S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 21–28 (2018) УДК 512.542

DOI 10.17377/semi.2018.15.003 MSC 20D06, 20D15

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПАР НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В НЕБОЛЬШИХ ГРУППАХ

В. И. ЗЕНКОВ

Abstract. In the paper we prove that if G is a finite almost simple group with socle isomorphic to $G_2(3)$, $G_2(4)$, $F_4(2)$, ${}^2E_6(2)$, $Sz(8)$, then for every nilpotent subgroups A, B of G there exists an element $g \in G$ such that $A \cap B^g = 1$, except the case $G = Aut(F_4(2))$, and A, B are 2-groups.

Keywords: finite group, simple group, nilpotent subgroup, intersection of subgroups.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Обозначим через $M_G(A,B)$ (соответственно $m_G(A,B)$) — множество минимальных по включению (соответственно по порядку) пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$. Положим $Min_G(A,B) = \langle M_G(A,B)\rangle$ и $min_G(A,B) = \langle m_G(A,B)\rangle$. По определению

$min_G(A,B) \leq Min_G(A,B)$.

Это неравенство может быть строгим, например, в группе $G = S_4$ (это доказано в [14, Примеры]).

В случае произвольной конечной группы G и абелевых подгрупп A и B из G согласно [1, теорема 1] справедливо неравенство $\mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

Если G — простая неабелева группа, то, согласно [2, теорема 1], для любых ее примарных подгрупп A и B из G справедливо равенство $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

В данной работе доказана следующая теорема:

Zenkov, V.I., On intersection two nilpotent subgroups in small groups.

© 2018 Зенков В.И.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Поступила 31 июля 2017 г., опубликована 18 января 2018 г.

Теорема 1. *Пусть* $K = G_2(3),\ G_2(4),\ F_4(2),\ {}^2E_6(2),\ Sz(8)$, $\mathrm{Inn}(K) \le G \le \mathrm{Aut}(K)$, *$A$ и B — нильпотентные подгруппы из G и* $\min_G(A,B) \ne 1$. *Тогда* $G = \mathrm{Aut}(F_4(2))$, *где подгруппы A и B являются 2-группами.*

Отметим, что из данной теоремы для любой группы G с $Soc(G) = K$, где K из теоремы 1 следует положительный ответ на вопросы 15.40 и 17.40 из [4]. Для простой группы это следует из леммы 1.3, а для почти простой группы из [11, теорема $B(2)$].

1. Обозначения и предварительные сведения

Обозначения, в основном, общепринятые(см., например, [6] и [8, 1.4]).

Лемма 1.1 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда $Min_G(A,B) \le F(G)$.*

Лемма 1.2 [9, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа из G, B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $Min_G(A,B) \le F(G)$.*

Лемма 1.3 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

Лемма 1.4 [10, следствие из теоремы B]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и* $\min_G(A,B) \ne 1$. *Тогда A и B — 2-подгруппы и либо $q = 9$, либо q — простое число Мерсенна.*

Лемма 1.5 [11, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа, M — p-локальная подгруппа из G, такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2, такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2, такие, что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$ и $P_1 \ge Q_1$, а $P_2 \ge Q_2$.*

Лемма 1.6 [7, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_1 \trianglerighteq G_2$, и $G_2 \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\bar{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \bigcap \overline{(G_1 \bigcap B^g)}^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \bigcap B^{g g_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса $g_1 G_2$.*

Лемма 1.7 [7, теорема]. *Пусть G — симметричная группа S_n или знакопеременные A_n, $n \ge 5$ и A, B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда* $\min_G(A,B) = 1$ *или $n = 8$, $G \simeq S_8$, A и B — 2-подгруппы.*

Лемма 1.8 [3, теоремы 1 и 2] [7, теоремы 1 и 2] *Пусть K — группа из множества $(S_{kz}) \cup \{S_{12}\}$,* $\mathrm{Inn}(K) \le G \le \mathrm{Aut}(K)$, *$A$ и B — нильпотентные подгруппы из G и* $\mathrm{Min}_G(A,B) \ne 1$. *Тогда либо*

(1) $\pi(A) = \pi(B) = \{3\}$, $K \simeq \Omega_8^+(3)$, $G \simeq \Omega_8^+(3).3$ *или* $G \simeq \Omega_8^+(3)S_3$, *где в обоих случаях* $\Omega_8^+(3)$ *расширяется с помощью графовых автоморфизмов, либо*

(2) $\pi(A) = \pi(B) = \{2\}$, $G \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$, $\mathrm{Aut}(L_3(2))$, $\mathrm{Aut}(L_4(2))$, $L_3(4).2$ *или* $L_3(4).2^2$, *где в каждом случае одна из инволюций вне* $L_3(4).2$ *индуцирует на* $L_3(4)$ *графовый автоморфизм,* $\Omega_8^+(2).2$, *где некоторая инволюция вне* $\Omega_8^+(2)$ *индуцирует на* $\Omega_8^+(2)$ *графовый автоморфизм.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть тройка (G, A, B) — контрпример к теореме 1, в котором нильпотентные подгруппы A и B в группе G выбраны так, что число $|A||B|$ минимально.

Заметим, что нильпотентность A и B влечет, что $\pi(A) = \pi(Z(A))$. Следовательно, $A \leq C_G(a)$ для любого элемента a простого порядка из $Z(A)$.

Лемма 2.1 *Имеем* $\pi(A) = \pi(B)$.

Доказательство. Допустим, что $\pi(A) \neq \pi(B)$. Тогда, без ограничения общности, найдется $p \in \pi(A) \backslash \pi(B)$. Так как в этом случае

$$\min_G(A, B) = \min_G(A_1, B) \neq 1$$

для $A_1 < A$, $|A : A_1| = p$ и $|A_1| < |A|$, то выбор тройки (G, A, B) влечет, что $G = \mathrm{Aut}(F_4(2))$, а A_1 и B являются 2-группами. Поскольку G — контрпример к теореме, то $p > 2$. Так как $\min_G(A, B) \neq 1$ и B — 2-группа, то $\min_G(O_2(A), B) \neq 1$. Но, согласно [6, с. 170], в разности $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ содержится инволюция t и $C_G(t) = \langle t \rangle \times K$, где $K \simeq {}^2F_4(2)$. Так как K — группа характеристики два, то в K найдется пара силовских 2-подгрупп с единичным пересечением. По лемме 1.5 имеем $S \cap S^x = \langle t \rangle$ для некоторого x из G. Поскольку $S \cap S^x \geq O_2(A) \cap B^y$ для некоторого y из G и $O_2(A) \cap B^y \neq 1$ в силу $\min_G(O_2(A), B) \neq 1$, то из $2 = |S \cap S^x| \geq |O_2(A) \cap B^g| \neq 1$ следует, что $D = S \cap S^x \in m_G(S, S)$ и $D \leq O_2(A)$. Поэтому для любого $D_1 \in m_G(S, S)$ имеем $|D_1| = 2$ и, по определению, $D_1 \in m_G(O_2(A), B)$. Значит, $\min_G(S, S) \leq O_2(A)$. Однако, согласно [12, лемма 6] $\min_G(S, S) \geq O_2(P)$ для некоторой параболической подгруппы P из $\mathrm{Soc}(G)$. В силу нильпотентности A имеем $[O_2(A), O(A)] = 1$. Но тогда и $[O_2(P), O(A)] = 1$. Противоречие с тем, что $C_{\mathrm{Soc}(G)}(O_2(P)) \leq O_2(P)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2 *Подгруппы A и B не являются циклическими и* $|\pi(A)| = |\pi(B)| > 1$.

Доказательство. Если хотя бы одна из подгрупп A или B — циклическая, то по лемме 1.2 G не контрпример.

По лемме 2.1 $\pi(A) = \pi(B)$.

Если $|\pi(A)| = |\pi(B)| = 1$, то, согласно [11, теорема $B(2)$], подгруппы A и B являются 2-группами и G — не контрпример к теореме. Лемма доказана.

Лемма 2.3 *Каждая силовская подгруппа P из A (соответственно, из B) совпадает с* $\Omega(P)$.

Доказательство. По условию $\min_G(A, B) \neq 1$. Но тогда и $\min_G(O_{p'}(A)\Omega(P), B) \neq 1$. И если $P \neq \Omega(P)$, то $|O_{p'}(A)\Omega(P)| < |A|$. Выбор числа $|A||B|$ влечет, что A и B — 2-подгруппы из $G = \mathrm{Aut}(F_4(2))$, что невозможно по лемме 2.2. Поэтому G не контрпример к теореме. Лемма доказана.

Лемма 2.4 *Хотя бы одна из подгрупп A или B неабелева и силовская 2-подгруппа из A не является кватернионной.*

Доказательство. Если A и B — абелевы подгруппы, то по лемме 1.1 мы имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$; противоречие с тем, что $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$. Если силовская 2-подгруппа из A является кватернионной, то это противоречит лемме 2.3. Лемма доказана.

Лемма 2.5 $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq G_2(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq G_2(3)$. Согласно [6, с. 60], имеем $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$ и $|\mathrm{Out}(G_2(3))| = 2$. Кроме того, $C_G(y)$ — абелева подгруппа для элемента y порядка 7 или 13 из G. Поэтому в случае $\pi(A) \bigcap \{7, 13\} \neq \emptyset$ подгруппа A — абелева, в силу того, что $A \leq C_G(y)$. Это противоречит лемме 2.4. Значит, по леммам 2.1–2.3 подгруппы A и B являются $\{2, 3\}$-группами, в которых $6 \Big| |Z(A)|$ и $6 \Big| |Z(B)|$. Пусть i — инволюция из $Z(A)$.

Если $i \notin \mathrm{Soc}(G)$, то по [6, с. 60–61] $C_G(i) = \langle i \rangle \times G_1$, где $G_1 \simeq \mathrm{Aut}(L_2(8))$. Тогда для $C = C_G(i)$ в $\overline{C} = C/_{\langle i \rangle}$ по лемме 1.4 имеем $\mathrm{min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = C \cap B^g$ и $B^g \cap \langle i \rangle = 1$. По лемме 1.6 $\mathrm{min}_G(A, B) = 1$, что противоречит тому, что $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$. Если $i \in \mathrm{Soc}(G)$, то, согласно [6, с. 60] имеем $K_1 \leq C_G(i) \leq K_2$, где K_1 имеет вид $2^{1+4} : 3^2 : 2$ и K_2 имеет вид $2^{1+4} : (S_3 \times S_3)$.

Следовательно, силовская 3-подгруппа из $A \leq C_G(i)$ — элементарная абелева и точно действует на $T = O_2(C_G(i))$. В частности, по лемме 1.1 $O_3(A) \cap (O_3(A))^t = 1$ для некоторого $t \in T$. С другой стороны, в подгруппе $R = TA$ согласно [11, теорема B] имеем $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$. Тогда для $B_1 = R \cap B^g$, без ограничения общности, имеем $B_1 \leq O_3(A)$. Но тогда $A \cap B_1^t \leq O_3(A) \cap (O_3(A))^t = 1$. Поэтому $A \cap B_1^t = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap B^{gt}$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.6 $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq G_2(4)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq G_2(4)$. Согласно [6, с. 87] $C_G(y)$ — циклическая подгруппа для тех y, для которых $|y| = 7,\ 15,\ 13,\ 21$. Так как $A \leq C_G(y)$, то из леммы 2.4 следует, что A — $\{2, 3\}$-группа, а $6 \Big| |Z(A)|$ и $6 \Big| |Z(B)|$. По [6, с. 87] для элемента z порядка 6 из $Z(A)$ имеем $|C_{\mathrm{Soc}(G)}(z)| = 48$. Следовательно, по лемме 2.2, $|O(A)| = 3$ и $|O_2(A)| \geq 4$. Значит, $A \leq C_G(i) = C$, где $i \in \mathrm{Soc}(G)$. По теореме из [5, следствие 3.1.4] $O(A)$ действует точно на 2-группе $T = O_2(C)$, которая нормализуется A. Рассмотрим подгруппу $R = TA$. Согласно [11, теорема B], имеем $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$.

Кроме того, $O(A) \cap (O(A))^t = 1$ для некоторого $t \in T$. Тогда для подгруппы $B_1 = R \cap B^g$, без ограничения общности, можно считать, что $B_1 = O(A)$ и $A \cap B_1^t \leq O(A) \cap B_1^t = 1$. Значит, $1 = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap B^{gt}$. Но это противоречит условию $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.7 $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq Sz(8)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq Sz(8)$. Тогда, согласно [6, с. 28] $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $|\mathrm{Out}(Sz(8))| = 3$ и $C_G(y)$ — циклическая подгруппа для любого непримарного элемента y из G. Так как по лемме 2.1 $|\pi(Z(A))| \geq 2$, то лемма 1.2 ведет к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 2.8 $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq F_4(2)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq F_4(2)$. Согласно [6, с. 170] имеем $|\mathrm{Out}(F_4(2))| = 2$. В случае $G \neq \mathrm{Soc}(G)$ все инволюции в $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ сопряжены и для инволюции $t \in G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ $C_G(t) = \langle t \rangle \times K$, где $K \simeq {}^2F_4(2)$.

Если $A \leq C_G(t)$ в случае $G \neq \mathrm{Soc}(G)$ или $A \leq K$ в случае $G = \mathrm{Soc}(G)$, то достаточно показать, что для подгрупп $A_1 = A \cap K$ и $B_1 = B^g \cap K$, где $B^g \cap \langle t \rangle = 1$ имеем $\min_K(A_1, B_1) = 1$. Тогда из леммы 1.6 для подгруппы $\langle t \rangle \times K$ в роли G_1 и $\langle t \rangle$ в роли G_2 в случае $G \neq \mathrm{Soc}(G)$ получаем $\min_G(A, B) = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

В случае же $\mathrm{Soc}(G) = G$ и $A \leq K$ противоречие следует непосредственно из того, что $\min_K(A_1, B_1) = 1$.

Итак, пусть $K \simeq {}^2F_4(2)$, A_1 и B_1 — нильпотентные подгруппы из ${}^2F_4(2)$. Тогда, согласно [11, теорема $B2$] имеем $|\pi(A_1)| > 1$ и $|\pi(B_1)| > 1$. Следовательно, $|\pi(Z(A_1))| > 1$ и $|\pi(Z(B_1))| > 1$. Согласно [6, с. 74–75], в разности ${}^2F_4(2) \backslash ({}^2F_4(2))'$ нет инволюций. Поэтому достаточно доказать, что $\min_{K'}(A_1 \cap K', B_1 \cap K') = 1$. Но для непримарного элемента y из $Z(A)$ или из $Z(B)$ имеем $C_{K'}(y)$ — абелева подгруппа. Так как $C_K(y) \geq A_1$, то $C_{K'}(y) \geq A_2 = A_1 \cap K'$ и тогда для абелевой подгруппы $B_2 = B_1 \cap K'$ по лемме 1.1 $\min_{K'}(A_2, B_2) = 1$. Значит, $\min_K(A_1, B_1) = 1$, а тогда и $\min_G(A, B) = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Если $A \leq C_G(i) = C$ для $i \in \mathrm{Soc}(G)$, то, согласно [5, следствие 3.1.4], подгруппа A действует на 2-подгруппе $T = O_2(C) \cap \mathrm{Soc}(G)$ так, что при этом $O(A)$ действует на T точно. Из списка максимальных параболических подгрупп в [6, с. 170] видно, что $O(A)$ — абелева подгруппа за исключением случая $G = \mathrm{Soc}(G)$, $P/O_2(P) \simeq Sp_6(2)$. Так как $G = \mathrm{Soc}(G)$, то по лемме 1.3, $O_2(P) \cap B^g = 1$ и для подгруппы $B_1 = P \cap B^g$ в факторгруппе $\overline{P} = P/O_2(P)$ по [3] имеем $\min_{\overline{P}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$. Следовательно по лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Если $O(A)$ — абелева подгруппа, то из точности действия и леммы 1.1 следует, что $O(A) \cap (O(A))^t = 1$ для некоторого $t \in T$. Положим $R = TA$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $B^g \cap O_2(R) = 1$. Действительно, то, что $B^g \cap O_2(R) = 1$ в случае $G = \mathrm{Soc}(G)$ следует из леммы 1.3. В случае $G \neq \mathrm{Soc}(G)$ выбор числа $|A||B|$ влечет, что в $A \backslash A \cap \mathrm{Soc}(G)$ есть инволюция. В силу сопряженности инволюций в $\mathrm{Aut}(F_4(2)) \backslash F_4(2)$ (см. [6, с. 170]) можно считать, что $A \backslash A \cap \mathrm{Soc}(G)$ содержит инволюцию t. Но, согласно [6, с. 170], в разности $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ содержится инволюция t и $C_G(t) = \langle t \rangle \times K$, где $K \simeq {}^2F_4(2)$. Так как K — группа характеристики два, то в K найдется пара силовских 2-подгрупп с единичным пересечением. По лемме 1.5 имеем $S \cap S^x = \langle t \rangle$ для некоторого x из G. Поскольку $S \cap S^x \geq O_2(R) \cap B^y$ для некоторого y из G и $O_2(R) \cap B^y \neq 1$ в силу $\min_G(O_2(R), B) \neq 1$, то из $2 = |S \cap S^x| \geq |O_2(R) \cap B^g| \neq 1$ следует, что $D = S \cap S^x \in m_G(S, S)$ и $D \leq O_2(R)$. Поэтому для любого $D_1 \in m_G(S, S)$ имеем $|D_1| = 2$ и, по определению, $D_1 \in m_G(O_2(R), B)$. Значит, $\min_G(S, S) \leq O_2(R)$. Из нильпотентности подгруппы B следует, что $\min_G(O_2(R), B) = \min_G(O_2(R), O_2(B))$. Поэтому, без ограничения общности, $\min_G(S, S) \le O_2(R) \cap O_2(B)$. Но $\min_G(S, S) \ge O_2(P)$ для некоторой параболической подгруппы P из $\mathrm{Soc}(G)$. Из леммы 2.2 следует, что $|\pi(B)| \ge 2$. Поэтому, в силу нильпотентности B, $1 = [O_2(B), O(B)] \ge [\min_G(S, S), O(B)] \ge [O_2(P), O(B)]$. Противоречие с тем, что $C_{\mathrm{Soc}(G)}(O_2(P)) \le O_2(P)$. Поэтому $O_2(R) \cap B^g = 1$. Так как $O(A)$ — холлова подгруппа, а $|B_1|$, где $B_1 = B^g \bigcap R$, нечетен в силу $O_2(R) \cap B^g = 1$ или $O_2(P) \cap B^g = 1$, то, без ограничения общности, можно считать, что $B_1 \le O(A)$. Тогда $B_1^t \le O(A)^t$ и $A \cap B_1^t \le O(A) \cap O(A)^t = 1$. Но $A \cap B_1^t = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap R \cap B^{gt} = A \cap B^{gt} = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Поэтому можно считать, что $A \not\le C_G(j)$ ни для какой инволюции j из G. В частности, $|A|$ нечетен. Значит, можно считать, что $G = \mathrm{Soc}(G)$.

Если $A \le M$, где M — максимальная подгруппа из G и $Soc(M)$ — классическая группа из множества (S), то G не контрпример к теореме по лемме 1.8. В силу нечетности $|A|$ подгруппа M не может быть локальной (см. [6, с. 179]) и $M \not\simeq (L_3(2) \times L_3(2)) : 2$.

Поэтому для окончания доказательства леммы достаточно рассмотреть случаи, когда $A \le M \simeq {}^3D_4(2) : 3$ или $A \le M \simeq Sp_8(2)$.

В случае, когда $M \simeq Sp_8(2)$ нечетность A([6, с. 123]), теорема 2 из [3] влечет, что $A \le K_1 \simeq \Omega_8^-(2)$ или $A \le K_2 \simeq Sp_4(4) : 2$, а в группе ${}^3D_4(2) : 3$, согласно [6, с. 89] все нильпотентные подгруппы абелевы или примарны.

Пусть $A \le K_1 \simeq \Omega_8^-(2)$. Тогда, согласно [6, с. 89], либо A лежит в классической группе из списка (S) и G не контрпример по лемме 1.8, либо A примарна или абелева и G не контрпример к теореме по леммам 1.2 и 2.4.

Если $A \le K_2 \simeq Sp_4(4) : 2$, то, согласно [6, с. 44], каждая нильпотентная подгруппа нечетного порядка из K_2 либо примарна, либо абелева, и G не контрпример к теореме по леммам 2.2 и 2.4. Лемма доказана.

Лемма 2.9 $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq {}^2E_6(2)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq {}^2E_6(2)$. Тогда, согласно [6, с. 191], получаем $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^{36} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ и для элемента x порядка $11, 13, 17$ или 19 имеем $A \le C_G(x)$ и $C_G(x)$ — абелева подгруппа. Противоречие с леммой 2.4. Так как $\mathrm{Out}({}^2E_6(2)) \simeq S_3$, то нильпотентность A влечет, что 6 не делит $|G/\mathrm{Soc}(G)|$.

Итак, $\pi(A) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Если $7 \Big| |A|$, то [5, с. 222, предложение 4.8.6] G содержит два класса элементов порядка 7 с представителями x_1 и x_2 и таких, что $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x_1)) \simeq L_3(2)$ и $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x_2)) \simeq L_3(4)$. По лемме 2.4 A содержит неабелеву силовскую подгруппу. Так как силовские подгруппы нечетного порядка в $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x))$ — абелевы для $x = x_1$ и $x = x_2$, то неабелевой силовской подгруппой в A может быть либо силовская 3-подгруппа из $O^{2'}(C_G(x_2))$, где элемент порядка три из $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ индуцирует на $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x_2))$ диагональный автоморфизм (см. [6, с. 23]), либо 2-подгруппа. Так как $F(C_G(x))$ — циклическая подгруппа, то в случае неабелевой силовской 3-подгруппы из $O^{2'}(C_G(x_2))$ по лемме 1.2 имеем $F(C_G(x_2)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента x из G и для $\overline{C} = O^{2'}(C_G(x_2))/F(C_G(x_2))$ по лемме 1.8 имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = O^{2'}(C_G(x_2)) \cap B^g$. Тогда по лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие с условием $\min_G(A, B) \neq 1$. Это же рассуждение справедливо и в случае, когда неабелевой является 2-подгруппа из A и $A \leq \mathrm{Soc}(G)$. Если $A \nleq \mathrm{Soc}(G)$, то A содержит инволюцию t, которая индуцирует на $E(C_G(x))$ графовый автоморфизм (см. [11, теорема 2B] и $1 \neq O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \leq O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x))$. Но централизаторы инволюций в $L_3(2)$ и $L_3(4)$ являются 2-группами (см. [6, с. 4 и с. 23]), поэтому $|A| = 2^m \cdot 7$ для некоторого $m \geq 3$. Тогда, согласно [5, следствие 3.1.4] A нормализует 2-подгруппу T, на которой $O(A)$ действует точно. Пусть $R = TA$. Согласно [11, теорема $B(2)$] $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$. Тогда условие $\min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что, без ограничения общности, для подгруппы $B_1 = R \cap B^g$ имеем $B_1 = O(A)$. По лемме 1.1 получаем, что $O(A) \cap O(A)^t = 1$ для некоторого $t \in O_2(R)$. Тогда $A \cap B_1^t \leq O(A) \cap O(A)^t = 1$. Но $A \cap B_1^t = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap B^{gt} = 1$. Противоречие с условием $\min_G(A, B) \neq 1$.

Значит, 7 не делит $|A|$ и $\pi(A) \subseteq \{2, 3, 5\}$. Если $5 \Big| |A|$, то по [5, с. 222, предложение 4.8.6] имеем $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x)) \simeq A_8$. Как и в случае $7 \Big| |A|$ неабелевой силовской подгруппой в A может быть либо $O_2(A)$, либо $O_3(A)$. В случае неабелевой $O_3(A)$ элемент порядка 3 из $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ должен индуцировать нетривиальный автоморфизм порядка 3 на $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x))$. Но у группы A_8 таких автоморфизмов нет (см. [6, с. 22]).

Поэтому $O(A)$ — абелева подгруппа и, как и в случае, когда $7 \Big| |A|$, рассматриваем подгруппу $R = TA$, где $O(A)$ действует точно на 2-подгруппе T. Снова по [11, теорема $B(2)$] имеем $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$ и для подгруппы $B_1 = R \cap B^g$, без ограничения общности, считаем, что $B_1 \leq O(A)$, где $O(A)$ — холлова подгруппа из R. По лемме 1.1 $O(A) \cap O(A)^t = 1$ для некоторого $t \in O_2(R)$. Тогда $A \cap B_1^t \leq O(A) \cap (O(A))^t = 1$. Поэтому $A \cap B_1^t = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap B^{gt} = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Итак, A — $\{2, 3\}$-группа. Из леммы 2.2 следует, что $O_2(A) \neq 1$ и $O_3(A) \neq 1$.

Если $O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) = 1$, то $O_2(A) = \langle i \rangle$, где i — инволюция, и, согласно [13, 19.8(iii)], либо $C_G(i) \simeq Z_2 \times F_4(2)$, либо $C_G(i) = \langle i \rangle \times T$, где подгруппа T изоморфна централизатору центральной инволюции из $F_4(2)$ и для $\overline{C} = C_G(i)/O_2(C_G(i))$ имеем $\overline{C} \simeq F_4(2)$ или $\overline{C} \simeq Sp_4(2)$ (см. [6, с. 180]). Тогда по [11, теорема $B(2)$] имеем $O_2(C) \cap B^g = 1$, где $C = C_G(i)$, для некоторого g из G. По леммам 2.8 и 1.8 $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = 1$. По лемме 1.6 получаем $\min_G(A, B) = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Если $O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$, то, согласно [5, следствие 3.1.4] подгруппа A нормализует 2-подгруппу T из G, на которой $O(A)$ действует точно. Рассмотрим подгруппу $R = TA$, в которой $O(A)$ является силовской 3-подгруппой, действующей точно на T. Согласно [11, теорема $B(2)$] $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$ и, без ограничения общности, подгруппа $B_1 = R \cap B^g$ лежит в $O(A)$. Если $O(A) \cap (O(A))^t = 1$ для некоторого $t \in O_2(R)$, то $A \cap B_1^t \leq O(A) \cap (O(A))^t = 1$ и тогда $1 = A \cap B_1^t = A \cap (R \cap B^g)^t = A \cap B^{gt}$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы. Если же $O(A) \cap (O(A))^t \neq 1$ для любого $t \in O_2(R)$, то по теореме B(1б) из [11] подгруппа $O(A)$ содержит секцию, изоморфную $Z_3 \wr Z_3$. Значит, A лежит в нормализаторе $N_G(P)$ некоторой максимальной параболической подгруппы P, силовская 3-подгруппа которой содержит подгруппу, изоморфную $Z_3 \wr Z_3$. Согласно [6, с. 191] подгруппа $E(\overline{N})$, где $\overline{N} = N_G(P)/O_2(N_G(P))$, изоморфна $U_6(2)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_3(4)$ или $S_5 \times L_3(2)$. Случай $E(\overline{N}) \simeq S_5 \times L_3(2)$ невозможен из-за $|\mathrm{Aut}(^2E_6(2)) : E_6(2)| = 6$. В случаях $E(\overline{N}) \simeq U_6(2)$ или $E(\overline{N}) \simeq \Omega_8^-(2)$ согласно [11, теорема $B(2)$] имеем $O_2(N_G(P)) \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$. Кроме того, по лемме 1.8 $\min_{\overline{N}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = N_G(P) \cap B^g$ для $\overline{N} \simeq U_6(2)$, а в доказательстве леммы 2.8 установлено, что $\min_{\overline{N}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ и для $\overline{N} \simeq \Omega_8^-(2)$. Поэтому по лемме 1.6 в обоих случаях $\min_G(A, B) = 1$, что невозможно ввиду выбора тройки (G, A, B) в начале доказательства теоремы.

Если $E(\overline{N}) \simeq L_3(4)$, то, в силу 3^3 не делит $|E(\overline{N})|$ и 3^2 не делит $|\mathrm{Out}(^2E_6(2))|$ имеем $\overline{P} \simeq L_3(4) \times S_3$. Поэтому элемент порядка 3 из $\overline{N} \backslash \overline{P}$ нормализует силовскую 3-подгруппу из $E(\overline{N})$ и силовскую 3-подгруппу из $C_{\overline{P}}(\overline{N}) \simeq Z_3$. Следовательно, порядок силовской 3-подгруппы $\overline{L}$ из $\overline{N}$ не превосходит 3^4 и $|Z(\overline{L})| \geq 3^2$. Противоречие с тем, что $Z_3 \wr Z_3$ изоморфно вкладывается в $O(A)$. Лемма доказана.

Из лемм 2.5 и 2.9 следует, что G не контрпример к теореме.

Теорема доказана.

References

[1] Zenkov V.I., *Intersections of abelian subgroups in finite groups*, Math. zametki, **56** (1994), 869–871. MR1308932

[2] Mazurov V.D., Zenkov V.I., *On intersection of sylov subgroups in finite groups*, Algebra i logika, **35**:4 (1996), 424–432. MR1444428

[3] Zenkov V.I., *On intersections two nilpotent subgroups in small finite groups*, Sib. El. Math. Rep., **13** (2016), 1099–1115. MR3580051

[4] The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory. No 18. Novosibirsk: IM SD RAS. 2014. 227 c. URL: http://math.usc.ru/alglog/17kt/pdf.

[5] Gorenstein D., Lyons R., Solomon R., *The Classification of the Finite Simple Groups*, **3**, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1991.

[6] Convay J. H. [et. al.], *Atlas of finite group*, Oxford: Clarendon Press, 1985.

[7] Zenkov V.I., *On intersections nilpotent subgroups in finite simmetric and altornative groups*, Tr. in-ta mat. and mech. UrO RAN, **19**:3 (2013), 145–149.

[8] Gorenstein D., *Finite simple groups. Introduction in classification*, Moskow: Mir, 1985. MR0813504

[9] Jamali A.R., Viseh M., *On nilpotent subgroups containing nontrivial normal subgroups*, J. of Group Theory, **13**:4 (2010), 411–416. MR2653528

[10] Zenkov V.I., *On intersections two nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_2(q)$*, Sib. Math. J., **57**:6 (2016), 1280–1290. MR3613999

[11] Zenkov V.I., *Intersections nilpotent subgroups in finite groups*, Fund. and pricl. math., **2**:1 (1996), 1–92. MR1788997

[12] Zenkov V.I., Nuzhin Y.N., *On intersections of primary subgroups of odd order in finite almost simple groups*, Fundam. and applied mathematics, **19**:6 (2014), 115–123.

[13] Aschbacher M., Seitz G.M., *Involutions in chevalley groups over fields of even order*, Nagoya Mathematical J., **63**:10 (1976), 1–91. MR0422401

[14] Zenkov V.I., *On intersections of abelian and nilpotent subgroups in finite groups. I*, Tr. in-ta mat. and mech. UrO RAN, **31**:3 (2015), 128–131.

Viktor Ivanovich Zenkov
N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskoi street, 16,
Yeltsin Ural Federal University,
Mira street, 19,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: V1I9Z52@mail.ru