S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 338–354 (2018) УДК 517.956

DOI 10.17377/semi.2018.15.031 MSC 35J61

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГАУССА—БИБЕРБАХА—РАДЕМАХЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

А.В. НЕКЛЮДОВ

Abstract. We consider an asymptotic behavior at infinity of solutions of a semi-linear second order elliptic equation containing exponential nonlinear term. We establish that any solution in a circle's exterior tends to a negative infinity with the same rate as the fundamental solution of respective linear homogeneous elliptic equation.

Keywords: semi-linear elliptic equation, Gauss equation, Bieberbach - Rademacher equation, asymptotic behavior

1. Введение

Уравнение Гаусса, известное также как уравнение Бибербаха —Радемахера,

$$\Delta u = e^u,$$

возникает как модельное в задачах геометрии в связи с вопросом существования поверхностей отрицательной гауссовой кривизны [1], теории автоморфных функций [2], при изучении равновесия заряженного газа [3].

Поведение на бесконечности решений уравнения Гаусса рассматривалось ранее в цилиндрических областях с однородным условием Неймана или Дирихле на боковой поверхности [4]–[6] и во внешности круга [7]. Соответствующее уравнение с бигармоническим оператором и граничным условием периодичности рассмотрено в [8]. Случай эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и экспоненциальной нелинейностью, по-видимому, был рассмотрен только в [9] для цилиндрической области и граничного условия Неймана.

Nekludov, A.V., Asymptotic of solutions of two-dimesional Gauss-Bierbach-Rademacher equation with variable coefficients in external area.

Поступила 16 мая 2017 г., опубликована 22 марта 2018 г.

В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение решений двумерного полулинейного эллиптического уравнения второго порядка $Lu = e^u$ с переменными коэффициентами, определенных во внешности круга. Показано, что главной частью асимптотики в бесконечности является фундаментальное решение соответствующего линейного эллиптического оператора, умноженное на отрицательный коэффициент.

2. Основные определения и обозначения. Вспомогательные утверждения

В двумерной области $Q = \{x = (x_1, x_2) : |x| > R_0 > 0\}$ рассматривается равномерно эллиптическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = e^u \tag{1}$$

с измеримыми коэффициентами, $\lambda_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda_2|\xi|^2$, $x \in Q$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0$.

Будем использовать следующие обозначения: $Q(R_1, R_2) = \{x : R_1 < |x| < R_2\}$, $Q_R = Q(R, R+1)$, $S_R = \{x : |x| = R\}$, $\overline{u}(R) = (2\pi R)^{-1}\int_{S_R} u\, ds$.

Пусть $h_1, h_2 > 0$; $R_0 \leq R_1 < R_2$. Через $\Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2} = \Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}(|x|)$ будем обозначать непрерывную функцию, такую, что $\Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2} = 1$ при $R_1 + h_1 < |x| < R_2$, $\Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}(R_1) = \Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}(R_2 + h_2) = 0$, $\Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}$ - линейная при $R_1 < |x| < R_1 + h_1$ и $R_2 < |x| < R_2 + h_2$.

Под решением (1) будем понимать обобщенное решение, т.е. функцию $u \in W_2^1(Q(R_0, R)) \cap L^\infty(Q(R_0, R))$ при любом $R > R_0$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_{Q(R_0,R)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = -\int_{Q(R_0,R)} e^u v\, dx \tag{2}$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q_R)$, таких, что $v|_{S_{R_0} \cup S_R} = 0$. Полагая в (2) $v = \Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}$, получим

$$\begin{aligned} &h_2^{-1}\int_{Q(R_2,R_2+h_2)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, dx \\ &- h_1^{-1}\int_{Q(R_1,R_1+h_1)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, dx = \int_{Q(R_1,R_2+h_2)} e^u \Phi_{R_1,h_1;R_2,h_2}\, dx. \end{aligned}$$

Устремляя h_1, а затем h_2 к нулю, получаем соотношение для „потока тепла“ решения через окружность S_R:

$$P(R_2, u) - P(R_1, u) = \int_{Q(R_1,R_2)} e^u\, dx, \tag{3}$$

где

$$P(R, u) = \lim_{h\to+0}\left(h^{-1}\int_{Q(R,R+h)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, dx\right) = \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds,$$

последнее равенство справедливо для п.в. $R \geq R_0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}$ - т.н. производная по внешней конормали к окружности S_R. Положим также по определению

$$\overline{P}(R,u) = \int_R^{R+1} P(r,u)\,dr = \int_{Q_R} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\,dx.$$

Будем в дальнейшем использовать неравенство Пуанкаре в следующем виде:

$$\int_{Q(R/2,4R)} v^2\,dx \leq c_0 R^2 \int_{Q(R/2,4R)} |\nabla v|^2\,dx,$$

$$\int_{Q_R} v^2\,dx \leq c_1 R^2 \int_{Q_R} |\nabla v|^2\,dx,$$

$$\int_{S_R} v^2\,ds \leq c_2 R^2 \int_{S_R} |\nabla v|^2\,ds$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q(R/2,4R))$, таких, что $\overline{v}(R) = 0$; $c_0, c_1, c_2 > 0$ не зависят от v, R.

Докажем далее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $u \in W_2^1(Q(R_1,R_2))$. Тогда справедлива оценка*

$$|\overline{u}(R_2) - \overline{u}(R_1)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \ln^{1/2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\int_{Q(R_1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

Доказательство. Пусть (r,θ) - полярные координаты на плоскости (x_1,x_2). Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|\overline{u}(R_2) - \overline{u}(R_1)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \big(u(R_2,\theta) - u(R_1,\theta)\big)\,d\theta\right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\,dr\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{Q(R_1,R_2)} \frac{|\nabla u|}{|x|}\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{Q(R_1,R_2)} \frac{dx}{|x|^2}\right)^{1/2}\left(\int_{Q(R_1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \ln^{1/2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\int_{Q(R_1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будет использоваться фундаментальное решение уравнения $LV = 0$ (где равномерно эллиптический оператор L определен на всей плоскости), удовлетворяющее [10, формула (7.5)] оценке $C_1 \ln|x| \leq V(x) \leq C_2 \ln|x|$ при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$; $C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0$. Получим некоторые его дополнительные свойства, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2. *Фундаментальное решение уравнения $LV = 0$ удовлетворяет условию $P(R,V) = \mathrm{const} > 0$ и оценке*

$$c_0 \ln R \leq \int_{Q(1,R)} |\nabla V|^2\,dx \leq c_0' \ln R,$$

c_0, $c_0' > 0$ не зависят от $R > 2$.

Доказательство. Условие $P(R,V) = \mathrm{const}$ может быть получено аналогично соотношению (3), см., например, [11, формула (10)]. Покажем, что $P(R,V) > 0$. Пусть $R > 2$, $\varphi(|x|) = (2R - |x|)/R$; $\Phi(|x|) = |x| - 1$ при $1 < |x| < 2$, $\Phi(|x|) = 1$ при $2 \le |x| \le R$, $\Phi = \varphi^2(|x|)$ при $R \le |x| \le 2R$.

Полагая в интегральном тождестве для $V(x)$ [11, формула (5)] пробную функцию $V\Phi(|x|)$, получим

$$\begin{aligned}\int_{Q(1,2R)} \Phi \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}\,dx = -\int_{Q_1} V \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx \\ + 2R^{-1}\int_{Q(R,2R)} \varphi V \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.\end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда, используя эллиптичность оператора L, получим

$$\begin{aligned}\int_{Q(1,2R)} |\nabla V|^2\Phi\,dx &\le I_0 + c_1R^{-1}\int_{Q(R,2R)} |\nabla V||V|\varphi\,dx \\ &\le I_0 + \int_{Q(R,2R)} |\nabla V|^2\varphi^2\,dx + c_2R^{-2}\int_{Q(R,2R)} V^2\,dx,\end{aligned}$$

здесь и далее в доказательстве $c_k > 0$ не зависят от R; I_0 не зависит от R. Так как $\Phi = \varphi^2$ в $Q(R,2R)$, то отсюда получаем оценку

$$\int_{Q(2,R)} |\nabla V|^2\,dx \le I_0 + c_2R^{-2}\int_{Q(R,2R)} V^2\,dx \le c_3 \ln^2 R. \tag{5}$$

Полагая в интегральном тождестве для V пробную функцию $V\Phi_{1,1;R,h}$ и используя эллиптичность уравнения, аналогично (4) получим соотношение

$$\int_{Q(1,R+h)} |\nabla V|^2\Phi_{1,1;R,h}\,dx \le I_0 + c_4h^{-1}\int_{Q(R,R+h)} V\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.$$

Устремляя h к нулю, получим для п.в. $R > 2$

$$\int_{Q(2,R)} |\nabla V|^2\,dx \le I_0 + c_4\int_{S_R} V\frac{\partial V}{\partial \nu}\,ds.$$

Отсюда

$$\int_{Q(2,R)} |\nabla V|^2\,dx \le I_0 + c_4\int_{S_R} \big(V - \overline{V}(R)\big)\frac{\partial V}{\partial \nu}\,ds + c_4P(R,V)\overline{V}(R). \tag{6}$$

Предположим, что $P(R,V) \le 0$, тогда для п.в. $R > 2$

$$I(R) \equiv \int_{Q(2,R)} |\nabla V|^2\,dx \le I_0 + c_4\int_{S_R} \big(V - \overline{V}(R)\big)\frac{\partial V}{\partial \nu}\,ds.$$

Применяя неравенства Коши-Буняковского и Пуанкаре, получаем

$$I(R) \le I_0 + c_5R\int_{S_R} |\nabla V|^2\,ds \equiv I_0 + c_5RI'(R).$$

Интегрируя от R до $R_1 > R$, получаем, что

$$I(R) \le I(R_1)\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\delta} + c_6,$$

$\delta > 0$ не зависит от R. Учитывая логарифмическую оценку (5) для $I(R_1)$ и устремляя R_1 к бесконечности, получим оценку

$$I(R) \le c_6.$$

Таким образом, $\int_Q |\nabla V|^2\,dx < \infty$. Согласно [11, теорема 4] решение уравнения $LV = 0$ во внешней области, обладающее конечным интегралом Дирихле, ограничено и стремится к постоянной при $|x| \to \infty$, что невозможно для фундаментального решения. Таким образом, $P(R,V) > 0$.

Оценим интеграл Дирихле фундаментального решения сверху. Используя оценку (6) и оценивая интеграл по S_R как и выше, получим

$$I(R) \le I_0 + c_5 R \int_{S_R} |\nabla V|^2\,dx + c_4 P(R,V)\overline{V}(R) \le c_7\big(RI'(R) + \ln R\big).$$

Интегрируя от R до R_1, устремляя R_1 к бесконечности и учитывая (5), получаем, что

$$I(R) \le I(R_1)\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\delta} + c_8 \ln R,$$

$$I(R) \le c_8 \ln R.$$

Таким образом, требуемая оценка сверху получена. Очевидно, что из условия $P(R,V) \equiv \mathrm{const} > 0$ следует для п.в. $R > 0$ оценка

$$\int_{S_R} |\nabla V|^2\,ds \ge \frac{c_9}{R},$$

откуда получаем

$$\int_{Q(1,R)} |\nabla V|^2\,dx \ge c_0 \ln R.$$

Таким образом, лемма полностью доказана.

После умножения $V(x)$ на положительную постоянную, можем считать, что $P(R,V) \equiv 1$. Далее будем полагать, что оператор L в уравнении (1) определен на всей плоскости, например продолжим L в круг $\{x : |x| < R_0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q}$ как оператор Лапласа.

Лемма 3. *Для фундаментального решения уравнения $LV = 0$ при $R > 2$ справедлива оценка*

$$\sup\nolimits_{Q(R,2R)} |V(x) - \overline{V}(R)| \le c_0 \ln^{1/2} R,$$

$c_0 > 0$ *не зависит от* R.

Доказательство. В силу оценки Де Джорджи [12, теорема 8.17], неравенства Пуанкаре и оценки интеграла Дирихле для $V(x)$ имеем при $x \in Q(R,2R)$

$$|V(x) - \overline{V}(R)|^2 \le c_1 R^{-2} \int_{Q(R/2,4R)} \big|V - \overline{V}(R)\big|^2\,dx \le c_2 \int_{Q(R/2,4R)} |\nabla V|^2\,dx \le c_3 \ln R,$$

$c_k > 0$ не зависят от R. Отсюда сразу следует утверждение леммы.

3. Свойства решений и поведение на бесконечности.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ - решение уравнения (1) в Q. Тогда $u(x)$ ограничено сверху в Q, и для него справедлива оценка*

$$\int_Q e^u\,dx < \infty.$$

Доказательство. Пусть $R_1 \ge R_0$, $R > R_1 + 1$, $\beta > 0$, $\varphi = \varphi(|x|) = |x| - R_1$. Положим в (2) $v = \Phi(|x|)e^{\beta u}$, где $\Phi(|x|)$ - непрерывная функция, $\Phi = \varphi^2(|x|)$ при $R_1 \le |x| \le R_1 + 1$; $\Phi = 1$ при $R_1 + 1 \le |x| \le R$, $\Phi(R + h) = 0$, Φ - линейная при $R < |x| < R + h$. Получаем

$$\begin{aligned}
&\beta \int_{Q(R_1,R+h)} \Phi e^{\beta u} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_{Q(R_1,R+h)} \Phi e^{(\beta+1)u}\,dx \\
&= h^{-1}\int_{Q(R,R+h)} e^{\beta u} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx \\
&- 2\int_{Q_{R_1}} \varphi e^{\beta u} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.
\end{aligned} \tag{7}$$

Устремляя h к нулю, получаем для п.в. $R > R_1 + 1$

$$\begin{aligned}
&\beta \int_{Q(R_1,R)} \Phi \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{\beta u}\,dx + \int_{Q(R_1,R)} \Phi e^{(\beta+1)u}\,dx \\
&= \int_{S_R} e^{\beta u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds - 2\int_{Q_{R_1}} \varphi e^{\beta u} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx,
\end{aligned} \tag{8}$$

как и выше $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}$ - производная по внешней конормали к окружности S_R. Отсюда следует, что $E(R) \equiv \int_{S_R} e^{\beta u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds$ - возрастающая непрерывная функция от R. Предположим, что $E(R_1) \ge 0$ для некоторого $R_1 \ge R_0$ и, следовательно, $E(R) > 0$ для всех $R > R_1$. Тогда интеграл по Q_{R_1} в правой части (8), равный $\int_{R_1}^{R_1+1} \varphi(r)E(r)\,dr$, положителен. Тогда из (8), учитывая эллиптичность уравнения (1) и применяя неравенства Коши-Буняковского и Гёльдера, получим для почти всех $R > R_1 + 1$

$$\begin{aligned}
I(R) &\equiv \beta \int_{Q(R_1+1,R)} |\nabla u|^2 e^{\beta u}\,dx + \int_{Q(R_1+1,R)} e^{(\beta+1)u}\,dx \le c_0 \int_{S_R} e^{\beta u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds \\
&\le c_1 \left(\int_{S_R} |\nabla u|^2 e^{\beta u}\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{S_R} e^{\beta u}\,ds\right)^{1/2} \\
&\le c_2 R^{\frac{1}{2(\beta+1)}} \left[\left(\int_{S_R} |\nabla u|^2 e^{\beta u}\,ds\right)^{\frac{\beta+1}{2\beta+1}} \left(\int_{S_R} e^{(\beta+1)u}\,ds\right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}}\right]^{\frac{2\beta+1}{2(\beta+1)}},
\end{aligned}$$

здесь и далее в доказательстве $c_k > 0$ не зависят от R. Отсюда, используя неравенство Юнга, получим

$$I(R) \le c_3 R^{\frac{1}{2(\beta+1)}} \left[\int_{S_R} \left(|\nabla u|^2 e^{\beta u} + e^{(\beta+1)u}\right) ds\right]^{\frac{2\beta+1}{2(\beta+1)}} \le c_4 R^{\frac{1}{2(\beta+1)}} \left(I'(R)\right)^{\frac{2\beta+1}{2(\beta+1)}},$$

$$I'(R) \geq c_5 \frac{\big(I(R)\big)^{\frac{2(\beta+1)}{2\beta+1}}}{R^{\frac{1}{2\beta+1}}}.$$

Отсюда следует, что $I(R) \to \infty$, $R \to \tilde{R} - 0$ для некоторого $\tilde{R} > R_1 + 1$. Это означает, что решение $u(x)$ не может быть определено в области Q_R при $R > \tilde{R}$. Полученное противоречие означает, что $E(R) < 0$ для всех $R \geq R_0$. Тогда из (8) при $R_1 = R_0$ получаем, что при всех $\beta > 0$

$$\int_{Q(R_0+1,R)} e^{(\beta+1)u}\,dx \leq -2\int_{Q_{R_0}} \varphi e^{\beta u} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.$$

Устремляя β к нулю, получаем конечность интеграла $\int_Q e^u\,dx$.

Покажем ограниченность $u(x)$ сверху. Из равенства (7) при $R_1 = R_0$, учитывая, что $E(R) < 0$, имеем

$$\int_{Q(R_0,R)} \Phi\big(e^{(\beta+1)u} + \beta e^{\beta u}|\nabla u|^2\big)\,dx \leq c_6 \int_{Q_{R_0}} e^{\beta u}\varphi|\nabla u|\,dx$$
$$\leq \beta\int_{Q_{R_0}} e^{\beta u}\varphi^2|\nabla u|^2\,dx + c\beta^{-1}\int_{Q_{R_0}} e^{\beta u}\,dx,$$

$c > 0$ не зависит от R и β. Отсюда, учитывая, что $\Phi = \varphi^2$ в Q_{R_0}, получаем

$$\int_{Q(R_0,R)} \Phi e^{(\beta+1)u}\,dx \leq c\beta^{-1}\int_{Q_{R_0}} e^{\beta u}\,dx,$$

$$\left(\int_{Q(R_0+1,R)} e^{(\beta+1)u}\,dx\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \leq (c\beta^{-1})^{\frac{1}{\beta+1}}\left[\left(\int_{Q_{R_0}} e^{\beta u}\,dx\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\beta+1}}.$$

Устремляя β к бесконечности, получаем оценку

$$\sup\nolimits_{Q(R_0+1,R)} e^u \leq \sup\nolimits_{Q_{R_0}} e^u. \tag{9}$$

Поскольку $R > R_0 + 1$ - любое, то $u(x)$ ограничена сверху в Q. Теорема полностью доказана.

Заметим, что в силу теоремы 1 и соотношения (3) для решения уравнения (1) в Q существует конечный предел

$$\lim\nolimits_{R\to\infty} P(R,u) = \lim\nolimits_{R\to\infty} \overline{P}(R,u) = P_0. \tag{10}$$

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ - решение (1) в Q. Тогда при любом $\delta > 0$*

$$\int_{Q(R_0',\infty)} \frac{|x|^2 e^{2u}}{\ln^{1+\delta}|x|}\,dx < \infty, \qquad R_0' > \max\{R_0, 1\}.$$

Доказательство. Пусть $R_0' \leq R < R_1$. Положим в (2) $v = \Phi_{R,h;R_1,1}(|x|)e^u$. Используя эллиптичность уравнения, получаем

$$\int_{Q(R,R_1+1)} \Phi_{R,h;R_1,1}\Big(|\nabla u|^2 e^u + e^{2u}\Big)\,dx \leq c_1\Big(-h^{-1}\int_{Q(R,R+h)} e^u\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx$$
$$+\int_{Q_{R_1}} e^u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx\Big),$$

c_1 не зависит от R, R_1, h. Учитывая, что, как было показано в доказательстве теоремы 1, интеграл по Q_{R_1} в правой части отрицателен, и устремляя h к нулю, отсюда получаем для п.в. $R \geq R_0$

$$J(R) \equiv \int_{Q(R,\infty)} \Big(|\nabla u|^2 e^u + e^{2u} \Big)\, dx \leq -c_1 \int_{S_R} e^u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds,$$

$\partial u/\partial \nu$ - производная по конормали к S_R. Оценивая интеграл по S_R так же, как и в доказательстве теоремы 1 для $\beta = 1$, получаем

$$J(R) \leq c_1 R^{1/4} \bigg(\int_{S_R} \big(|\nabla u|^2 e^u + e^{2u} \big)\, ds \bigg)^{3/4} \equiv c_1 R^{1/4} \big(-J'(R) \big)^{3/4}.$$

Интегрируя неравенство

$$-\frac{J'(R)}{J^{4/3}(R)} \geq \frac{c_2}{R^{1/3}},$$

получим, что

$$J^{-1/3}(R) \geq c_3 R^{2/3} + c_4,$$

$$J(R) \leq \frac{c_5}{R^2},$$

$c_i > 0$ не зависят от R. Тогда справедлива оценка

$$\int_{Q(R_0',\infty)} \frac{|x|^2 e^{2u}}{\ln^{1+\delta} |x|}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q(R_0' 2^{k-1}, R_0' 2^k)} \frac{|x|^2 e^{2u}}{\ln^{1+\delta} |x|}\, dx$$

$$\leq c_6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{k^{1+\delta}} \int_{Q(R_0' 2^{k-1}, R_0' 2^k)} e^{2u}\, dx \leq c_7 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда $u(x) < -1$ при $|x| > R_1 = \mathrm{const} > R_0$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 $u(x)$ ограничено сверху в Q. Пусть $M = \sup_Q u$. Тогда $M - u \geq 0$, $L(M-u) < 0$ в Q. Если $u(x^{(0)}) \geq -1$ для некоторого $x^{(0)} \in Q$, $|x^{(0)}| > R_0 + 2$, то $M - u(x^{(0)}) \leq M + 1$, и, согласно слабому неравенству Харнака для неотрицательных суперрешений [12, теорема 8.18],

$$M - \widetilde{u}(x^{(0)}) \leq C(M - u(x^{(0)})) \leq C(M+1),$$

где $\widetilde{u}(x^{(0)})$ — среднее значение функции $u(x)$ в круге $\{x : |x - x^{(0)}| < 1\}$, $C = \mathrm{const} > 0$ зависит только от постоянных эллиптичности λ_1, λ_2. Тогда в силу интегрального неравенства Иенсена

$$\int_{|x-x^{(0)}|<1} e^u\, dx \geq \pi \exp\big\{ \widetilde{u}(x^{(0)}) \big\} \geq C_1 = \mathrm{const} > 0,$$

что невозможно в силу теоремы 1, если $|x^{(0)}|$ достаточно велик. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда*

$$\int_{Q(R_1+1,\infty)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\, dx < \infty,$$

R_1 — постоянная из леммы 5.

Доказательство. Пусть $R > R_1 + 1$, $\varphi(|x|) = (2R - |x|)/R$; $\Phi(|x|) = |x| - R_1$ при $R_1 < |x| < R_1 + 1$, $\Phi(|x|) = 1$ при $R_1 + 1 \le |x| \le R$, $\Phi = \varphi^2(|x|)$ при $R \le |x| \le 2R$. Полагая в интегральном тождестве (2) $v = \Phi/u$, получим, учитывая эллиптичность уравнения (1) и неравенство $u < 0$ в $Q(R_1, \infty)$, что

$$\int_{Q(R_1,2R)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\Phi\,dx \le c_0 + c_1\left(R^{-1}\int_{Q(R,2R)} \frac{|\nabla u|}{u}\varphi\,dx + \int_{Q(R_1,2R)} \frac{e^u}{u}\Phi\,dx\right)$$
$$\le c_0 + \int_{Q(R,2R)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx + c_2R^{-2}\int_{Q(R,2R)} dx \le c_3 + \int_{Q(R,2R)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\varphi^2\,dx,$$

c_k не зависят от R. Отсюда, с учетом того, что $\Phi = \varphi^2$ в $Q(R, 2R)$, получим

$$\int_{Q(R_1+1,R)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx \le c_3,$$

Лемма, таким образом, доказана.

Лемма 7. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех натуральных $N > N(\varepsilon)$ найдутся различные натуральные*

$$r_1, r_2, \ldots, r_N, r_{N+1} \in [2N, 4N-1],$$

для которых справедлива оценка

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{\varepsilon}{N}\overline{u}^2(r_i), \qquad i = 1, \ldots, N+1.$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$. Из леммы 6 вытекает, что при $N > N(\delta)$ существуют различные натуральные $r_1, r_2, \ldots, r_N, r_{N+1} \in [2N, 4N-1]$, такие, что

$$\int_{Q_{r_i}} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx \le \frac{\delta}{N}, \quad i = 1, \ldots, N+1.$$

Покажем, что для $r_1, r_2, \ldots, r_N, r_{N+1}$ выполнено требуемое неравенство. Зафиксируем $i = 1, \ldots, N+1$. В силу леммы 5 $u(x) < -1$ для достаточно больших $|x|$. Пусть $M_i = \sup_{Q_{r_i}} |u| = -u(x^{(i)})$, $x^{(i)} \in \overline{Q}_{r_i}$.

Получаем

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\,dx \le M_i^2\int_{Q_{r_i}} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\,dx \le \frac{\delta}{N}M_i^2. \tag{11}$$

Так как функция $w = -u$ является положительным решением уравнения $Lw + a(x)w = 0$, где $a(x) = -e^{u(x)}/u(x)$, $|a(x)| \le e^{u(x)} \le e^{-1}$, то согласно неравенству Харнака имеем

$$M_i \le c_0 w(x) = c_0|u(x)| \tag{12}$$

($c_k > 0$ здесь и далее в доказательстве не зависят от N, i, δ) для всех x, таких, что $|x - x^{(i)}| < 1$, в частности при $x = \lambda x^{(i)}$, $r_i < |x| < r_i + 1$, $\lambda > 0$. Заметим, что существует множество $\mathcal{R}_i \subset [r_i, r_i+1]$, такое, что $\operatorname{mes}\mathcal{R}_i > 1/2$, и для почти всех $r \in \mathcal{R}_i$ справедлива оценка

$$\int_{S_r} |\nabla u|^2\,ds \le 2\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\,dx.$$

Тогда для п.в. $r \in \mathcal{R}_i$, используя теорему вложения для функций одной переменной и неравенство Пуанкаре на S_r, получим

$$\sup_{S_r} |u - \overline{u}(r)| \le c_1 r^{1/2}\biggl(\int_{S_r} |\nabla u|^2\, ds\biggr)^{1/2} \le c_2 N^{1/2}\biggl(\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx\biggr)^{1/2}.$$

Тогда из (12) получаем

$$M_i \le c_0|\overline{u}(r)| + c_3 N^{1/2}\biggl(\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx\biggr)^{1/2}.$$

Из (11) тогда следует, что

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{c_4\delta}{N}\overline{u}^2(r) + c_5\delta\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx.$$

Если $c_5\delta \le 1/2$, то

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{2c_4\delta}{N}\overline{u}^2(r), \quad r \in \mathcal{R}_i. \tag{13}$$

Используя лемму 1 получим

$$|\overline{u}(r)| \le |\overline{u}(r_i)| + c_6 \ln^{1/2}\left(\frac{r}{r_i}\right)\biggl(\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx\biggr)^{1/2}$$
$$\le |\overline{u}(r_i)| + \frac{c_6}{(2N)^{1/2}}\biggl(\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx\biggr)^{1/2}.$$

Тогда из (13) получаем

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{c_7\delta}{N}\overline{u}^2(r_i) + \frac{c_8\delta}{N^2}\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx,$$
$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{2c_7\delta}{N}\overline{u}^2(r_i),$$

если $c_8\delta/N^2 \le 1/2$. Взяв $\delta = \min\{(2c_5)^{-1}, (2c_8)^{-1}, \varepsilon/(2c_7)\}$ для произвольного $\varepsilon > 0$, получим утверждение леммы.

Основная трудность при переходе от классического уравнения Гаусса с оператором Лапласа к уравнению с переменными коэффициентами является отсутствие прямого соотношения между средним значением решения по окружности и „потоком тепла“ решения через окружность. Следующее утверждение можно рассматривать как некоторый аналог такого соотношения.

Лемма 8. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда при $R > R_0 + 1$ справедлива оценка*

$$\overline{V}(R)\overline{P}(R,u) - \int_{Q(R_0,R+1)} e^u V\Phi_{R_0,1;R,1}\, dx - I_R \le \overline{u}(R)$$
$$\le \overline{V}(R)\overline{P}(R,u) - \int_{Q(R_0,R+1)} e^u V\Phi_{R_0,1;R,1}\, dx + I_R,$$

где V - фундаментальное решение уравнения $LV = 0$, $P(R,V) = 1$,

$$0 \le I_R \le I_0 + c_0 R\biggl(\int_{Q_R} |\nabla V|^2\, dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{Q_R} |\nabla u|^2\, dx\biggr)^{1/2},$$

$I_0 \geq 0$ *не зависит от* R*;* $c_0 > 0$ *не зависит от* R*,* u*.*

Доказательство. Полагая в интегральном тождестве для $V(x)$ пробную функцию $v = u\Phi_{R_0,1;R,1}$, получаем, что

$$\int_{Q(R_0,R+1)} \Phi_{R_0,1;R,1} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx$$
$$= \int_{Q_R} u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx - \int_{Q_{R_0}} u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx.$$

Полагая в интегральном тождестве (2) для $u(x)$ пробную функцию $v = V\Phi_{R_0,1;R,1}$, получим

$$\int_{Q(R_0,R+1)} \Phi_{R_0,1;R,1} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}\, dx = -\int_{Q(R_0,R+1)} e^u V \Phi_{R_0,1;R,1}\, dx$$
$$+ \int_{Q_R} V \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx - \int_{Q_{R_0}} V \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx.$$

Из двух последних равенств, учитывая симметричность матрицы a_{ij}, получаем, что

$$\int_{Q_R} u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx = \int_{Q_R} V \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx - \int_{Q(R_0,R+1)} e^u V \Phi_{R_0,1;R,1}\, dx + I_0',$$

I_0' не зависит от R. Отсюда

$$\overline{u}(R) = \overline{V}(R)\overline{P}(R,u) - \int_{Q(R_0,R+1)} e^u V \Phi_{R_0,1;R,1}\, dx$$
$$+ \int_{Q_R} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \left((V - \overline{V}(R)) \frac{\partial u}{\partial x_i} - (u - \overline{u}(R)) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{|x|}\, dx + I_0'. \tag{14}$$

Используя неравенства Коши — Буняковского и Пуанкаре, получаем

$$\left| \int_{Q_R} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \left((V - \overline{V}(R)) \frac{\partial u}{\partial x_i} - (u - \overline{u}(R)) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{|x|}\, dx \right|$$
$$\leq c_0 R \left(\int_{Q_R} |\nabla V|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_R} |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2},$$

$c_0 > 0$ не зависит от R, u. Тогда из (14) получаем утверждение леммы.

Лемма 9. *Пусть* $u(x)$ *- решение* (1) *в* Q*. Тогда существует последовательность натуральных* $R_k \in [2^k, 2^{2k} - 1]$*,* $k \in \mathbb{N}$*, для которых справедливы соотношения*

$$\overline{u}(R_k) = P_0 \overline{V}(R_k) + o(k),$$
$$\int_{Q_{R_k}} |\nabla u|^2\, dx = \frac{o(k^2)}{R_k}, \qquad k \to \infty,$$

где $P_0 = \mathrm{const} = \lim_{R\to\infty} P(R,u)$*,* $V(x)$ *— фундаментальное решение уравнения* $LV = 0$*,* $P(R,V) \equiv 1$*.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $j \in \mathbb{N}$, $2^j > R_0$. Применяя лемму 7 для $N = 2^{j-1}$, получим, что существуют различные натуральные $r_1, r_2, \dots, r_{1+2^{j-1}} \in [2^j, 2^{j+1}-1]$, для которых

$$\int_{Q_{r_i}} |\nabla u|^2\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2^j} \overline{u}^2(r_i). \tag{15}$$

В силу леммы 2 для фундаментального решения уравнения $LV = 0$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\int_{Q(2^k, 2^{2k})} |\nabla V|^2\, dx \leq c_1 k$, здесь и далее в доказательстве $c_l > 0$ не зависят от $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ найдется натуральное $j \in [k, 2k-1]$, такое, что

$$\int_{Q(2^j, 2^{j+1})} |\nabla V|^2\, dx \leq c_1.$$

Тогда существуют натуральные $r'_1, r'_2, \dots, r'_{1+2^{j-1}} \in [2^j, 2^{j+1}-1]$, для которых

$$\int_{Q_{r'_i}} |\nabla V|^2\, dx \leq \frac{c_2}{2^j}. \tag{16}$$

Тогда существует $R_k = r_i = r'_{i'} \in [2^j, 2^{j+1}-1]$, для которого выполнены обе оценки (15) и (16). Из леммы 8, учитывая, что

$$\int_Q e^u\, dx < \infty, \quad \int_{Q(R_0, R_k+1)} e^u V\, dx = o(\ln R_k) = o(k), \quad \overline{u}(R_k) < 0,$$

получим оценку

$$\begin{aligned} &\overline{P}(R_k, u)\overline{V}(R_k) + c_3\varepsilon^{1/2}\overline{u}(R_k) + o(k) \leq \overline{u}(R_k) \\ &\leq \overline{P}(R_k, u)\overline{V}(R_k) - c_3\varepsilon^{1/2}\overline{u}(R_k) + o(k). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\left(1 - c_3\varepsilon^{1/2}\right)^{-1}\overline{P}(R_k, u)\overline{V}(R_k) + o(k) \leq \overline{u}(R_k) \leq \left(1 + c_3\varepsilon^{1/2}\right)^{-1}\overline{P}(R_k, u)\overline{V}(R_k) + o(k).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - любое, то получаем, что

$$\overline{u}(R_k) = \overline{P}(R_k, u)\overline{V}(R_k) + o(k)$$

для последовательноти натуральных $R_k \in [2^k, 2^{2k}-1]$. С учетом (10) получаем утверждение леммы относительно $\overline{u}(R_k)$. Учитывая (15), получим второе утверждение леммы.

Заметим, что из леммы 9 с учетом леммы 5 сразу следует, что $P_0 < 0$.

Лемма 10. *Пусть* $u(x)$ — *решение* (1) *в* Q. *Тогда*

$$\int_{Q(R, 2R)} |\nabla u|^2\, dx = o(\ln^2 R), \quad R \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $R_0 \le R_1 < R_2$. Полагая в (2) $v = u\Phi_{R_1,1;R_2,1}$, получим

$$\int_{Q(R_1,R_2+1)} \Phi_{R_1,1;R_2,1} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx$$
$$= \int_{Q_{R_2}} u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx - \int_{Q_{R_1}} u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx - \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u u \Phi_{R_1,1;R_2,1}\,dx$$
$$= \int_{Q_{R_2}} \big(u - \overline{u}(R_2)\big) \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx - \int_{Q_{R_1}} \big(u - \overline{u}(R_1)\big) \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx$$
$$+ \overline{P}(R_2,u)\overline{u}(R_2) - \overline{P}(R_1,u)\overline{u}(R_1) - \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u u \Phi_{R_1,1;R_2,1}\,dx.$$

Используя эллиптичность уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{Q(R_1+1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx \\ &\le c_1\bigg(\int_{Q_{R_2}} |\nabla u|\big|u - \overline{u}(R_2)\big|\,dx + \int_{Q_{R_1}} |\nabla u|\big|u - \overline{u}(R_1)\big|\,dx \\ &+ \overline{P}(R_2,u)\overline{u}(R_2) - \overline{P}(R_1,u)\overline{u}(R_1) - \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u u\Phi_{R_1,1;R_2+1}\,dx\bigg) \\ &\equiv c_1(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \tag{17}$$

здесь и далее в доказательстве $c_k > 0$ не зависят от R_1, R_2. Применяя неравенства Коши-Буняковского и Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_{Q_{R_2}} |\nabla u|\big|u - \overline{u}(R_2)\big|\,dx + \int_{Q_{R_1}} |\nabla u|\big|u - \overline{u}(R_1)\big|\,dx \\ &\le c_2\bigg(R_2\int_{Q_{R_2}} |\nabla u|^2\,dx + R_1\int_{Q_{R_1}} |\nabla u|^2\,dx\bigg). \end{aligned} \tag{18}$$

Учитывая, что $u(x) < 0$ при достаточно больших $|x|$, а $\overline{P}(R,u)$ — возрастающая ограниченная функция от R, получаем с учетом леммы 1, что

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \overline{P}(R_2,u)\overline{u}(R_2) - \overline{P}(R_1,u)\overline{u}(R_1) \\ &= \overline{P}(R_2,u)\big(\overline{u}(R_2) - \overline{u}(R_1)\big) + \overline{u}(R_1)\big(\overline{P}(R_2,u) - \overline{P}(R_1,u)\big) \\ &\le |\overline{P}(R_2,u)|\big|\overline{u}(R_2) - \overline{u}(R_1)\big| \le c_3 \ln^{1/2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\bigg(\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\,dx\bigg)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\,dx + c_4\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (17).

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv -\int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u u\Phi_{R_1,1;R_2,1}\,dx \le \\ &\le \int_{R_1}^{R_2+1} dr\int_{S_r} \big|u - \overline{u}(r)\big|e^u\,ds + \int_{R_1}^{R_2+1} |\overline{u}(r)|\,dr\int_{S_r} e^u\,ds \equiv I_3' + I_3''. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя оценку $\sup_{S_r} |u-\overline{u}(r)| \le cr^{1/2}\big(\int_{S_r} |\nabla u|^2\, ds\big)^{1/2}$ и утверждение леммы 4 при $\delta = 1$, получим

$$
\begin{aligned}
I_3' &\equiv \int_{R_1}^{R_2+1} dr \int_{S_r} \big|u - \overline{u}(r)\big| e^u\, ds \\
&\le c_5 \int_{R_1}^{R_2+1} r^{1/2} \bigg(\int_{S_r} |\nabla u|^2\, ds\bigg)^{1/2} dr \int_{S_r} e^u\, ds \\
&\le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + c_6 \int_{R_1}^{R_2+1} r \bigg(\int_{S_r} e^u\, ds\bigg)^2 dr \\
&\le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + c_7 \int_{Q(R_1,R_2+1)} |x|^2 e^{2u}\, dx \\
&\le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + c_7 \ln^2(R_2+1) \int_{Q(R_1,R_2+1)} \frac{|x|^2 e^{2u}}{\ln^2|x|}\, dx \\
&= \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + o(\ln^2 R_2), \quad R_1, R_2 \to \infty.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Пусть $R_1 \le 2^l$, $2^{2l} \le R_2$, $l \in \mathbb{N}$. В силу леммы 9 существует натуральное $\eta \in [2^l, 2^{2l}-1]$, для которого справедлива оценка $|\overline{u}(\eta)| \le c_8 \ln \eta \le c_8 \ln R_2$. Отсюда получаем, что

$$
\begin{aligned}
I_3'' &\equiv \int_{R_1}^{R_2+1} |\overline{u}(r)|\, dr \int_{S_r} e^u\, ds = |\overline{u}(\xi)| \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u\, dx \\
&\le |\overline{u}(\xi) - \overline{u}(\eta)| \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u\, dx + |\overline{u}(\eta)| \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u\, dx,
\end{aligned} \tag{22}
$$

где $\xi \in (R_1, R_2+1)$. Очевидно, что второе слагаемое в правой части (22) есть $o(\ln R_2)$ при $R_1, R_2 \to \infty$. Оценим первое слагаемое, используя лемму 1:

$$
\begin{aligned}
&|\overline{u}(\xi) - \overline{u}(\eta)| \int_{Q(R_1,R_2+1)} e^u\, dx \le o(1) \ln^{1/2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \bigg(\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx\bigg)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + o(\ln R_2).
\end{aligned}
$$

Тогда из (22)

$$
I_3'' \le \frac{1}{6}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx + o(\ln R_2). \tag{23}
$$

Из оценок (17)-(21) и (23) получаем, что

$$
\begin{aligned}
\int_{Q(R_1+1,R_2)} |\nabla u|^2\, dx &\le \frac{1}{2}\int_{Q(R_1,R_2+1)} |\nabla u|^2\, dx \\
&+ c_2\bigg(R_2 \int_{Q_{R_2}} |\nabla u|^2\, dx + R_1 \int_{Q_{R_1}} |\nabla u|^2\, dx\bigg) + o(\ln^2 R_2).
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\int_{Q(R_1+1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx \le c_9\biggl(R_2\int_{Q_{R_2}} |\nabla u|^2\,dx + R_1\int_{Q_{R_1}} |\nabla u|^2\,dx\biggr) + o(\ln^2 R_2). \tag{24}$$

Пусть $2^{2k} \le R < 2^{4k}$, $k \in \mathbb{N}$. Возьмем натуральные $R_1 = R_k^{(1)} \in [2^k, 2^{2k}-1]$ и $R_2 = R_k^{(2)} \in [2^{4k+1}, 2^{8k+2}-1]$, таких, что согласно лемме 9 выполнена оценка

$$\int_{Q_{R_k^{(m)}}} |\nabla u|^2\,dx = \frac{o(k^2)}{R_k^{(m)}}, \qquad m = 1, 2.$$

Очевидно, что R_1, R_2 удовлетворяют условиям $R_1 < 2^l$ и $2^{2l} < R_2$ при $l = 2k$, поэтому справедлива оценка (24). Учитывая, что $R_1 + 1 \le R$ и $2R < R_2$, из оценки (24) тогда получим, что

$$\int_{Q(R,2R)} |\nabla u|^2\,dx \le \int_{Q(R_1+1,R_2)} |\nabla u|^2\,dx = o(k^2) + o(\ln^2 R_2) = o(\ln^2 R).$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $u(x)$ - решение* (1) *в Q. Тогда при $x \in Q(R, 2R)$*

$$u(x) = \overline{u}(R) + o(\ln R).$$

Доказательство. В силу оценки Де Джорджи [12, теорема 8.17] получаем

$$\sup_{Q(R,2R)} \bigl|u-\overline{u}(R)\bigr|^2 \le c_1\biggl(R^{-2}\int_{Q(R/2,4R)} \bigl|(u-\overline{u}(R)\bigr|^2\,dx + R^2\int_{Q(R/2,4R)} e^{2u}\,dx\biggr).$$

Используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\sup_{Q(R,2R)} \bigl|u-\overline{u}(R)\bigr|^2 \le c_2\biggl(\int_{Q(R/2,4R)} |\nabla u|^2\,dx + \ln^2 R\int_{Q(R/2,4R)} \frac{|x|^2 e^{2u}}{\ln^2|x|}\,dx\biggr),$$

c_1, c_2 не зависят от R. Тогда из леммы 10 и леммы 4 при $\delta = 1$ получим оценку

$$\sup_{Q(R,2R)} \bigl|u-\overline{u}(R)\bigr|^2 = o(\ln^2 R).$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — решение* (1) *в Q. Тогда*

$$u(x) = P_0 V(x) + o(\ln|x|), \qquad |x| \to \infty,$$

где $P_0 = \lim_{R\to\infty} P(R,u) < 0$, $V(x)$ — фундаментальное решение уравнения $LV = 0$, $P(R,V) \equiv 1$.

Доказательство. Согласно лемме 9 для некоторой последовательности

$$R_k \to \infty, \quad k \to \infty,$$

справедливо соотношение

$$\overline{u}(R_k) = P_0\overline{V}(R_k) + o(\ln R_k). \tag{25}$$

Согласно лемме 11 при $x \in Q(R_k, 2R_k)$

$$u(x) = \overline{u}(R_k) + o(\ln R_k).$$

Используя (25), получаем, что при $x \in Q(R_k, 2R_k)$ справедлива оценка

$$u(x) = P_0\overline{V}(R_k) + o(\ln R_k). \tag{26}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что для $k \geq k_0(\varepsilon)$ и $x \in Q(R_k, 2R_k)$ выполнено неравенство

$$P_0\overline{V}(R_k) \leq (P_0 + \varepsilon/2)V(x).$$

Тогда из (26) получаем в $Q(R_k, 2R_k)$ и следовательно на S_{R_k} оценку

$$u(x) \leq (P_0 + \varepsilon)V(x), \tag{27}$$

$k \geq k_1(\varepsilon)$. Применяя принцип максимум в областях $Q(R_k, R_{k+1})$, тогда получаем, что оценка (27) справедлива в $Q(R_{k_1}, \infty)$.

Покажем, что справедлива аналогичная оценка снизу $u(x) \geq (P_0 - \varepsilon)V(x)$ при достаточно больших $|x|$. Поскольку в силу лемм 11 и 3 отклонения на S_R функций $u(x)$ и $V(x)$ от $\overline{u}_R$ и $\overline{V}(R)$ есть $o(\ln R)$, достаточно доказать оценку

$$\overline{u}(R) \geq (P_0 - \varepsilon)\overline{V}(R).$$

Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $R'_k \to \infty$ выполняется неравенство

$$\overline{u}(R'_k) < (P_0 - \varepsilon_0)\overline{V}(R'_k).$$

Тогда снова используя малость отклонений $u(x)$ и $V(x)$ от средних значений, получаем при $x \in S_{R'_k}$ и $k \geq k_2 = \mathrm{const}$ оценку

$$u(x) \leq (P_0 - \varepsilon_0/2)V(x).$$

Из принципа максимума следует, что последнее неравенство выполняется в $Q(R'_{k_2}, \infty)$, что противоречит оценке (25) для последовательности $R_k \to \infty$. Таким образом, при $R > R(\varepsilon)$ выполнена оценка

$$u(x) \geq (P_0 - \varepsilon)V(x).$$

С учетом верхней оценки (27) теорема полностью доказана.

В заключение получим оценку сверху отношения $u(x)/\ln|x|$.

Теорема 3. *Пусть* $u(x)$ — *решение* (1) *в* Q. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $|x| > R_1(\varepsilon) = \mathrm{const}$ *справедлива оценка*

$$u(x) \leq -(2 - \varepsilon)\ln|x|.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\overline{u}(R_k) \geq -(2 - \varepsilon/2)\ln R_k, \quad R_k \to \infty.$$

Тогда в силу леммы 11 для $r \in (R_k, 2R_k)$ имеем для достаточно больших k

$$\overline{u}(r) \geq -(2 - \varepsilon/3)\ln R_k.$$

В силу интегрального неравенства Иенсена

$$\int_{Q(R_k,2R_k)} e^u\,dx = \int_{R_k}^{2R_k} r\,dr \int_0^{2\pi} e^{u(r,\theta)}\,d\theta \geq 2\pi \int_{R_k}^{2R_k} re^{\overline{u}(r)}\,dr > cR_k^{\varepsilon/3},$$

$c > 0$ не зависит от k, что противоречит теореме 1. Таким образом, при всех $R > R_2(\varepsilon)$ выполнена оценка

$$\overline{u}(R) < -(2 - \varepsilon/2)\ln R.$$

Тогда из леммы 11 получаем, что при $R > R_1(\varepsilon)$

$$u(x) \leq -(2-\varepsilon)\ln|x|.$$

Теорема, таким образом, доказана.

References

[1] I. N. Vekua, *Some properties of solutions of Gauss equation*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **64** (1961), 5–8. Zbl 0117.04402

[2] L. Bieberbach, $\Delta u = e^u$ *and automorphic funktions*, Math. Ann., **77** (1916), 173–212.

[3] H. Rademacher, *Differential and integral equations of mechanics und physics*, Braunschweig, Vieweg, 1935.

[4] V. A. Kondrat'ev, O. A. Oleinik, *On asymptotics for solutions to nonlinear elliptic equations*, Russ. Math. Surv., **48**:4 (1993), 184–185.

[5] O. A. Oleinik, *Some asymptotic problems in the theory of partial differential equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. Zbl 1075.35500

[6] A. I. Nasrullaev, *Asymptotics of solutions of Neumann's problem for the equation* $\Delta u - e^u = 0$ *in a semi-infinite cylinder*, Russ. Math. Surv., **50**:3 (1995), 161–162. Zbl 0849.35010

[7] A. V. Neklyudov, *Behavior of solutions to Gauss-Bieberbach-Rademacher equation on plane*, Ufa Mathematical Journal, 2014, **6**:3 (2014), 85—94.

[8] A. V. Neklyudov, *The behavior of solutions of the nonlinear biharmonic equation in an unbounded domain*, Math. Notes, **95**:2 (2014), 224–231. Zbl 1347.35103

[9] A. V. Neklyudov, *The behavior of solutions of semilinear elliptic equations of second order of the* $Lu = e^u$ *in the infinite cylinder*, Math. Notes, **85**:3 (2009), 397–408. Zbl 1177.35086

[10] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3, **17**:1–2 (1963), 43–77. Zbl 0116.30302

[11] V. A. Kondrat'ev, O. A. Oleinik, *Asymptotics in a neighborhood of infinity of solutions with finite Dirichlet integral of second-order elliptic equations*, Journal of Soviet mathematics, **47**:4 (1989), 2596-–2607. Zbl 0689.35010

[12] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differentiol equations of second order*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag, 1983. Zbl 0562.35001

Aleksey Vladimirivich Nekludov
Bauman Moscow State Technical University,
ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1,
105005, Moscow, Russia
E-mail address: nekl5@yandex.ru