = \{Z, V\}$ получим систему

$$\varepsilon \tfrac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_0^x \int\limits_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} Q\left(t,x,s,v\right) \right) Z\left(s,v,\varepsilon\right)\ ds\, dv + \int\limits_0^x Q\left(t,x,t,v\right) Z\left(t,v,\varepsilon\right)\ dv \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \Phi(t,x,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, W(0,x,\varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Матрица $A_0(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является матрицей простой структуры, так как она имеет различные собственные значения $\lambda_1(t) = a\,(t)\,, \lambda_2(t) = 0 \forall t \in \in [0,1]$, т. е. существует невырожденная матрица $T(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a(t)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ такая, что $T^{-1}(t)A_0(t)T(t) \equiv \mathrm{diag}(a\,(t)\,,0) = \Lambda_0(t)$. Обозначим через $Y(t,s,\varepsilon)$ нормальную фундаментальную матрицу однородной системы $\varepsilon\frac{dW}{dt} = A_0(t)W$, т. е. матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\varepsilon\frac{dY(t,s,\varepsilon)}{dt} = A_0(t)Y(t,s,\varepsilon), Y(s,s,\varepsilon) = I, 0 \le s \le t \le T.$$

Так как $A_0(t)$ — матрица простой структуры и её собственные значения при всех $t \in [0,1]$ лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \le 0$, то $Y(t,s,\varepsilon)$ равномерно ограничена (см., например, [1], стр. 119–120), т. е. $||Y(t,s,\varepsilon)|| \le c_0 \forall (t,s,\varepsilon) \in \{0 \le s \le \le t \le T\} \times \{\varepsilon > 0\}$, где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Запишем теперь интегральную систему, эквивалентную системе (21):

$$\begin{aligned} &W(t,x,\varepsilon) = \textstyle\int_0^t Y(t,\zeta,\varepsilon) \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_0^x Q\,(\varsigma,x,\varsigma,v)\,Z\,(\varsigma,v,\varepsilon)\;dv + \int\limits_0^x\int\limits_0^\varsigma \left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\,(\varsigma,x,s,v)\right)Z\,(s,v,\varepsilon)\;ds\;dv \end{pmatrix} d\zeta \\ &+\tfrac{1}{\varepsilon}\textstyle\int_0^t Y(t,\zeta,\varepsilon)\begin{pmatrix} \Phi(\varsigma,x,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} d\zeta. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку при каждом $\varepsilon > 0$ существует решение $W(t,x,\varepsilon)$ системы (22) в пространстве $\mathrm{C}^1([0,1]\times[0,1]\,,\mathbb{C}^2)$, то подставляя его в (22), получим тождество. Перейдем в нем к нормам:

$$\begin{aligned} &||W(t,x,\varepsilon)|| \le \textstyle\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\,|| \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^x Q\,(\varsigma,x,\varsigma,v)\,Z\,(\varsigma,v,\varepsilon)\;dv \end{pmatrix} ||d\zeta \\ &+\textstyle\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\cdot|| \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^x\int_0^\varsigma \left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\,(\varsigma,x,s,v)\right)Z\,(s,v,\varepsilon)\;ds\;dv \end{pmatrix} ||d\zeta \\ &+\tfrac{1}{\varepsilon}\textstyle\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\cdot|| \begin{pmatrix} \Phi\,(\varsigma,x,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} ||d\zeta \end{aligned}$$

Оценим здесь каждое слагаемое в отдельности[1]:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\,|| \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_0^x Q\,(\varsigma,x,\varsigma,v)\,Z\,(\varsigma,v,\varepsilon)\;dv \end{pmatrix} ||d\zeta \\ &\le \textstyle\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \left\| \int\limits_0^x Q\,(\varsigma,x,\varsigma,v) \right\| ||Z\,(\varsigma,v,\varepsilon)\,||dv d\zeta \le c_0c_1\int_0^t\int_0^x \|W\,(\varsigma,v,\varepsilon)\|\,dvd\zeta, \end{aligned}$$

[1]Учесть, что функции $Q\,(\varsigma,x,s,v)\,,\ \frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\,(\varsigma,x,s,v)\,,\Phi\,(\varsigma,x,\varepsilon)$ равномерно ограничены.

$$\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot || \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_0^\varsigma \int\limits_0^x \left(\frac{\partial}{\partial\varsigma} Q(\varsigma,x,s,v)\right) Z(s,v,\varepsilon)\ ds\ dv \end{pmatrix} || d\zeta$$
$$\le \int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot \left(\int\limits_0^x \int\limits_0^\varsigma \left(\left\| \frac{\partial}{\partial\varsigma} Q(\varsigma,x,s,v) \right\|\right) \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv \right) d\zeta$$
$$\le c_0c_2 \int_0^t \left(\int_0^x \int_0^\varsigma \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv \right) d\varsigma \le c_0c_2 \int_0^t \left(\int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv \right) d\varsigma =$$
$$= c_0c_2 \int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dsdv\ \cdot \int_0^t d\varsigma \le c_0c_2 \int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dsdv$$
$$= c_0c_2 \int_0^t \int_0^x \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dvds\ .$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot || \begin{pmatrix} \Phi(\varsigma,x,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} || d\zeta \le \frac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])} = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$||W(t,x,\varepsilon)|| \le (c_0c_1 + c_0c_2) \int_0^t \int_0^x \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dvds + \frac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])}\,.$$

Теперь воспользуемся следующим утверждением ([6], стр. 67): *если для всех* $(t,x) \in [0,b]\times[0,c]$ *функции* $u(t,x)$ *и* $v(t,x)$ *неотрицательны и удовлетворяют неравенству*

$$u(t,x) \le \gamma + \int_0^t \int_0^x v(r,s) \cdot u(r,s)\, drds \quad (\gamma = \mathrm{const} \ge 0)\,,$$

то в области $[0,b] \times [0,c]$ *справедливо неравенство*

$$u(t,x) \le \gamma \cdot \exp\left\{ \int_0^t \int_0^x v(r,s)\, drds \right\}.$$

В нашем случае $b = c = 1$ и

$u(t,x) = ||W(t,x,\varepsilon)||,\ \gamma = \dfrac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])}\,,\ v(r,s) = c_0c_1 + c_0c_2 = \mathrm{const}$,

поэтому

$$||W(t,x,\varepsilon)|| \le \frac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])} \cdot \exp\left\{ \int_0^t \int_0^x (c_0c_1 + c_0c_2)\, drds \right\} \le$$
$$\le \frac{\nu_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])}\,,$$

где $\nu_0 = c_0c_1 + c_0c_2$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Так как $\|Z\| \le \|W\|$, то неравенство (20) доказано.

Применим теперь это неравенство для оценки остатка $\Delta_N(t,x,\varepsilon) = y(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t,x)$, где $y(t,x,\varepsilon)$ — точное решение задачи (1), а $y_{\varepsilon N}(t,x)$ — формальное асимптотическое решение, построенное выше. Функция $\Delta_N(t,x,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon \frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t} = a(t) y_{\varepsilon N}(t,x) + \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_{\varepsilon N}(s,v)\, dsdv \equiv -\varepsilon^{N+1} K_N(t,x,\varepsilon),$$

где $||K_N(t,x,\varepsilon)|| \le \bar{K}_N, \bar{K}_N > 0$ — не зависит от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_N]$ (см. лемму). Сравнивая это с (19), видим, что $\Phi(t,x,\varepsilon) \equiv -\varepsilon^{N+1} K_N(t,x,\varepsilon)$, поэтому из оценки (20) выводим неравенство

$$||\Delta_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le \frac{\nu_0}{\varepsilon} \varepsilon^{N+1} ||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le \nu_0 \varepsilon^N ||K_N(t,x,\varepsilon)|| \le \nu_0 \bar{K}_N \varepsilon^N.$$

Значит, $||\Delta_N(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])} \equiv ||y(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq \bar{c}_N\varepsilon^N$, $N = 0,1,2,\ldots$. Отсюда (за счет гладкости коэффициентов $y_k(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon})$ сужения $S(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\varepsilon)$ ряда (7)) выводим обычную оценку:

$$||y(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq c_N\varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,\ldots.$$

Теорема полностью доказана. □

§3. Решение первой итерационной задачи. Исследование проблемы инициализации

Поскольку в системе (10_0) вектор-функция $H(t,x,\tau) \equiv h(t,x)$ не зависит от τ, то условия (13) для нее выполнены автоматически, поэтому система (10_0) имеет в пространстве U решение, которое можно записать в форме (см. (14))

$$y_0(t,x,\tau) = y\,(t,x,\tau) = \alpha^{(0)}\,(t,x)\,e^{\tau} + y_0^{(0)}(t,x), \tag{23}$$

где $\alpha^{(0)}(t,x) \in C^\infty([0,1]\times[0,1]\,,\mathbb{C}^1)$ — пока произвольная функция, а функция $y_0^{(0)}(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$y_0^{(0)}\,(t,x) = \int_0^x\left(\int_0^t\frac{Q\,(t,x,s,v)}{-a\,(t)}\right)y_0^{(0)}\,(s,v)\,dsdv - \frac{h\,(t,x)}{a\,(t)}.$$

Для вычисления функции $\alpha^{(0)}(t,x)$ запишем правую часть следующей итерационной системы (10_1):

$$H\,(t,x,\tau) \equiv -\frac{\partial y_0^{(0)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial\alpha^{(0)}(t,v)}{\partial t}e^{\tau} + \left(\int_0^x\frac{Q(t,x,t,v)\alpha^{(0)}(t,v)}{a(t)}dv\right)e^{\tau}$$
$$-\left(\int_0^x\frac{Q(t,x,0,v)\alpha^{(0)}(0,v)}{a(0)}dv\right).$$

Подчиняя $H\,(t,x,\tau)$ условию ортогональности (13), будем иметь

$$-\frac{\partial\alpha^{(0)}\,(t,v)}{\partial t} + \left(\int_0^x\frac{Q\,(t,x,t,v)\,\alpha^{(0)}\,(t,v)}{a\,(t)}dv\right) = 0. \tag{24}$$

Начальные условия для функций $\alpha^{(0)}(t,x)$ находим из равенства $y_0(0,x,0) = = y^0\,(x)$:

$$\alpha^{(0)}\,(0,x) - \frac{h\,(0,x)}{a\,(0)} = y^0\,(x) \Leftrightarrow \alpha^{(0)}\,(0,x) = y^0\,(x) + \frac{h\,(0,x)}{a\,(0)}.$$

С учётом начального условия $\alpha^{(0)}\,(0,x)$ уравнение (24) можно записать в эквивалентной форме:

$$\alpha^{(0)}\,(t,x) = y^0\,(x) + \frac{h\,(0,x)}{a\,(0)} + \int_0^t\left(\int_0^x\frac{Q\,(s,x,s,v)}{a\,(s)}\alpha^{(0)}\,(s,v)\,ds\right)dv\,, \tag{25}$$

Так как здесь ядро $a^{-1}\,(s)\,Q\,(s,x,s,v)$ принадлежит классу

$$C^\infty\,(0 \leq s \leq t \leq 1,\, 0 \leq v \leq x \leq 1)\,,$$

то уравнение (25) имеет единственное решение $\alpha^{(0)}\,(t,x) \in C^\infty\,([0,1]\times[0,1])$. Тем самым, решение первой итерационной задачи (10_0) найдено в виде (23) однозначно. Перейдем теперь к рассмотрению проблемы инициализации.

Пусть $\mathrm{Re}\,a\,(t) < 0\,\forall t \in [0,1]$. Тогда по теореме 3 имеем

$$||y(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon 0}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq c_0\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow ||y(t,\varepsilon) - \left(\alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} + y_0^{(0)}(t,x)\right)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq c_0\varepsilon.$$

Отсюда при любом $\delta \in (0,1]$ получаем, что

$$
\begin{aligned}
&c_0\varepsilon \geq ||y(t,x,\varepsilon) - \left(\alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} + y_0^{(0)}(t,x)\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \\
&\geq ||y(t,x,\varepsilon) - \alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta} - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \\
&\geq ||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} - ||\alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta}||_{C([\delta,1]\times[0,1])},
\end{aligned}
$$

откуда выводим, что

$$
\begin{aligned}
&||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \leq c_0\varepsilon + ||\alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta}||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \\
&\leq c_0\varepsilon + \left\|\alpha^{(0)}(t,x)\right\|_{C([\delta,1]\times[0,1])} e^{-\frac{\varkappa\delta}{\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

где $\varkappa = \min\limits_{t\in[0,T]}(-\operatorname{Re} a(t)) > 0$. Следовательно,

$$
||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \to 0(\varepsilon \to +0). \tag{26}
$$

Получен следующий результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия 1) и 2), причем* $\operatorname{Re} a\,(t) < 0\,\forall t \in [0,1]$, *то имеет место предельный переход (26), где* $y = y(t,x,\varepsilon)$ *— точное решение задачи (1), а функция* $y_0^{(0)}(t,x)$ *является решением интегральной системы*

$$
y_0^{(0)}(t,x) = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{Q\,(t,x,s,v)}{-a\,(t)}\right) y_0^{(0)}(s,v)\,dsdv - \frac{h\,(t,x)}{a\,(t)}. \tag{27}
$$

Эта система является вырожденной по отношению к исходной системе (1).

Однако в нашем случае допускаются чисто мнимые значения $a\,(t) = \pm i\omega\,(t)$, $\omega\,(t) > 0\ (\forall t \in [0,1])$, поэтому предельный переход (26) в метрике пространства $C\,([0,1]\times[0,1])$ становится невозможным. В связи с этим возникает следующая *проблема инициализации*: какими должны быть исходные данные задачи (1), чтобы равномерный предельный переход $y\,(t,x,\varepsilon) \to y_0^{(0)}(t,x)$ (при $\varepsilon \to +0$) был возможен на множестве $[0,1]\times[0,1]$, включая и зону пограничного слоя по t? Исходные данные задачи (1), удовлетворяющие этому требованию, называют классом инициализации Σ. Так как $y\,(t,x,\varepsilon) = \alpha^{(0)}(t,x)e^{\frac{\pm i}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)d\theta} + y_0^{(0)}(t,x) + O(\varepsilon)$, то первое слагаемое быстро осциллирует и препятствуют существованию предельного перехода $y\,(t,x,\varepsilon) \to y_0^{(0)}(t,x)$ на множестве $[0,1]\times[0,1]$, поэтому его надо удалить, т. е. положить $\alpha^{(0)}(t,x) \equiv 0\ (\forall\,(t,x) \in [0,1]\times[0,1])$. Из формулы (25) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$
y^0(x) + \frac{h\,(0,x)}{a\,(0)} \equiv 0\,\forall x \in [0,1]. \tag{$*$}
$$

Значит, класс инициализации $\Sigma = \left\{h\,(t,x)\,, y^0(x)\,, a\,(x)\right\}$ не зависит от ядра $Q\,(t,x,s,v)$ и имеет вид $\Sigma = \left\{\left(h,y^0,a\right) : y^0(x) + \frac{h(0,x)}{a(0)} \equiv 0\,\forall x \in [0,1]\right\}$.

Доказан следующий результат.

Теорема 5. *Пусть для задачи (1) выполнены условия 1)–2). Тогда для того чтобы имел место предельный переход*

$$
||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])} \to 0 \quad (\varepsilon \to +0),
$$

необходимо и достаточно, чтобы $\left(h\,(t,x)\,, y^0(x)\,, a\,(t)\right) \in \Sigma$.

Ясно, что условие $\left(h\left(t,x\right),y^{0}\left(x\right),a\left(x\right)\right)\in\Sigma$ гарантирует предельный переход

$$||y(t,x,\varepsilon)-y_{0}^{(0)}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\to 0\,(\varepsilon\to+0)$$

и в случае действительных $a\left(t\right)<0$.

References

[1] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhanov, *Course of higher mathematics. Singularly perturbed equations and the regularization method: textbook*, M.: Izdatelstvo MEI, 2012. [In Russian]

[2] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981. [In Russian] MR0645353

[3] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: Moscow University Press, 2011. [In Russian]

[4] M.I. Imanaliev, *Methods for solving inverse problems and their application*, Frunze: ILIM, 1977. [In Russian] Zbl 0448.45001

[5] V.I. Smirnov, *Course of higher mathematics. T. 4*, M.: GIFML, 1958. [In Russian]

[6] A.N. Filatov, L.V. Sharova, *Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations*, M.: Nauka, 1976. [In Russian] Zbl 0463.34001

Abdukhafiz Abdurasulovich Bobodzhanov,
The National Research University "Moscow Power Engineering Institute
Ul.Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moscow, Russia
E-mail address: bobojanova@mpei.ru

Valery Fedorovich Safonov,
The National Research University "Moscow Power Engineering Institute
Ul.Krasnokazarmennaya, 14,
111250, 111250, Moscow, Russia
E-mail address: SafonovVF@mpei.ru