S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 332–337 (2018) УДК 512.57
DOI 10.17377/semi.2018.15.030 MSC 08A99

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР И ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КЛОНОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭТОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.Г. ПИНУС

Abstract. We study the elementary closure operation on subsets of universal algebras induced by elementary geometries of this algebras along with the equivalence relation on functional clones with respect to the equality of their elementary geometries.

Keywords: elementary types, elementary geometries of algebras, functional clones.

Являясь наряду с группой В.Н. Ремесленникова родоначальником изучения алгебраической геометрии универсальных алгебр, Б.И. Плоткин в ряде своих работ [1,2] предложил к рассмотрению так называемую логическую геометрию универсальных алгебр в основе которой лежат элементарные типы элементов (и их кортежей) универсальных алгебр. Вариант подобной геометрии основанный на бескванторных типах элементов рассматривался в работах автора [3,4]. В настоящей работе рассмотрен ряд вопросов связанных с логической (по Б.И. Плоткину) геометрией алгебр.

Подмножество $B \subseteq A^n$ называется *n–мерным $\mathfrak{A}$–элементарным* (логическим по Б.И. Плоткину), если для некоторой совокупности $T(\overline{x})$ элементарных формул сигнатуры σ от переменных $\overline{x} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$ имеет место равенство $B = \{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models T(\overline{a})\}$. Через $Log_n\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех n–мерных $\mathfrak{A}$–элементарных множеств. Очевидно, что пересечение любой совокупности n–мерных $\mathfrak{A}$–элементарных множеств и само является таковым. Тем самым, совокупность $Log_n\mathfrak{A}$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. Для любого множества $C \subseteq A^n$ через $\overline{C}_{Log\mathfrak{A}}$

Pinus, A.G., On the elementary geometry of universal algebras and on the equivalence of clones relative to this geometry.

Поступила 19 апреля 2017 г., опубликована 21 марта 2018 г.

обозначим наименьшее n–мерное $\mathfrak{A}$–элементарное множество включающее в себя C–элементарное замыкание C в $\mathfrak{A}$. Положим при этом $\emptyset_{Log\mathfrak{A}} = \emptyset$. Далее через $tp_C(\overline{x})$ будем обозначать совокупность элементарных формул сигнатуры σ, определённую, как

$$\{\Phi(\overline{x}) \mid \mathfrak{A} \models \Phi(\overline{a}),\ \text{для любого } \overline{a} \in C\}.$$

Прежде всего отметим, что оператор $C \to \overline{C}_{Log\mathfrak{A}}$ в самом деле является оператором замыкания. Действительно, для любых $C, C_1, C_2 \subseteq A^n$ очевидным образом имеют место утверждения:

1) $C \subseteq \overline{C}_{Log\mathfrak{A}}$,
2) $\overline{(\overline{C}_{Log\mathfrak{A}}\ )}_{Log\mathfrak{A}} = \overline{C}_{Log\mathfrak{A}}$,
3) $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow \overline{(C_1)}_{Log\mathfrak{A}} \subseteq \overline{(C_2)}_{Log\mathfrak{A}}$.

Отметим также равенство $\overline{(C_1)}_{Log\mathfrak{A}} \cup \overline{(C_2)}_{Log\mathfrak{A}} = \overline{(C_1 \cup C_2)}_{Log\mathfrak{A}}$. Включение $\subseteq$ вытекает из отмеченного выше. Для доказательства обратного включения достаточно указать на равенство

$$\overline{C_1 \cup C_2}_{Log\mathfrak{A}} = \{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(\overline{x}) \vee \Phi_2(\overline{x}),\ \text{где } \Phi_1 \in tp_{C_1}(\overline{x}), \Phi_2 \in tp_{C_2}(\overline{x})\}.$$

Отметим также, что равенство $\overline{C_1 \cap C_2}_{Log\mathfrak{A}} = \overline{C_1}_{Log\mathfrak{A}} \cap \overline{C_2}_{Log\mathfrak{A}}$, вообще говоря, не верно.

Пусть σ состоит из единственного символа $f(x)$ одноместной функции и $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle = \big\langle \bigcup_{n\in\omega} A_n \cup A_\infty; \sigma\big\rangle$, где $\langle A_n; \sigma\rangle$ — n–цикл, и $\langle A_\infty; \sigma\rangle$ изоморфна алгебре целых чисел с операцией $f(m) = m + 1$.

Тогда, если $C_1 = \langle \bigcup A_n : n = 2k \rangle$ и $C_2 = \langle \bigcup A_n : n = 2k + 1 \rangle$, то выполнены равенства $\overline{C_1 \cap C_2}_{Log\mathfrak{A}} = \emptyset_{Log\mathfrak{A}}$ и $\overline{C_1}_{Log\mathfrak{A}} = \overline{C_2}_{Log\mathfrak{A}} = A$, то есть $\overline{C_1 \cap C_2}_{Log\mathfrak{A}} \neq \overline{C_1}_{Log\mathfrak{A}} \cap \overline{C_2}_{Log\mathfrak{A}}$.

Ввиду того, что для любого n справедливо $\overline{A_n}_{Log\mathfrak{A}} = A_n$, мы получаем, что $\bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}_{Log\mathfrak{A}} = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ не совпадает с $\overline{(\bigcup_{n\in\omega} A_n)}_{Log\mathfrak{A}} = A$. Тем самым равенство $\overline{\bigcup_{n\in I} C_i}_{Log\mathfrak{A}} = \bigcup_{n\in I} \overline{C_i}_{Log\mathfrak{A}}$, отмеченное выше для конечных I, для бесконечных I, вообще говоря, не верно.

Прежде всего рассмотрим связь оператора элементарного замыкания $C \to \overline{C}_{Log\mathfrak{A}}$ с традиционными алгебраическими конструкциями и понятиями (такими как ультрапроизведения и автоморфизмы).

Для любого кортежа $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ через $\mathfrak{A}_{\overline{a}}$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ новыми константами $c_1, \ldots, c_n$, интерпретируемыми в $\mathfrak{A}_{\overline{a}}$ элементами $a_1, \ldots, a_n$. Таким образом для любых кортежей элементов $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$ алгебры $\mathfrak{A}$ включение $\overline{b} \in \overline{\{\overline{a}\}}_{Log\mathfrak{A}}$ (и равносильное ему включение $\overline{a} \in \overline{\{\overline{b}\}}_{Log\mathfrak{A}}$) означает элементарную эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}_{\overline{a}}$ и $\mathfrak{A}_{\overline{b}}$. Тем самым, в силу теоремы Кейслера (см., к примеру [5]) об изоморфности ультрастепеней по подходящим ультрафильтрам элементарно эквивалентных моделей, имеет место

Лемма 1. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}$ и кортежей элементов $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$ включение $\overline{a} \in \overline{\{\overline{b}\}}_{Log\mathfrak{A}}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует ультрастепень $\mathfrak{A}^I/D$ алгебры $\mathfrak{A}$ и ее автоморфизм φ со свойством $\varphi(\overline{b}/D) = \overline{a}/D$.*

В силу сделанного выше замечания о логическом замыкании объединения конечного числа множеств, имеет место

Лемма 2. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}$ и кортежей $\overline{a}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_m} \in A^n$ включение $\overline{a} \in \overline{\{\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\}}_{Log\mathfrak{A}}$ равносильно существованию ультрастепени $\mathfrak{A}^I/D$ алгебры $\mathfrak{A}$ и автоморфизма φ этой ультрастепени $\mathfrak{A}^I/D$ таких, что $\varphi(\overline{b_i}/D) = \overline{a}/D$ для некоторого $i \leqslant m$.*

Наконец опишем отношение включения $\overline{a} \in \overline{B}_{Log\mathfrak{A}}$ для произвольных $\overline{a} \in A^n$, $B \subseteq A^n$.

Лемма 3. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}$ и любых $\overline{a} \in A^n$, $B \subseteq A^n$ включение $\overline{a} \in \overline{B}_{Log\mathfrak{A}}$ равносильно существованию ультрастепени $\mathfrak{A}^I/D$ алгебры $\mathfrak{A}$, кортежа $\overline{f}/D$ элементов этой ультрастепени, а также некоторого автоморфизма φ алгебры $(\mathfrak{A}^I/D)^n$ таких, что область значений для $\overline{f} \in (\mathfrak{A}^I)^n$ является подмножеством множества B, и $\varphi(\overline{f}/D) = \overline{a}/D$.*

Действительно, включение $\overline{a} \in \overline{B}_{Log\mathfrak{A}}$ равносильно включению алгебры $\mathfrak{A}_{\overline{a}}$ в аксиоматическое замыкание (наименьший аксиоматизируемый класс включающий в себя данный) класса алгебр $\{\mathfrak{A}_{\overline{b}} \mid \overline{b} \in B\}$. Утверждение же леммы 3 вытекает из хорошо известного (см., опять же [5]) описания моделей входящих в аксиоматическое замыкание класса моделей $\mathfrak{K}$ как моделей элементарно эквивалентных ультрапроизведениям $\mathfrak{K}$-моделей и того, что ультрастепень ультрапроизведения $\mathfrak{K}$-моделей изоморфна ультрапроизведению моделей из $\mathfrak{K}$.

Через $Aut\,\mathfrak{A}$ традиционно обозначим группу автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, а для любого $\overline{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in A^n$ через $Orb\left(\overline{b}\right)$ – множество $\{\varphi\left(\overline{b}\right) \mid \varphi \in Aut\,\mathfrak{A}^n\}$.

В случае конечности алгебры $\mathfrak{A}$ ультрастепени $\mathfrak{A}$ будут изоморфны самой $\mathfrak{A}$, откуда мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любой конечной алгебры $\mathfrak{A}$ и любого $B \subseteq A^n$ имеет место равенство $\overline{(B)}_{Log\mathfrak{A}} = \bigcup_{\overline{b} \in B} Orb\left(\overline{b}\right)$.*

По аналогии с алгебраической и логической эквивалентностями функциональных клонов (см. [4,6]), что, в свою очередь, связано с совпадением алгебраических и бесканторно логических геометрий алгебр с заданными клонами термальных операций, введем понятие элементарной эквивалентности функциональных клонов. Функциональные клоны F_1 и F_2 на множестве A назовем *элементарно эквивалентными* ($F_1 \sim_{Log} F_2$), если совпадают совокупности $Log_n\mathfrak{A}_{F_1}$ и $Log_n\mathfrak{A}_{F_2}$ (для любого натурального n) — совокупности $\mathfrak{A}_{F_1}$–элементарных и $\mathfrak{A}_{F_2}$–элементарных множеств. Здесь для клона F на множестве A алгебра $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$ имеет основное множество A, а в качестве сигнатурных функций берутся все функции из клона F.

Напомним определения связанные с введенным в работе [7] понятием элементарно условно термальной функции. Под *элементарно условным термом* сигнатуры σ мы понимаем схему вида

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \Phi_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}) \\ \quad\ldots \\ \Phi_k(\overline{x}) \to t_k(\overline{x}), \end{cases}$$

где $t_1(\overline{x}), \ldots, t_k(\overline{x})$ — термы сигнатуры σ, а $\{\Phi_1(\overline{x}), \ldots, \Phi_k(\overline{x})\}$ система элементарных формул сигнатуры σ такая, что формула $\bigvee_{i=1}^{k} \Phi_i(\overline{x})$ тождественно истинна, а для $i \neq j$ формулы $\Phi_i(\overline{x}) \wedge \Phi_j(\overline{x})$ тождественно ложны. При этом функция $g(\overline{x})$ на основном множестве алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется *элементарно условно термальной для* $\mathfrak{A}$, если для некоторого элементарно условного терма $t(\overline{x})$ (см. выше) для любого $\overline{a} \in \mathfrak{A}$, в случае когда $\mathfrak{A} \models \Phi_i(\overline{a})$ имеет место равенство $g(\overline{a}) = t_i(\overline{a})$.

Совокупность (клон) всех элементарно условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как $ECT(\mathfrak{A})$. Для любого клона F на множестве A через $ECT(F)$ обозначим клон $ECT(\mathfrak{A}_F)$. Отметим, что оператор $ECT : F_A \to F_A$ является оператором замыкания на решетке $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee \rangle$ всех функциональных клонов на множестве A, то есть для любых $F, F_1, F_2 \in F_A$ справедливы утверждения:

1) $F \subseteq ECT(F)$,
2) $ECT(ECT(F)) = ECT(F)$,
3) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow ECT(F_1) \subseteq ECT(F_2)$.

Здесь второе равенство связано с тем, что любая элементарная формула сигнатуры $ECT(F)$ (алгебры $\mathfrak{A}_{ECT(F)}$) эквивалентна на множестве A некоторой элементарной формуле сигнатуры F (алгебры $\mathfrak{A}_F$).

Непосредственно из определений отношения $\sim_{Log}$ и элементарно условно термальных функций вытекает следующее утверждение

Лемма 4. *Для любого клона F на множестве A справедливо $F \sim_{Log} ECT(F)$.*

Из утверждения этой же леммы вытекает

Утверждение 1. *Для любых клонов F_1 и F_2 на множестве A отношения $F_1 \sim_{Log} F_2$ и $ECT(F_1) \sim_{Log} ECT(F_2)$ равносильны.*

Традиционно через $Sub\,\mathfrak{A}$ обозначим решетку подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

В работе [7], в частности, доказана

Теорема A. *Для любой конечной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любой функции f на A следующие условия эквивалентны:*

1) *$f \in ECT(\mathfrak{A})$,*
2) *подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно f, и f коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$.*

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие A. *Для любого конечного множества A и любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2 \rangle$ с основным множеством A следующие условия равносильны:*

1) *$ECT(\mathfrak{A}_1) = ECT(\mathfrak{A}_2)$*
2) *$Aut\,\mathfrak{A}_1 = Aut\,\mathfrak{A}_2$ и $Sub\,\mathfrak{A}_1 = Sub\,\mathfrak{A}_2$.*

В силу того, что для конечных A число всевозможных групп биекций A на себя (потенциально возможных групп вида $Aut\,\mathfrak{A}$ для алгебр с основным множеством A) конечно, как конечно и число совокупностей подмножеств множества A (потенциально возможных решеток вида $Sub\,\mathfrak{A}$) то, в силу следствия A, конечно и число ECT-замкнутых клонов на конечном множеств A. Тем самым, в силу утверждения 1, конечно и множество $F_A/_{\sim_{Log}}$, то есть имеет место

Теорема 1. *Для любого конечного множества A число попарно не $\sim_{Log}$-эквивалентных клонов на A конечно.*

Другим естественным вопросом об отношении $\sim_{Log}$ на совокупности F_A всех клонов на множестве A является вопрос о строении классов $F/_{\sim Log}$ (для $F \in F_A$) как подмножеств решетки L_A. Очевидным образом эти классы являются выпуклыми подмножествами решетки L_A и замкнутыми подмножествами метрического пространства $\langle F_A; d\,\rangle$ всех клонов на A, введенного в работе [8].

Заметим, что, тем не менее, эти классы не обязаны быть интервалами решетки L_A; более того, они не обязаны быть даже направленными ни вверх ни вниз подмножествами решетки L_A. Для демонстрации этого годятся примеры 1 и 2 из работы [4].

Действительно, пусть $|A| = 4$ и $\{B_1, B_2\}$ разбиение A на двухэлементные подмножества. Пусть F_i — клон всех функций на A со значениями во множестве B_i с добавленными к ним селекторными функциями на A. Очевидно, что для любого $n \in \omega$ справедливо $Log_n\langle A; F_i\,\rangle = P(A^n)$.

Тем самым $F_1 \sim_{Log} F_2$. В то же время $F_1 \cap F_2$ состоит лишь из селекторных функций и, значит, $F_1 \cap F_2 \nsim_{Log} F_1$, то есть класс $F_1/\sim_{Log}$ не является направленным вниз подмножеством в L_{A_i}.

Пусть теперь A — шестиэлементное множество и $\{B_1, B_2, B_3\}$ разбиение A на двухэлементные подмножества. Пусть $b_i \in B_i$ для $i = 1, 2, 3$.

На A определим функции g_1 и g_2 следующим образом:

$$g_1(x) \quad = \quad \begin{cases} b_1, & \text{если } x \in B_1, \\ b_3, & \text{если } x \in B_2 \cup B_3, \end{cases}$$

$$g_2(x) \quad = \quad \begin{cases} b_1, & \text{если } x \in B_1 \cup B_2, \\ b_3, & \text{если } x \in B_3. \end{cases}$$

Пусть F_i — функциональный клон на A, порожденный функцией g_i. Так как $g_i^2 = g_i$, то функция $h(x_1, \ldots, x_n)$ входит в F_i тогда и только тогда, когда она селекторная, либо имеет место равенство $h(x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_j)$ для некоторого $j \leqslant n$. Непосредственно замечается, что $Log_n\langle A; F_1\rangle = Log_n\langle A; F_2\rangle$ для любого $n \in \omega$. Таким образом $F_1 \sim_{Log} F_2$. При этом в $Log_1\langle A; F_i\rangle$ входят только множества $\emptyset$, A, $\{b_1, b_3\}$ (решение уравнения $g_i(x) = x$) и $A \setminus \{b_1, b_3\}$. В то же время, если клон F включает в себя клоны F_1 и F_2, то множество $B_1 \cup B_3$ (решение уравнения $g_1(x) = g_2(x)$) входит в $Log_1\langle A; F\,\rangle$ и, значит, $F \nsim_{Log} F_1$. Тем самым, $F/\sim_{Log}$, вообще говоря, не является направленным вверх подмножеством решетки L_A.

В работе [6] для любого оператора замыкания g на некоторой решетке L введено понятие g–замкнутого полуинтервала решетки L как подмножества этой решетки вида $B = \{c \in L \mid g(c) = b\}$ для некоторого $b \in L$ такого, что $g(b) = b$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Для любого конечного множества A и любого клона F на A класс $F/\sim_{Log}$ является объединением конечного числа ECT-замкнутых полуинтервалов в решетке L_A.*

По аналогии с введенными в работах [4,6] понятиями алгебраической и L_0–логической размерности функциональных клонов определим понятие *элементарной размерности $log\text{-}dim\,F$* клона $F \in F_A$, полагая $log\text{-}dim\,F$ равным наименьшему натуральному числу n (если таковое существует), что для любого $F_1 \in F_A$ равенство $Log_n\langle A; F_1\rangle = Log_n\langle A; F\,\rangle$ влечет равенства $Log_m\langle A; F_1\rangle =$

$Log_m\langle A; F\rangle$ для любого натурального m. В противном случае полагаем $log\text{-}dim\, F$ равной бесконечности.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 3. *Для любого конечного множества A и любого клона F на A его элементарная размерность конечна.*

Из утверждений этого следствия и теоремы 1 вытекает

Следствие 4. *Для любого конечного множества A существует натуральное число $n(A)$ такое, что для любых клонов F_1, F_2 на A равенство $Log_{n(A)}\langle A; F_1\rangle = Log_{n(A)}\langle A; F_2\rangle$ влечет равенства $Log_m\langle A; F_1\rangle = Log_m\langle A; F_2\rangle$ для любого натурального m.*

Для бесконечных множеств A существуют функциональные клоны на A, имеющие бесконечную элементарную размерность. В качестве примера подобной ситуации можно указать на пример 3 работы [4].

References

[1] B. Plotkin, G. Zhitomirski, *Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras*, Algabra i Analiz, **19**:5 (2007), 214–245.

[2] B. Plotkin, *Isotyped algebras*, Proc. Of the Steklov Institute of Math., **278**:1 (2012), 91–115. Zbl 1361.03067

[3] A.G. Pinus, *On some of logical closures on universal algebras*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 698–703. Zbl 1347.08004

[4] A.G. Pinus, *On the logical equivalence of functional clones*, Siberian Mathematical Journal, **58**:4 (2017), 672–675. Zbl 06798788

[5] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, Amsterdam–London: North-Holland Publ. Comp., 1973. Zbl 0276.02032

[6] A.G. Pinus, *Algebraically equivalent clones*, Algebra and Logic, **55**:6 (2016), 501–506. Zbl 0986.03028

[7] A.G. Pinus, *n–Elementary embeddability and n-conditional terms*, Russian Mathematics, **43**:1 (1999), 33–37.

[8] A.G. Pinus, *Dimension of functional clons, metric on its collection*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 366–374. Zbl 1345.08002

Alexander Georgievich Pinus
Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marx, 20,
630073, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ag.pinus@gmail.com