S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 1865–1877 (2018) УДК 517.946
DOI 10.33048/semi.2018.15.151 MSC 35J46

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ $\mathbb{R}^2$

Д.А. ЖУРАЕВ

Abstract. In the paper it is considered the problem of regularization of the Cauchy problem for matrix factorisations of the Helmholtz equation in an unbounded planar domain. Using the Carleman matrix found an explicitly regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in two-dimensional unbounded domain.

Keywords: The Cauchy problem, regularization, factorization, regular solution, fundamental solution.

1. Введение

Известно, что задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т.е. некорректна (пример Адамара [9], с. 39). В неустойчивых задачах образ оператора не является замкнутым, поэтому условие разрешимости не может быть записано в терминах непрерывных линейных функционалов. Так, в задаче Коши для эллиптических уравнений с данными на части границы области решение обычно единственно, задача разрешима для всюду плотного множества данных, но это множество не замкнуто. Следовательно, теория разрешимости таких задач существенно труднее и глубже, чем теория разрешимости уравнений Фредгольма. Первые результаты в этом направлении появились только в середине 1980-х годов в работах Л.А.Айзенберга, А.М.Кытманова, Н.Н.Тарханова (См. [3]). Единственность решения следует из общей теоремы Хольмгрена ([14], с. 58). Условная

Juraev, D.A., On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$.

Поступила 17 января 2018 г., опубликована 31 декабря 2018 г.

устойчивость задачи следует из работы А.Н.Тихонова [13], если сузить класс возможных решений до компакта.

Регуляризованное решение задачи Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в трехмерной неограниченной области рассмотрена в работе [23]. В работе [24] рассмотрена регуляризация задачи Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в двумерной ограниченной области на плоскости.

В этой работе мы приводим явную формулу приближенного решения задачи Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в неограниченной области на плоскости. Двумерный случай требует особого рассмотрения в отличие от трех и более размерностей во многих математических задачах. Как типичный пример можно указать уравнения Лапласа на плоскости, где стандартное фундаментальное решение типа свёртки не является ограниченным на бесконечности. Наша формула для приближённого решения тоже включает конструкцию семейства фундаментальных решений для оператора Гельмгольца на плоскости. Это семейство параметризовано некоторой целой функцией $K(w)$, выбор которой зависит от размерности пространства. Это мотивирует отдельное исследование формул регуляризации в плоских областях и приводит к улучшенным оценкам по сравнению с трёхмерным случаем.

Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются только на части границы, была рассмотрена Т.Карлеманом [4]. Исследования Т.Карлемана были продолжены Г.М.Голузиным и В.И.Крыловым [11]. В работе [12] построен многомерный аналог формулы Карлемана для аналитических функций многих переменных. Использование классической формулы Грина для построения регуляризованного решения задачи Коши для уравнения Лапласа было предложено академиком М.М.Лаврентьевым, в его известной монографии [6]. Используя идеи М.М.Лаврентьева [5], Ш.Ярмухамедовым было построено в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [7-8]. В работе [1] доказана интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа первого порядка, с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Задача Коши для многомерной системы Ламе рассмотрены О.И.Махмудовым и И.Э.Ниёзовым ([17]-[18]). В работе [16] рассмотрена задача Коши для уравнения Гельмгольца в произвольной ограниченной плоской области с данными Коши, известными только на участке границы области.

Построением матрицы Карлемана для эллиптических систем занимались: Ш.Ярмухамедов, Н.Н.Тарханов, О.И.Махмудов, И.Э.Ниёзов и другие. Система, рассматриваемая в данной работе, была введена Н.Н.Тархановым. Для этой системы им были изучены корректные граничные задачи и найден аналог интегральной формулы Коши в ограниченной области.

Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующие оператор Гельмгольца, недоступно вычисление значений вектор-функции на всей границе. Поэтому, задача восстановления решения систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизующие оператор Гельмгольца (См. [19,20,21,22,23,24]), является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

На протяжении последних десятилетий сохранился интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в работах [4]-[8] и развивалось впоследствии в [1]-[3] и [16]-[24].

2. Интегральная формула в неограниченной области

Пусть $\mathbb{R}^2-$двумерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ y = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$G \subset \mathbb{R}^2-$неограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей, состоящей из плоскости T: $y_2 = 0$ и некоторой гладкой кривой S, лежащей в полупространстве $y_2 > 0$, т.е. $\partial G = S \bigcup T$.

Введем следующие обозначения:

$$r = |y - x|\,,\ \ \alpha = |y_1 - x_1|\,, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2,\ \ u \geq 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\, \tfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^T,\ \ \tfrac{\partial}{\partial x} \to \xi^T,\, \xi^T = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} -\text{транспонированный вектор } \xi,$$

$$U(x) = (U_1(x),\, \ldots,\, U_n(x))^T,\ \ u^0 = (1,\, \ldots,\, 1) \in \mathbb{R}^n,\ \ n = 2^m,\ \ m = 2,$$

$$E(z) = \left\| \begin{matrix} z_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots. \\ 0 \ldots z_n \end{matrix} \right\| -\text{диагональная матрица, } z = (z_1,\, \ldots,\, z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $D(\xi^T),\ \ (n \times n)-$матрица с элементами, состоящими из множества линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости, для которых выполняется условие:

$$D^*(\xi^T)D(\xi^T) = E((|\xi|^2 + \lambda^2)u^0),$$

где $D^*(\xi^T)-$эрмитово сопряженная матрица $D(\xi^T)$, $\lambda-$вещественное число.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-$матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Обозначим через $A(G)-$класс вектор-функций в области G, непрерывных на $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ и удовлетворяющих системе (1).

Если $G-$ограничена и $U(y) \in A(G)$, то верна следующая интегральная формула типа Коши [24]

$$U(x) = \int_{\partial G} M(y,\, x)U(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{2}$$

где

$$M(y,\, x) = \left(E\left(-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T),$$

$t = (t_1,\, t_2)-$единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y, поверхности ∂G, $-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)-$фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$. [14].

Обозначим, через $K(w)-$целую функцию, принимающую вещественные значения при вещественном w, ($w = u + iv$, u, $v-$действительные числа) и удовлетворяющую условиям:

$$K(u) \neq 0,\ \ \sup_{v \geq 1}|v^p K^p(w)| = \mathrm{M}(u,\, p) < \infty,\ \ -\infty < u < \infty,\ \ p = 0,\, 1,\, 2. \tag{3}$$

Функцию $\Phi(y,\,x)$ при $y \neq x$ определим следующим равенством:

$$\Phi(y,\,x) = -\frac{1}{2\pi K(x_2)} \int_0^{\infty} \mathrm{Im} \frac{K(w)}{w - x_2} \frac{u\, I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du. \tag{4}$$

Здесь $I_0(\lambda u) = J_0(i\lambda u)-$функция Бесселя первого рода нулевого порядка [15].

Формула (2) верна, если вместо $-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r)$ подставим функцию

$$\Phi(y,\,x) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda r) + g(y,\,x), \tag{5}$$

где $g_\sigma(y,\,x)-$регулярное решение уравнения Гельмгольца по переменной y, включая и точку $y = x$.

Тогда формула (2) имеет следующий вид

$$U(x) = \int_{\partial G} N(y,\,x)U(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{6}$$

где

$$N(y,\,x) = \left(E\left(\Phi(y,\,x)u^0\right) D^* \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) D(t^T).$$

Формулу (6) обобщим для случая, когда $G-$неограниченная область.

Пусть, $G \subset \mathbb{R}^2-$неограниченная область, с кусочно-гладкой границей ∂G ($\partial G-$простирается до бесконечности).

Обозначим через G_R часть G, лежащую внутри круга радиуса R с центром в нуле:

$$G_R = \{y : y \in G,\ |y| < R\}\,, G_R^{\infty} = G \backslash G_R, R > 0.$$

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in A(G)$, $G-$односвязная неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, с кусочно-гладкой границей ∂G.*

Если при каждом фиксированном $x \in G$ имеет место равенство

$$\lim_{R \to \infty} \int_{G_R^{\infty}} N(y,\,x)U(y)ds_y = 0, \tag{7}$$

то верна формула (6).

Доказательство. Действительно, при фиксированном $x \in G$ $(|x| < R)$ и учитывая (6), имеем

$$\int_{\partial G} N(y,\,x)U(y)ds_y = \int_{\partial G_R} N(y,\,x)U(y)ds_y +$$

$$+ \int_{\partial G_R^{\infty}} N(y,\,x)U(y)ds_y = U(x) + \int_{\partial G_R^{\infty}} N(y,\,x)U(y)ds_y,\ \ x \in G_R.$$

Учитывая условие (7), при $R \to \infty$, получаем (6).

Пусть, неограниченная область G лежит внутри полосы наименьшей ширины, определяемого неравенством

$$0 < y_2 < h,\ h = \frac{\pi}{\rho},\ \ \rho > 0,$$

причем ∂G простирается до бесконечности.

Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ длина ∂G удовлетворяет условию роста

$$\int_{\partial G} \exp\left[-b_0 \,\mathrm{ch}\, \rho_0 \,|y_1|\right] ds_y < \infty, \quad 0 < \rho_0 < \rho. \tag{8}$$

Пусть, $U(y) \in A(G)$ удовлетворяет граничному условию роста

$$|U(y)| \le \exp\left[\exp \rho_2 \left|y_1\right|\right], \quad \rho_2 < \rho,\ y \in G. \tag{9}$$

В равенство (4) положим

$$K(w) = \exp\left[-b \,\mathrm{ch}\, i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \,\mathrm{ch}\, i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right],$$

$$K(x_2) = \exp\left[b \cos \rho_1 \left(x_2 - \tfrac{h}{2}\right) + b_1 \cos i\rho_0 \left(x_2 - \tfrac{h}{2}\right)\right], \tag{10}$$

$$0 < \rho_1 < \rho,\ 0 < x_2 < h,$$

где

$$b = 2a \exp\left(\rho_1 \left|x_1\right|\right), \quad b_1 > \frac{b_0}{\cos\left(\rho_0 \frac{h}{2}\right)},\ a \ge 0,\ b > 0.$$

Тогда верно интегральное представление (6).

При фиксированном $x \in G$ и $y \to \infty$, оценим функцию $\Phi(y, x)$ и ее производные $\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_j}$, $j = 1, 2$. Для оценки $\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_j}$ воспользуемся равенствами

$$-2\pi K(x_2)\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_1} = \tfrac{(y_1 - x_1)\mathrm{Re}\, K(w_0) - sign(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)\mathrm{Im}\, K(w_0)}{r^2} -$$

$$-(y_1 - x_1)\lambda \int_0^\infty \tfrac{\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\mathrm{Re}\, K(w) - (y_2 - x_2)\mathrm{Im}\, K(w)}{u^2 + r^2} \cdot \tfrac{I_1(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad y \ne x, \tag{11}$$

$$w_0 = i\left|y_1 - x_1\right| + y_2,\ I_1(\lambda u) = I_0^{'}(\lambda u)$$

и

$$\begin{gathered} -2\pi K(x_2)\frac{\partial \Phi(y,x)}{\partial y_2} = \tfrac{(y_2 - x_2)\mathrm{Re}\, K(w_0) - (y_1 - x_1)\mathrm{Im}\, K(w_0)}{r^2} - \\ -\lambda \int_0^\infty \tfrac{(y_2 - x_2)\mathrm{Re}\, K(w) - \sqrt{u^2+\alpha^2}\,\mathrm{Im}\, K(w)}{u^2 + r^2} I_1(\lambda u)du, \quad y_1 \ne x_1, \end{gathered} \tag{12}$$

которые получаются из (4).

Действительно,

$$\left|\exp\left[-b \,\mathrm{ch}\, i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \,\mathrm{ch}\, i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right]\right| =$$

$$= \exp Re \left[-b \,\mathrm{ch}\, i\rho_1 \left(w - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \,\mathrm{ch}\, i\rho_0 \left(w - \tfrac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[-b \,\mathrm{ch}\, \rho_1 \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos \rho_1 \left(y_2 - \tfrac{h}{2}\right) - b_1 \,\mathrm{ch}\, \rho_0 \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos \rho_0 \left(y_2 - \tfrac{h}{2}\right)\right].$$

Так как

$$-\tfrac{\pi}{2} \le -\tfrac{\rho_1}{\rho} \cdot \tfrac{\pi}{2} \le \tfrac{\rho_1}{\rho} \cdot \tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{2},$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le -\tfrac{\rho_1}{\rho} \cdot \tfrac{\pi}{2} \le \rho_0 \left(y_2 - \tfrac{h}{2}\right) \le \tfrac{\rho_1}{\rho} \cdot \tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos \rho \left(y_2 - \frac{h}{2}\right) > 0, \cos \rho_0 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right) \ge \cos \frac{h\rho_0}{2} > \delta_0 > 0,$$

не обращается в нуль в области G и

$$|\Phi(y,x)| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y_1|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G,$$

$$\left|\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial y_1}\right| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y_1|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G,$$

$$\left|\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial y_2}\right| = \mathrm{O}\left[\exp\left(-\varepsilon\ \mathrm{ch}\,\rho_1\,|y_1|\right)\right],\ \ \varepsilon>0,\ \ y\to\infty,\ \ y\in G\bigcup\partial G.$$

Выберем теперь ρ_1 с условием $\rho_2<\rho_1<\rho$. Тогда выполняется условие (8) и верна интегральная формула (6). Теорема 1 доказана. □

Условие (10) можно ослабить.

Обозначим через $A_\rho(G)-$класс вектор-функций из $A(G)$, удовлетворяющих следующему условию роста:

$$A_\rho(G)=\left\{U(y):\ U(y)\in A(G),\ \ |U(y)|\le\exp\left[\mathrm{o}\left(\exp\rho\,|y_1|\right)\right],\ y\to\infty,\ y\in G\right\}. \tag{14}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $U(y)\in A_\rho(G)$, удовлетворяет условию роста*

$$|U(y)|\le C\exp\left[a\cos\rho_1\left(y_2-\tfrac{h}{2}\right)\exp\left(\rho_1\,|y_1|\right)\right],$$
$$a\ge0,\ \ 0<\rho_1<\rho,\ y\in\partial G, \tag{15}$$

где $C-$некоторая константа. Тогда справедлива формула (6).

Доказательство. Рассечем область G линией $y_2=\frac{h}{2}$ на две области

$$G_1=\left\{y:\ 0<y_2<\tfrac{h}{2}\right\}\text{ и }G_2=\left\{y:\ \tfrac{h}{2}<y_2<h\right\}.$$

Рассмотрим область G_1. В формуле (4) вместе $K(w)$ поставим $K_1(w)$

$$K_1(w)=K(w)\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,i\tau\left(w-\tfrac{h}{2}\right)-\delta_1\,\mathrm{ch}\,i\rho(w-\tfrac{h}{2})\right],$$
$$\rho<\tau<2\rho,\ \delta>0,\ \delta_1>o, \tag{16}$$

Здесь $K(w)$ определяется из (10). При этих обозначениях верна оценка (8).

Действительно,

$$\left|\exp\left[-\,\mathrm{ch}\,i\tau\left(w-\tfrac{h}{4}\right)-\delta_1\,\mathrm{ch}\,i\rho\left(w-\tfrac{h}{4}\right)\right]\right|=$$

$$=\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}\cos\tau\left(y_2-\tfrac{h}{4}\right)\right]=$$

$$=\exp\left[-\delta\ \mathrm{ch}\,\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}\right]\le\exp\left[-\delta\exp\tau\,|y_1|\right],$$

так как

$$-\tfrac{\pi}{2}\le-\tau\tfrac{\pi}{4}\le\tau\left(y_2-\tfrac{h}{4}\right)\le\tau\tfrac{\pi}{2}<\tfrac{h}{2}\text{ и }\cos\tau\left(y_2-\tfrac{h}{4}\right)\ge\cos\tau\tfrac{h}{4}\ge\delta_0>0.$$

Соответствующую $\Phi(y,x)$ обозначим через $\Phi^+(y,x)$.

Так как

$$\cos\tau\left(y_2-\frac{h}{4}\right)\ge\delta_0,\ y\in G_1\bigcup\partial G_1,$$

то при фиксированных $x \in G_1$, $y \in G_1 \bigcup \partial G_1$, для $\Phi^+(y, x)$ и ее производных верны асимптотические оценки

$$|\Phi^+(y, x)| = \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0 \exp\left(\tau\,|y_1|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi^+(y,x)}{\partial y_1}\right| = \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0 \exp\left(\tau\,|y_1|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi^+(y,x)}{\partial y_2}\right| = \mathrm{O}\left[\exp(-\delta_0 \exp\left(\tau\,|y_1|\right)\right], \quad y \to \infty, \quad \rho < \tau < 2\rho.$$

Пусть $U(y) \in A(G_1)$ в области G_1 удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| \le C \exp\left[\exp\left(2\rho - \varepsilon\right)|y_1|\right], \quad \varepsilon > 0. \tag{17}$$

Выберем τ в (16) из неравенства $2\rho - \varepsilon < \tau < 2\rho$.

Тогда для области G_1 выполняется условие (16), следовательно, верна следующая интегральная формула

$$U(x) = \int_{\partial G_1} N(y,x)U(y)ds_y, \quad x \in G_1. \tag{18}$$

где

$$N(y, x) = \left(E\left(\Phi^+(y, x)u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) D(t^T).$$

Если $U(y) \in A(G_2)$ удовлетворяет в G_2 условию роста (15), то при $2\rho - \varepsilon < \tau < 2\rho$ аналогично получим следующую интегральную формулу

$$U(x) = \int_{\partial G_2} N(y,x)U(y)ds_y, \quad x \in G_2. \tag{19}$$

где

$$N(y, x) = \left(E\left(\Phi^-(y, x)u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) D(t^T).$$

Здесь $\Phi^-(y, x)$ определяется формулой (4), в которой $K(w)$ заменяется функцией $K_2(w)$:

$$K_2(w) = K(w)\exp\left[-\delta\,\mathrm{ch}\,i\tau\,(w - h_1) - \delta_1\,\mathrm{ch}\,i\rho(w - \frac{h}{2})\right], \tag{20}$$

где

$$h_1 = \frac{h}{2} + \frac{h}{4}, \quad \frac{h}{2} < y_2 < h, \quad \frac{h}{2} < x_2 < h_1, \quad \delta > 0, \quad \delta_1 > 0.$$

В полученных при этом формулах интегралы (согласно 9)) равномерно сходятся при $\delta \ge 0$, когда $U(y) \in A_\rho(G)$. Положим в этих формулах $\delta = 0$ и, объединяя полученные формулы, найдем

$$U(x) = \int_{\partial G} N(y, x)U(y)ds_y, \qquad x \in G, \quad x_2 \ne \frac{h}{2}, \tag{21}$$

где

$$N(y, x) = \left(E\left(\tilde{\Phi}(y, x)u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) D(t^T).$$

(интегралы по сечению $y_2 = \frac{h}{2}$ взаимно уничтожаются)

$$\tilde{\Phi}(y, x) = (\Phi^+(y, x))_{\delta=0} = (\Phi^-(y, x))_{\delta=0}.$$

Здесь $\tilde{\Phi}(y, x)$ определяется формулой (4), в которой $K(w)$ определяется из (16), где положено $\delta = 0$. Согласно принципу продолжения, формула (21) верна для $\forall x \in G$. При условии (17) формула (21) верна для $\forall \delta_1 \geq 0$. Полагая $\delta_1 = 0$ получим доказательство теоремы. Теорема 2 доказана. $\square$

В формуле (4), выбирая

$$K(w) = \tfrac{1}{w - x_2 + 3h} \exp(\sigma w^2),$$
$$K(x_2) = \tfrac{1}{3h} \exp(\sigma x_2^2),\ \ 0 < x_2 < h,\ h = \tfrac{\pi}{\rho}, \tag{22}$$

получим

$$\Phi_\sigma(y, x) = -\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi(3h)} \int_0^\infty \mathrm{Im} \frac{\exp(\sigma w^2)}{(w - x_2 + 3h)(w - x_2)} \frac{u\, I_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\, du. \tag{23}$$

Тогда интегральная формула (6) имеет следующий вид:

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(y, x) U(y) ds_y, \qquad x \in G, \tag{24}$$

где

$$N_\sigma(y, x) = \left(E\left(\Phi_\sigma(y, x) u^0\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) D(t^T).$$

Пусть, граница области G состоит из гиперплоскости $y_2 = 0$ и гладкой кривой S, простирающейся до бесконечности и лежащей в полосе

$$0 < y_2 < h,\ \ h = \frac{\pi}{\rho},\ \ \rho > 0.$$

Будем предполагать, что S задана уравнением

$$y_2 = \psi(y_1),\ \ -\infty < y_1 < \infty,$$

где $\psi(y_1)$ удовлетворяет условию

$$|\psi'(y_1)| \leq const < \infty.$$

3. Регуляризация решения задачи

Постановка задачи. Пусть $U(y) \in A_\rho(G)$ и

$$U(y)|_S = f(y),\ \ y \in S. \tag{25}$$

Здесь, $f(y)-$заданная непрерывная вектор-функция на S.

Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G, исходя из её значений $f(y)$ на S.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $U(y) \in A_\rho(G)$ удовлетворяет неравенству*

$$|U(y)| \leq 1,\ \ y \in T. \tag{26}$$

Если

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y, x) U(y) ds_y, \qquad x \in G. \tag{27}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C_\rho(\lambda, x) \sigma\, e^{-\sigma x_2^2},\ \ \sigma > 1,\ \ x \in G. \tag{28}$$

Здесь и ниже функции, ограниченные на компактных подмножествах области G, обозначим через $C_\rho(\lambda, x)$.

Доказательство. Используя интегральную формулу (24) и равенство (27), получим

$$U(x) = U_\sigma(x) + \int_T N_\sigma(y, x)U(y)ds_y, \quad x \in G.$$

Учитывая неравенство (26), оценим следующее

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le \int_T |U(y)|\, |N_\sigma(y, x)|\, ds_y \le \int_T |N_\sigma(y, x)|\, ds_y, \quad x \in G.$$

Для этого оценим интегралы $\int_T |\Phi_\sigma(y, x)|\, ds_y$, $\int_{y_2=0} \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| ds_y$ и $\int_{y_2=0} \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| ds_y$ на части T плоскости $y_2 = 0$.

Пусть $\sigma > o$. Отделяя мнимую часть равенства (23), получим

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}}{2\pi(3h)} \left[\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}(\beta+\beta_1)\cos\sigma\alpha_1}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_1^2+\beta^2)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}(-\alpha_1^2+\beta_1\beta)}{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_1^2+\beta^2)}\frac{\sin\sigma\alpha_1}{\alpha_1}\right) u\, I_0(\lambda u)\, du\right], \tag{29}$$

где

$$\alpha_1^2 = u^2 + \alpha^2, \;\; \beta = y_2 - x_2, \;\; \beta_1 = y_2 - x_2 + 3h.$$

Оценим сначала $\int_{y_2=0} |\Phi_\sigma(y, x)|\, ds_y$. Учитывая равенство (29) и неравенство

$$I_0(\lambda u) \le \exp(\lambda u), \tag{30}$$

имеем

$$\int_{y_2=0} |\Phi_\sigma(y, x)|\, ds_y \le C_\rho(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{31}$$

Для оценки интегралов $\int_{y_2=0} \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}\right| ds_y$ и $\int_{y_2=0} \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2}\right| ds_y$ воспользуемся равенствами (11) и (12). Для этого, используя равенства (22) и выбирая

$$K(w_0) = \frac{1}{w_0 - x_2 + 3h}\exp(\sigma w_0^2), \quad \sigma > 0, \tag{32}$$

получим следующие формулы

$$-2\pi\exp(\sigma x_2^2)\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} = \frac{(y_1-x_1)\mathrm{Re}\,(w_0-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w_0^2}}{r^2} +$$
$$+\frac{sign(y_1-x_1)(y_2-x_2)\mathrm{Im}\,(w_0-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w_0^2}}{r^2} -$$
$$-(y_1-x_1)\lambda\int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2}\mathrm{Re}\,(w-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w^2} - (y_2-x_2)\mathrm{Im}\,(w-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w^2}}{u^2+r^2}\cdot\frac{I_1(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$
$$y \ne x, \tag{33}$$

и

$$-\frac{2\pi}{3h}e^{\sigma x_2^2}\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} = \frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,(w_0-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w_0^2} + (y_1-x_1)\mathrm{Im}\,(w_0-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w_0^2}}{r^2} -$$
$$-\lambda\int_0^\infty \frac{(y_2-x_2)\mathrm{Re}\,(w-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w^2} - \sqrt{u^2+\alpha^2}\,\mathrm{Im}\,(w-x_2+3h)^{-1}e^{\sigma w^2}}{u^2+r^2} I_1(\lambda u)du, \quad y_1 \ne x_1. \tag{34}$$

Учитывая равенство (33) и неравенство

$$I_1(\lambda u) \le \lambda u \exp(\lambda u), \tag{35}$$

получим

$$\int_{y_2=0} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} \right| ds_y \le C_\rho(\lambda, x) \sigma\, e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{36}$$

Аналогично, учитывая равенство (34) и неравенство (36) оценим следующий интеграл

$$\int_{y_2=0} \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y \le C_\rho(\lambda, x) \sigma\, e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{37}$$

Из неравенств (31), (36) и (37), получим (28). Теорема 3 доказана. □

Следствие 1. *Предельное равенство*

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Теорема 4. *Пусть* $U(y) \in A_\rho(G)$ *удовлетворяет на части плоскости* $y_2 = 0$ *условию (26), а на гладкой кривой* S *неравенству*

$$|U(y)| \le \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{38}$$

Тогда верна оценка

$$|U(x)| \le C_\rho(\lambda, x) \sigma \delta^{\frac{x_2^2}{h^2}}, \;\; \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{39}$$

Доказательство. Используя интегральную формулу (24), имеем

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y =$$

$$= \int_S N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y + \int_T N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y, \quad x \in G.$$

Учитывая, граничное условие (26) и неравенство (38), получим оценку

$$\begin{aligned} |U(x)| &\le \int_S |U(y)|\, |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y + \int_T |U(y)|\, |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le \\ &\le \delta \int_S |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y + \int_T |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y, \quad x \in G. \end{aligned} \tag{40}$$

Сначала оценим, первый интеграл неравенства (40). Для этого оценим интегралы $\delta \int_S |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y$, $\delta \int_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} \right| ds_y$ и $\delta \int_S \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y$ на гладкой кривой S.

Учитывая равенство (29) и неравенство (30), имеем

$$\delta \int_S |\Phi_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(\lambda, x) \sigma \delta\, e^{\sigma(h^2 - x_2^2)}, \quad \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{41}$$

Используя равенство (33) и неравенство (35), имеем

$$\delta \int_S \left| \frac{\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_1} \right| ds_y \le C_\rho(\lambda, x) \sigma \delta\, e^{\sigma(h^2 - x_2^2)}, \;\; \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{42}$$

Аналогично используя равенство (34) и неравенство (35), получим

$$\delta \int_S \left| \frac{\Phi_\sigma(y,\, x)}{\partial y_2} \right| ds_y \le C_\rho(\lambda, x) \sigma \delta\, e^{\sigma(h^2 - x_2^2)}, \;\; \sigma > 1, \;\; x \in G. \tag{43}$$

Из (41)-(43), получим

$$\delta \int_S |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(\lambda, x)\sigma\delta\, e^{\sigma(h^2 - x_2^2)}, \ \ \sigma > 1, \ \ x \in G. \tag{44}$$

Известно следующее

$$\int_T |N_\sigma(y,\, x)|\, ds_y \le C_\rho(\lambda, x)\sigma\, e^{-\sigma x_2^2}, \ \ \sigma > 1, \ \ x \in G. \tag{45}$$

Теперь учитывая (44)-(45), имеем

$$|U(x)| \le \frac{C_\rho(\lambda, x)\sigma}{2}(\delta\, e^{\sigma h^2} + 1)e^{-\sigma x_2^2}, \ \ \sigma > 1, \ \ x \in G.$$

Выбирая σ из равенства

$$\sigma = \frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\delta}, \tag{46}$$

получим неравенство (39). Теорема 4 доказана. □

Пусть $U(y) \in A_\rho(G)$ и вместе с $U(y)$ на S задано ее непрерывные приближение $f_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0 < \delta < 1$,

$$\max_S |U(y) - f_\delta(y)| \le \delta, \tag{47}$$

Положим

$$U_{\sigma(\delta)}(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x) f_\delta(y) ds_y, \ \ x \in G. \tag{48}$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $U(y) \in A_\rho(G)$ удовлетворяет на части плоскости $y_2 = 0$ условию (26).*

Тогда справедлива оценка

$$\left|U(x) - U_{\sigma(\delta)}(x)\right| \le C_\rho(\lambda, x)\sigma\delta^{\,\frac{x_2^2}{h^2}}, \ \ \ \sigma > 1, \ \ \ x \in G. \tag{49}$$

Доказательство. Из интегральной формулы (24) и (48), имеем

$$U(x) - U_{\sigma(\delta)}(x) = \textstyle\int_S N_\sigma(y,\, x)\,\{\, U(y) - f_\delta(y)\}\, ds_y +$$

$$+ \textstyle\int_T N_\sigma(y,\, x) U(y) ds_y, \ \ x \in G.$$

Теперь, повторяя доказательства теорем 1 и 2, получим

$$\left|U(x) - U_{\sigma(\delta)}(x)\right| \le \frac{C_\rho(\lambda, x)\sigma}{2}(\delta\, e^{\sigma h^2} + 1)e^{-\sigma x_2^2}, \ \ \ \sigma > 1, \ \ x \in G.$$

Отсюда, выбирая σ из равенства (46), получим (48). Теорема 5 доказана. □

Следствие 2. *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Следовательно, в работе построен семейство вектор-функций $U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x,\, f_\delta)$ зависящих от параметра σ, и доказана, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma(\delta)}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G$. Таким образом, функционал $U_{\sigma(\delta)}(x)$ назовем регуляризацией решения задачи (1), (25).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за полезные советы.

References

[1] N.N. Tarkhanov, *Ob integralnom predstavlenii resheniy sistem lineynykh differensialnyx uravneniy 1-go poryadka v chastnykh proizvodnykh i nekotoryx yego prilojeniyakh*, Nekotorye voprosy mnogomernogo kompleksnogo analiza, Institut fiziki AN SSSR, Krasnoyarsk, 1980, 147–160. MR0616307

[2] N.N. Tarkhanov, *O matritse Karlemana dlya ellipticheskikh sistem*, DAN SSSR., **284**:2 (1985), 294–297. MR0806452

[3] N.N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Akad. Verl., Berlin, **7**, 1995. MR1334094

[4] Carleman T. *Les fonctions quasi analytiques*, Gautier-Villars et Cie, Paris, 1926. JFM 52.0255.02

[5] M.M. Lavrent'ev, *O zadache Koshi dlya lineynykh ellipticheskikh uravneniy*, DAN SSSR. **112**:2 (1957), 195–197. Zbl 0077.30001

[6] M.M. Lavrent'ev, *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki*, Novosibirsk: Nauka, 1962. Zbl 0114.29703

[7] Sh.Yarmukhamedov, *O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa*, DAN SSSR, **235**:2 (1977), 281–283. MR0448934

[8] Sh. Yarmukhamedov, *Funksiya Karlemana i zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa*, Sib. mat. Zhurnal, **45**:3 (2004), 702–719. MR2078727

[9] J. Adamar, *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniyami s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa*, Moskva: Nauka, 1978. MR0507724

[10] V.K. Ivanov, *Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa v beskonechnoy polose*, Differents. uravneniya, **45**:3 (1965), 131–136. MR0196251

[11] G.M. Goluzin, V.M. Krylov, *Obobshennaya formula Karlemana i yeyo prilozheniye k analiticheskomu prodolzheniyu funksiy*, Mat. sb., **40**:2 (1993), 144–149.

[12] L.A. Ayzenberg, *Formuly Karlemana v kompleksnom analize*, Novosibirsk: Nauka, 1990. MR1089612

[13] A.N. Tikhonov, *O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii*, Dokl. AN SSSR, **151**:3 (1963), 501–504. MR0162377

[14] A. Bers, F. Dzhon, M. Shekhter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, Moskva: Mir, 1966. MR0208121

[15] M.A. Aleksidze, *Fundamentalnye funksii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach*, Moskva: Nauka, 1991. MR1154556

[16] E.V. Arbuzov, A.L. Bukhgeym, *Formula Karlemana dlya uravneniya Gelmgoltsa*, Sib. mat. Zhurnal, **47**:3 (2006), 518–526. MR2249164

[17] O.I. Makhmudov, I.E. Niyozov, *O zadache Koshi dlya mnogomernoy sistemy uravneniy Lame*, Izv. vuzov. Matem., **50**:4 (2006), 41–50. MR2241417

[18] I.E. Niyozov, O.I. Makhmudov, *Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy momentnoy teorii uprugosti v* $\mathbb{R}^m$, Izv. vuzov. Matem., **58**:2 (2014), 30–37. MR3254457

[19] D.A. Juraev, *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa*, II Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya studentov i aspirantov "Matematika i yeyo prilozheniya v sovremennoy nauke i praktike Kursk, (2012), 33–38.

[20] D.A. Juraev, *Integralnaya formula dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa v ogranichennoy oblasti*, "Aktualnye problemy mexaniki, matematiki, informatiki-2012 Mezhdunarodnaya konferentsiya posvyashyennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya professorov S.N. Chernikova, I.F. Vereshagina, L.I. Volkovysskogo. Perm, (2012), 43.

[21] D.A. Juraev, *Konstruktsiya fundamentalnogo resheniya uravneniya Gelmgoltsa*, Doklady Akademii nauk Respubliki Uzbekistan, **4** (2012), 14–17.

[22] D.A. Juraev, *Regulyarizatsiya zadachi Koshi dlya sistem uravneniy ellipticheskogo tipa pervogo poryadka*, Uzbekskiy Matematicheskiy zhurnal. **2** (2016), 61–71. MR3753511

[23] D.A. Juraev, *Zadacha Koshi dlya matrichnykh faktorizatsiy uravneniya Gelmgoltsa v neogranichennoy oblasti*, Sib. Elektron. Matem. Izv., **14** (2017), 752–764. MR3693751

[24] D.A. Juraev, *Zadacha Koshi dlya matrichnykh faktorizatsiy uravneniya Gelmgoltsa*, Ukr. Mat. Zhur. **69**:10 (2017), 1364–1371.

Davron Aslonqulovich Juraev
Karshi State University,
Karshi city, Kuchabog-17,
180100, Republic of Uzbekistan, Kashkadarya region
E-mail address: juraev_davron@list.ru