S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 198–204 (2018) УДК 519.17

DOI 10.17377/semi.2018.15.019 MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$

М.М. ИСАКОВА, А.А. МАХНЕВ

Abstract. We study automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$. It is proved that a vertex-transitive distance-regular graph with intersection array $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ has solvable automorphism group.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $b_0 = k$

Isakova, M.M., Makhnev, A.A., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

Работа выполнена при поддержке г/б проекта 18-1-1-17.

Поступила 10 января 2017 г., опубликована 13 марта 2018 г.

— это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 2 называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), где $\lambda = a_1, \mu = c_2$.

Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то по предложению 4.2.17 из [1] граф Γ_3 сильно регулярен. Если кроме того граф Γ_2 — сильно регулярный граф, Γ_3 не содержит треугольников и число вершин v не больше 800, то Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ или $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$. В последнем случае Γ_3 – граф с параметрами (800,85,0,10) и $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (800,204,28,60). Ранее в [2] были найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

В работе найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ и спектром $119^1, 19^{119}, -1^{595}, -21^{85}$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 100s$, $\alpha_2(g) = 200t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40s$ и $\alpha_2(g) = 80t$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 17$, $\alpha_3(g) = 85$ и $\alpha_2(g) = 595$, либо $n = p = 5$, $\alpha_3(g) = 100m - 75$ и $\alpha_2 g) = 200l - 25$;*

(3) *Ω не является m-кокликой, $m \geq 2$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$. Если группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, то G разрешима.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(800, 85, 0, 10)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 100s$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40t$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 85, 425$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 140l + 70$, $l \leq 3$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $p = 5$, $m = 5, 10, ..., 120$ и $\alpha_1(g) = 100l + 5m$;*

(4) *Ω является объединением l изолированных ребер, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20l + 40s$;*

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 7$.*

Следствие 2. *Пусть Γ — сильно регулярным графом с параметрами $(800, 85, 0, 10)$. Если неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, то для цоколя $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *если $|G|$ не делится на 7 и 17, то группа $\bar{T}$ изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$;*

(2) *если $|G|$ не делится на 5 и 17, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$;*

(3) *если* $|G|$ *делится на* $5,7$, *но не делится на* 17, *то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $A_7, L_2(49), L_3(4), U_3(5), A_8, A_9, A_{10}, J_2, U_4(3), Sp_6(2), Sp_4(7), \Omega_8^+(2)$;

(4) *если* $|G|$ *делится на* 17, *то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(16), L_2(17), Sp_4(4), \Omega_8^-(2), L_4(4), Sp_8(2), He$.

Возможный вариант для построения графа: G — расширение 2-группы Q с помощью $\mathrm{Aut}(J_2)$, $|Q : Q_a| = 4$ и G_a — расширение 2-группы Q_a с помощью $U_3(3)$.

1. Автоморфизмы графа с параметрами $(800, 85, 0, 10)$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. *[3, теорема 3.2] Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* $k, r, -m$. *Если* g — *автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega| \le v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.

Пусть g — неединичный автоморфизм сильно регулярного графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Γ имеет параметры $(800, 85, 0, 10)$ и второе собственное значение 5, то ввиду леммы 1 имеем $|\Omega| \le 100$.

В леммах 2–4 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(800, 85, 0, 10)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $85^1, 5^{595}, -15^{204}$. Тогда порядок коклики в Γ не больше 120. Следующая лемма использует метод Хигмена [4, глава 3].

Лемма 2. *Если* φ_2 — *характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* 204, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\varphi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 4$ *и* $\varphi_2(g) - 204$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 595 & 35 & -5 \\ 204 & -36 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_2(g) = (51\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/200$. Подставляя $\alpha_2(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5]. □

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 100s$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 40t$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$, $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 85, 425$, *либо* $n = 2$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 140l + 70$, $l \le 3$;

(3) *если* Ω *является* m*-кокликой, то* $p = 5$, $m = 5, 10, ..., 120$, *и* $\alpha_1(g) = 100l + 5m$;

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 2$, Ω *является объединением* l *изолированных ребер и* $\alpha_1(g) = 20l + 40s$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 800$, то $p = 2, 5$.

Если $p = 5$, то число $\varphi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 4$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 100s$.

Если $p = 2$, то число $\varphi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 40t$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 86 и 714, поэтому $p = 17$. Теперь $\varphi_2(g) = (5 - \alpha_1(g))/20 + 4$ и $\alpha_1(g) = 85, 425$.

Если $n = 2$, a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит по 84 вершины из $[a] - \{b\}$, $[b] - \{a\}$ и 630 вершин вне $[a] \cup [b]$, поэтому p делит 84 и 345, $p = 3, 7$. В случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\varphi_2(g) = 10/24 + 4$, противоречие. В случае $p = 7$ число $\varphi_2(g) = (90 - \alpha_1(g))/20$ сравнимо с 1 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 140l + 70$, $l \le 3$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \ge 2$. Если a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит 10 вершин из $[a] \cap [b]$, по 75 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и $640 - m$ вершин вне $a^\perp \cup b^\perp$, поэтому p делит 10, 75 и $640 - m$. Отсюда $p = 5$. Далее, $\varphi_2(g) = (5m - \alpha_1(g))/20 + 4$ и $\alpha_1(g) = 100l + 5m$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Если a, b — две вершины из Ω, то p делит 10, если a, b не смежны и делит 84, если a, b смежны. Поэтому $p = 2$, Ω является объединением l изолированных ребер и число $\varphi_2(g) = (20l - \alpha_1(g))/20 + 4$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 20l + 40s$. $\square$

Лемма 4. *Если Ω содержит геодезический 2-путь, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$p \le 7$ и в случае $p = 3$ имеем $|\Omega| = 12m + 8$, $m \le 7$;*

(2) *для любой вершины a подграф $[a]$ не содержится в Ω.*

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p > 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 0, 10)$, Ω имеет неглавные собственные значения r, $-(10+r)$ и $k' = 10(r+1)+r^2$, причем 10 делит $r^2(r^2-1)$. Если $r = 1$, то Ω имеет параметры $(64, 21, 0, 10)$, противоречие, а если $r = 4$, то Ω имеет параметры $(530, 66, 0, 10)$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \le 100$.

Пусть $p = 3$ и $|\Omega| = 3l + 2$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$, $\varphi_2(g) = ((3l + 2) + 16)/4$ и $l = 4m + 2$, $m \le 7$.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 10 вершинами из Ω. Поэтому $\Omega = a^\perp$, $\alpha_1(g) = 0$, $\varphi_2(g) = \alpha_0(g)/4 + 4 = 86/4 + 4$, противоречие.

Из лемм 3–4 следует теорема 2.

Докажем следствие 2. Пусть Γ — сильно регулярным графом с параметрами $(800, 85, 0, 10)$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По теореме 2 имеем $\pi(G) \subseteq 2, 3, 5, 7, 17\}$, причем $|G|$ не делится на 289. $\square$

Лемма 5. *Пусть f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка p из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Ω содержит геодезический 2-путь, $|\Omega| = 17s + 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 5$, $s = 2$ и $\alpha_1(g) = 255$;*

(2) *$p = 2$, $s = 1, 3, 5$, $\alpha_1(g) = 40r + 85(s + 1)$ и либо $r = 0$, либо $r = 17, s = 1$.*

Доказательство. Пусть $|f| = 17$. По теореме 2 $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ и $\alpha_1(f) = 85, 425$.

Далее, либо Ω является m-кокликой, $p = 5$, $m - 1$ делится на 17, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 100l + 5m$, либо Ω содержит геодезический 2-путь и $p \le 7$.

В первом случае $m = 35$ и $\alpha_1(g) = 100l + 5m$ делится на 17. Отсюда $5 - 2l$ делится на 17, противоречие. Во втором случае $|\Omega| = 17s + 1$, $s \le 5$. Если $p = 7$, то $799 - 17s$ делится на 7 и $s = 5$. Далее, $\varphi_2(g) = (510 - \alpha_1(g))/20$ и $\alpha_1(g) = 20r + 510$ делится на $7 \cdot 17$, противоречие.

Если $p = 5$, то $799 - 17s$ делится на 5 и $s = 2$. Далее, $\varphi_2(g) = (255 - \alpha_1(g))/20$ и $\alpha_1(g) = 20r + 255$ делится на 17. Отсюда $r = 0$.

Если $p = 3$, то $799 - 17s$ делится на 3 и $s = 2$. Далее, $\alpha_1(g) = 0$, $\varphi_2(g) = 17(s+1)/4$, противоречие.

Если $p = 2$, то число $799 - 17s$ нечетно и $s = 1, 3, 5$. Далее, число $\varphi_2(g) = (85(s+1) - \alpha_1(g))/20$ четно и $\alpha_1(g) = 40r + 85(s+1)$ делится на 17. Отсюда либо $r = 0$, либо $r = 17, s = 1$. □

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $S(G)$ *является* $\{2,5\}$*-группой;*

(2) *если* $|G|$ *не делится на* 7 *и* 17*, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $A_5, A_6, PSp_4(3)$*;*

(3) *если* $|G|$ *не делится на* 5 *и* 17*, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$*;*

(4) *если* $|G|$ *делится на* $5, 7$*, но не делится на* 17*, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $A_7, L_2(49), L_3(4), U_3(5), A_8, A_9, A_{10}, J_2, U_4(3), Sp_6(2), Sp_4(7), \Omega_8^+(2)$*;*

(5) *если* $|G|$ *делится на* 17*, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(16), L_2(17), Sp_4(4), \Omega_8^-(2), L_4(4), Sp_8(2), He$*.*

Доказательство. Имеем $v = 800$, поэтому $S(G)$ является $\{2,5\}$-группой.

Пусть $|G|$ не делится на 7 и 17. Тогда группа $\bar{T}$ изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$.

Пусть $|G|$ не делится на 5 и 17. Тогда группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$.

Пусть $|G|$ делится на $5, 7$, но не делится на 17. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $A_7, L_2(49), L_3(4), U_3(5), A_8, A_9, A_{10}, J_2, U_4(3), Sp_6(2), Sp_4(7), \Omega_8^+(2)$.

Пусть $|G|$ делится на 17. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16), L_2(17), Sp_4(4), \Omega_8^-(2), L_4(4), Sp_8(2), He$. □

Лемма 6 влечет следствие 2.

2. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $119^1, 19^{119}, -1^{595}, -21^{85}$ и $v = 1 + 119 + 595 + 85 = 800$. Порядок клики в Γ не больше $1 + 100/21$ и порядок коклики в Γ не больше 138.

Лемма 7. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$*. Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p^1_{11} = 18$, $p^1_{12} = 100$, $p^1_{22} = 420$, $p^1_{23} = 75$, $p^1_{33} = 10$*;*

(2) $p^2_{11} = 20$, $p^2_{12} = 84$, $p^2_{13} = 15$, $p^2_{22} = 450$, $p^2_{23} = 60$, $p^2_{33} = 10$*;*

(3) $p^3_{12} = 105$, $p^3_{13} = 14$, $p^3_{22} = 420$, $p^3_{23} = 70$, $p^3_{33} = 0$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 8. *Пусть* χ_2 *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* 595*,* χ_3 *— характер проекции на подпространство размерности* 85*. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l*, взаимно простого с* $|g|$*,* $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/20 + 35$*,* $\chi_3(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/40 - 15$ *и* $\chi_2(g) - 595$*,* $\chi_3(g) - 85$ *делятся на* p*.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 119 & 19 & -1 & -21 \\ 595 & -5 & -5 & 35 \\ 85 & -15 & 5 & -15 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (119\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 7\alpha_3(g))/160$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/20 + 35$.

Далее, $\chi_3(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 3\alpha_3(g))/160$. Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_3(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/40 - 15$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5]. $\square$

Лемма 9. *Выполняется одно из утверждений:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 100s$, $\alpha_2(g) = 200t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 40s$ и $\alpha_2(g) = 80t$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 17$, $\alpha_3(g) = 85$ и $\alpha_2(g) = 595$, либо $n = p = 5$, $\alpha_3(g) = 100m - 75$ и $\alpha_2 g) = 200l - 25$;*

(3) *Ω не является m-кокликой, $m \geq 2$.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $p = 2, 5$. В случае $p = 5$, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/20 + 35$ делится на 5, поэтому $\alpha_3(g) = 100s$, число $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/40 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 200t$.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/20 - 35$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 40s$, число $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/40 - 15$ нечетно и $\alpha_2(g) = 80t$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 119 и 85, поэтому $p = 17$, $\chi_2(g) = (15 + \alpha_3(g))/20 + 35$, $\alpha_3(g) = 85l$ и $3 + 17l$ делится на 4. Далее, $\chi_3(g) = (5 + \alpha_2(g))/40 - 15$, $\alpha_2(g) = 85m$ и $1 + 17m$ делится на 8. Отсюда $\alpha_3(g) = 85$ и $\alpha_2(g) = 595$.

Если $n > 1$, то p делит $20 - n$, $120 - n$ и 85, поэтому $p = 5$ и $n = 5$. В этом случае число $\chi_2(g) = (75 + \alpha_3(g))/20 + 35$ делится на 5 и $\alpha_3(g) = 100m - 75$. Далее, число $\chi_3(g) = (25 + \alpha_2(g))/40 - 15$ делится на 5 и $\alpha_2 g) = 200l - 25$.

Пусть Ω является m-кокликой. Если Ω содержит две вершины на расстоянии 2, то p делит 20 и 119, противоречие. Значит, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3 и p делит 119. Ввиду теоремы 2 имеем $m = 2$, $p = 7$, число $\chi_2(g) = (30 + \alpha_3(g))/20 + 35$ делится на 7, противоречие. $\square$

Лемма 10. *Число p не равно* 3.

Доказательство. В случае $p = 3$ ввиду теоремы 2 имеем $|\Omega| = 12m + 8$, $m \leq 7$ и $\alpha_3(g) = 0$. Далее, число $\chi_2(g) = 15(12m + 8)/20 + 35 = 9m + 41$ сравнимо с 1 по модулю 3, противоречие. $\square$

Из теоремы 2 и леммы 9 следует, что $\pi(G) \subseteq \{2, 5, 7, 17\}$. Теорема 1 доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 800$.

Пусть G — неразрешимая группа и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой.

Далее, по теореме 1 G является $3'$-группой, поэтому $\bar{T}$ имеет компоненту, изоморфную группе $Sz(q)$. Противоречие с тем, что $\pi(Sz(q))$ не содержится в $\{2, 5, 7, 17\}$. Следствие 1 доказано.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[2] A. A. Makhnev, M.S. Nirova, *On automorphisms of graph with intersection array* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, Trudy IMM UrO RAN, **23** (2017), 182–190.

[3] M. Behbahani, C. Lam *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311** (2011), 132–144. Zbl 1225.05248

[4] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts № 45, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. MR1721031

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **3** (2010), 439–442. MR2766516

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Mariana Malilovna Isakova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: isakova2206@mail.ru