S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 35–47 (2018) УДК 510.6
DOI 10.17377/semi.2018.15.005 MSC 03B45

СИЛЬНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ СЛОЕВ НАД ЛОГИКОЙ Gl

Л.Л. МАКСИМОВА, В.Ф. ЮН

Abstract. In [2] the classification of extensions of the minimal logic J using slices was introduced and decidability of the classification was proved. We will consider extensions of the logic $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (A \vee \neg A)$. The logic Gl and its extensions have been studied in [8, 9]. In [6], it is established that the logic Gl is strongly recognizable over J, and the family of extensions of the logic Gl is strongly decidable over J. In this paper we prove strong decidability of the classification over Gl: for every finite set *Rul* of axiom schemes and rules of inference, it is possible to efficiently calculate the slice number of the calculus obtained by adding *Rul* as new axioms and rules to Gl.
Keywords: The minimal logic, slices, Kripke frame, decidability, recognizable logic.

Введение

Статья посвящена исследованию слоев над минимальной логикой J Йохансона [1]. Классификация расширений минимальной логики с помощью слоев была введена в [2], она продолжает широко известную классификацию суперинтуиционистских логик, предложенную Хосои [3].

В [2] доказана разрешимость классификации над логикой J: номер слоя эффективно вычислим для любого аксиоматического расширения минимальной логики. Алгоритм вычисления, основанный на реляционной семантике, описан в [4]. Кроме того, в [2] установлено, что каждый слой имеет конечное число максимальных логик, причем наименьшие и максимальные логики всех слоев узнаваемы над J.

Maksimova, L.L., Yun, V.F., Strong computability of slices over the logic Gl.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

Поступила 29 декабря 2016 г., опубликована 18 января 2018 г.

В [5] была доказана сильная разрешимость классификации Хосои над интуиционистской логикой Int. Это означает, что существует алгоритм для вычисления номера слоя суперинтуиционистской логики, заданной исчислением $(Int + Rul)$, по любому конечному списку Rul дополнительных схем аксиом и правил вывода. Кроме того, наименьшие и наибольшие логики слоев над Int сильно узнаваемы над Int. Сильная разрешимость классификации над наименьшей негативной логикой Neg$=$ J$+\bot$ следует из результатов статьи [6].

Проблема сильной разрешимости классификации над J остается нерешенной.

В [7] установлено, что каждый слой с конечным номером сильно разрешим над J, а наименьшие логики всех слоев сильно различимы над J. Сильная разрешимость бесконечного слоя над J остается под вопросом.

В этой статье мы рассмотрим расширения логики Gl $=$ J $+ (A \vee \neg A)$. Логика Gl и ее расширения изучались в [8, 9]. В [6] установлено, что логика Gl сильно узнаваема над J, а семейство расширений логики Gl сильно разрешимо над J.

Мы докажем, что классификация с помощью слоев сильно разрешима над Gl. Таким образом, по любому исчислению $(Gl + Rul)$ можно эффективно вычислить номер слоя этого исчисления.

Для доказательства разрабатываются семантические методы, основанные на реляционной семантике минимальной логики. Ключевую роль играют так называемые тонкие шкалы, введенные в [2].

Алгоритм для вычисления номера слоя представлен в заключительном параграфе.

1. Предварительные сведения

Обозначаем через J минимальное исчисление. Язык исчисления содержит пропозициональные связки $\&, \vee, \to$ и пропозициональную константу $\bot$; используем сокращения: $\top = \bot \to \bot$, $\neg A = (A \to \bot)$, $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$.

Исчисление J задается теми же схемами аксиом, что и интуиционистское позитивное исчисление, и правилом modus ponens: $A, A \to B/\ B$.

Для любого исчисления L_0 и множества Ax схем аксиом обозначаем через $L_0 + Ax$ исчисление, полученное из L_0 добавлением Ax в качестве новых схем аксиом; такое исчисление называем *аксиоматическим расширением* L_0. Если Rul – некоторое множество схем аксиом и правил вывода, обозначаем через $L_0 + Rul$ исчисление, полученное из L_0 добавлением схем аксиом и правил из Rul. При этом предполагается, что все правила вывода инвариантны относительно подстановки, так что множество теорем исчисления замкнуто относительно подстановки. Обозначаем

$Gl = J + (A \vee \neg A)$, $Neg = J + \bot$, $For = J + A$,

$Int = J + (\bot \to A)$, $Cl = Int + Gl$,

$LC = Int + ((A \to B) \vee (B \to A))$, $NC = Neg + ((A \to B) \vee (B \to A))$.

Для указанных исчислений обозначаем через J, Int, Neg, For, Gl, Cl, LC, NC множество теорем, т.е. доказуемых формул соответствующего исчисления.

Множество $T(L)$ теорем исчисления L является J-логикой. Множество формул называется J-*логикой*, если оно содержит J и замкнуто относительно правила modus ponens и подстановки. Множество теорем исчисления L часто обозначаем через L. Для данной логики L часто пишем L $\vdash A$ вместо $A \in$ L.

Логика называется *нетривиальной*, если не совпадает с For, *суперинтуиционистской*, если содержит Int, и *негативной*, если содержит Neg.

Для исчислений L_1, L_2 пишем $L_1 \leq L_2$, если все формулы, доказуемые в L_1, доказуемы в L_2. Исчисления L_1, L_2 называем *эквивалентными* и пишем $L_1 \equiv L_2$, если $L_1 \leq L_2$ и $L_2 \leq L_1$. Используем аналогичные обозначения и в случаях, когда L_1 или L_2 является логикой. Например, если L_1 – исчисление, а L_2 – логика, запись $L_1 \leq L_2$ означает, что множество теорем исчисления L_1 содержится в L_2.

Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *узнаваемой над* J [10], если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом устанавливает, верно ли соотношение $(J + Ax) \equiv \mathrm{L}$. Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *сильно узнаваемой над* J [6], если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода проверяет, верно ли $(J + Rul) \equiv \mathrm{L}$.

Например, логики Neg, For, Gl, Cl, LC, NC сильно узнаваемы над J [6], а логика Int узнаваема над J [10].

Говорим, что формула A *сильно различима* (или *сильно разрешима*) *над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода устанавливает, выводима ли A в исчислении $L_0 + Rul$. Формулу A называем *различимой* (или *разрешимой*) *над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом проверяет выводимость A в $L_0 + Ax$.

Очевидно, сильная различимость формулы A над J равносильна разрешимости проблемы включения $J + Rul \geq J + A$. Ясно, что любая конъюнкция сильно различимых формул является сильно различимой. Также заметим, что для любых формул A и B, если $L_0 + A \equiv L_0 + B$ и формула A сильно различима над L_0, то B также сильно различима над L_0.

Логику будем называть *различимой* (*сильно различимой*) *над* L_0, если она аксиоматизируема над L_0 с помощью конечного множества различимых (соответственно, сильно различимых) аксиом

Узнаваемость логики равносильна ее одновременной различимости и разрешимости [10]. Из сильной различимости не следует сильная узнаваемость [6]. Неизвестно, верна ли обратная импликация.

Известно, что логики Neg, For, Gl, Cl, LC, NC сильно различимы над J [6], а логика Int различима [10].

Семейство J-логик S называется *разрешимым* (*сильно разрешимым*), если существует алгоритм, который для любого исчисления $J + Ax$ (соответственно, $J + Rul$) проверяет, входит ли его логика в множество S.

Ясно, что J-логика различима или сильно различима над J, если и только если семейство ее расширений разрешимо (соответственно, сильно разрешимо).

2. Слои и уровни

Разбиение J-логик на слои было введено в [2]. Пусть

$$\pi_0 = p_0, \ \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Говорим, что L есть логика $(n+1)$*-го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For – это единственная логика нулевого слоя. L – логика *конечного слоя*, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае.

Множество J-логик n-го слоя обозначаем через Π_n, $0 \leq n \leq \omega$.

Очевидно, $\mathrm{J} \vdash \pi_n \to \pi_{n+1}$. Напротив, формула π_n невыводима в $\mathrm{J}\pi_{\mathrm{n+1}} = (\mathrm{J} + \pi_{\mathrm{n+1}})$. Поэтому все слои непусты и попарно не пересекаются.

В [7] было введено еще одно разбиение семейства J-логик. Пусть

$$\lambda_0 = \bot, \ \lambda_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \lambda_n).$$

Говорим, что L есть логика *нулевого уровня*, если $L \vdash \lambda_0$; L есть логика $(n+1)$*-го уровня*, $n \geq 0$, если $L \vdash \lambda_{n+1}$ и $L \not\vdash \lambda_n$. L – логика *конечного уровня*, если $L \vdash \lambda_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного уровня* в противном случае.

Ясно, что Neg есть наименьшая логика нулевого уровня, а $\mathrm{Gl} = \mathrm{J}+\lambda_1$ – наименьшая логика первого уровня.

Говорим, что исчисление принадлежит n-му слою или уровню, если его логика принадлежит этому слою (соответственно, уровню).

На множестве суперинтуиционистских логик слои и уровни не различаются, так как $Int+\pi_n \equiv Int+\lambda_n$. Определение слоев над Int было введено Хосои [3].

В [5] была доказана сильная разрешимость классификации Хосои над интуиционистской логикой.

Все слои и уровни непусты. Для каждого натурального n логика $\mathrm{J}\pi_n = \mathrm{J}+\pi_n$ является наименьшей логикой слоя Π_n, а логика J – наименьшая в Π_ω.

В [7] доказано, что по любому конечному списку Rul схем аксиом и правил вывода можно эффективно вычислить номер уровня исчисления $J+Rul$. Таким образом, эта классификация сильно разрешима.

В [2] доказана разрешимость классификации с помощью слоев: номер слоя эффективно вычислим для любого аксиоматического расширения логики J. Алгоритм вычисления, основанный на реляционной семантики, описан в [4]. Кроме того, в [2] установлено, что каждый слой имеет конечное число максимальных логик, причем наименьшие и максимальные логики всех слоев узнаваемы над J.

В [7] установлено, что каждый слой Π_n с конечным индексом n сильно разрешим над J. Также доказано, что наименьшие логики всех слоев сильно различимы над J. Ясно, что отсюда следует сильная разрешимость каждого конечного слоя над Gl и сильная различимость над Gl логик $\mathrm{Gl} + \pi_n$.

Далее мы докажем сильную разрешимость бесконечного слоя над Gl.

3. Реляционная семантика

В [11] была доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В [12] была предложена модификация этой семантики, удобная для наших целей.

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию:

$x \in X, \ x \leq y \Rightarrow y \in X$.

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W – непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q – конус множества W, содержащий ∞.

Элементы, отличные от ∞, называем *существенными*, элементы из $(W-Q)$ — *нормальными*, а из Q — *ненормальными*. Элемент y называем *последователем* элемента x, а x — *предшественником* y, если $y > x$; минимальных последователей элемента x называем *покрытиями* элемента x.

Шкала называется *главной*, если она конечна и имеет наименьший элемент.

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если W_1 — конус множества W, $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Моделью называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ – шкала, $\models$ – отношение между элементами множества W и формулами, удовлетворяющее условиям:

(1) $x \models p,\ x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной p;

(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Лемма 3.1. *Для любой модели M верно:*

(1) $\infty \models A$ для любой формулы A;

(2) $x \models A,\ x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A.

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой, в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Говорим, что формула A *общезначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и пишем $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели M, основанной на $\mathbf{W}$.

Правило $A_1, \ldots, A_n/\ B$ называем *верным*, или *общезначимым, в шкале* $\mathbf{W}$, если

$$(\forall i \leq n)(M \models A_i) \Rightarrow M \models B$$

для любой модели M, основанной на $\mathbf{W}$.

Шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет множеству* Rul, составленному из аксиом и правил вывода, если все аксиомы и правила из Rul общезначимы в $\mathbf{W}$. В этом случае пишем $\mathbf{W} \models Rul$.

Заметим, что модифицированные модели отличаются от моделей Сегерберга [11] лишь добавлением элемента ∞. Это усложнение позволяет нам определить понятие p-морфизма и установить соответствие между p-морфизмами и подалгебрами J-алгебр, аналогичное соответствию для гейтинговых алгебр [13, 14].

Даны шкалы $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет условиям:

(p1) $x, y \in W_1, x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;

(p2) $x \in W_1, y \in W_0, \theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;

(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_2$.

Пусть $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ и $M_2 = (W_2, \leq_2, Q_2, \models_2)$ — две модели, Var — множество переменных. Называем *Var-морфизмом* p-морфизм θ шкалы $(W_1, \leq_1, Q_1)$ на $(W_2, \leq_2, Q_2)$ такой, что для любого $x \in W_1$ и любой переменной p из Var:

$$x \models_1 p \iff \theta(x) \models_2 p.$$

Индукцией по длине формулы, стандартным образом доказывается

Лемма 3.2. *Пусть $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ и $M_2 = (W_2, \leq_2, Q_2, \models_2)$ — две модели, θ — Var-морфизм модели M_1 на M_2. Тогда для любой формулы A, все переменные которой входят в Var, и для любого $x \in W_1$:*

$$x \models_1 A \iff \theta(x) \models_2 A.$$

Пусть $\mathbf{W}_i = (W_i, R_i, Q_i)$, где $i \in I$ — шкалы, причем $W_i \cap W_j = \{\infty\}$ для любых $i \neq j$.

Прямой суммой шкал $\mathbf{W}_i = (W_i, R_i, Q_i)$, $i \in I$, называем шкалу $\mathbf{W} = (W, R, Q)$, удовлетворяющую условиям:

$W = \bigcup\{W_i \mid i \in I\}$, $Q = \bigcup\{Q_i \mid i \in I\}$, $R = \bigcup\{R_i \mid i \in I\}$.

Имеет место

Лемма 3.3. *Общезначимость правил вывода сохраняется при взятии p-морфизмов и прямых сумм.*

Доказательство. Легко следует из определений и леммы 3.2.

□

Заметим, что общезначимость правил не сохраняется при взятии конусов.

Говорим, что шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет логике* L, если все формулы из L общезначимы в $\mathbf{W}$.

Шкала $\mathbf{W}$ называется Gl-*шкалой*, если удовлетворяет логике Gl. Легко видеть, что шкала является Gl-шкалой тогда и только тогда, когда все ее нормальные элементы попарно несравнимы. Логика Gl полна относительно класса Gl-шкал. Имеет место

Предложение 3.4. [11] *Формула является теоремой логики* Gl *тогда и только тогда, когда она общезначима во всех* Gl*-шкалах.*

4. Характеризация слоев

Напомним, что L – логика конечного слоя, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, где $\pi_0 = p_0$, $\pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$.

Высотой $h(W)$ шкалы $\mathbf{W}$ называем супремум длин конечных цепей в множестве $W - \{\infty\}$. *Высотой* $h(x)$ элемента x называем супремум длин конечных цепей в множестве $W - \{\infty\}$, начинающихся с x.

Имеет место

Лемма 4.1. [2] *Для любой шкалы* $\mathbf{W}$ *и* $n < \omega$*:*

$$\mathbf{W} \models \pi_n \iff h(\mathbf{W}) \leq n.$$

Следующая теорема показывает, что бесконечный слой J-логик имеет точно две максимальные логики.

Предложение 4.2. [2] J*-логика* L *является логикой бесконечного слоя* $\iff$ ($L \subseteq$ LC *или* $L \subseteq$ NC).

Пусть Rul – конечное множество аксиом и правил вывода. Поскольку включение в LC сильно разрешимо над J [6], можно эффективно проверить, содержится ли в LC логика $L = J + Rul$. Если $L \leq LC$, то L – логика бесконечного слоя. В противном случае L – логика конечного уровня, и для вычисления номера слоя важную роль играет

Предложение 4.3. [7]

Пусть $(J+Rul)$ – исчисление конечного уровня. Тогда

$(J+Rul) \not\vdash \pi_n$, если и только если существует конечная тонкая шкала высоты больше, чем n, удовлетворяющая Rul.

Шкала называется *тонкой*, если множество ненормальных элементов линейно упорядочено.

5. Тонкие шкалы

Рассмотрим p-морфизмы тонких шкал.

Легко видеть, что p-морфный образ тонкой шкалы снова является тонкой шкалой.

В этом параграфе мы докажем теорему 5.4 о тонких шкалах. Для доказательства потребуется ряд лемм.

Лемма 5.1. *(О продолжении p-морфизма) Пусть $\mathbf{X}$ – конус* J*-шкалы $\mathbf{W} = (W, \le, Q)$, θ – p-морфизм из $\mathbf{X} = (X, \le, X\cap Q)$ на $\mathbf{Y} = (Y, \le_{\mathbf{Y}}, Q_{\mathbf{Y}})$, где $(W - X)\cap Y = \emptyset$, $W_1 = (W-X)\cup Y$, $Q_1 = (Q-X)\cup Q_{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{W}_1 = (W_1, \le_1, Q_1)$, причем для $x, y \in W_1$:*

$$x \le_1 y \iff [(x, y \in (W-X) \text{ и } x \le y) \text{или } (x, y \in Y \text{ и } x \le_{\mathbf{Y}} y)$$
$$\text{или } (x \in W \text{ и } \exists v(y = \theta(v) \text{ и } x \le v)].$$

Тогда

1. *$\mathbf{W}_1$ является* J*-шкалой и следующее отображение θ_1 есть p-морфизм из $\mathbf{W}$ на $\mathbf{W_1}$:*
$$\theta_1(x) = x \text{ при } x \in (W-X),\ \theta_1(x) = \theta(x) \text{ при } x \in X;$$
2. *если $M = (\mathbf{W}, \models)$ – модель и θ – Var-морфизм $(\mathbf{X}, \models)$ на $(\mathbf{Y}, \models_1)$, то θ_1 – Var-морфизм M на $M_1 = (\mathbf{W}_1, \models_1)$, где для $x \in (W-X)$ и $p \in Var$:*
$$x \models_1 p \iff x \models p.$$

Доказательство. (1) Следует из определений.

(2) Сразу следует из определения и пункта (1).

□

Шкалу (или модель) будем называть *негативной*, если в ней нет нормальных элементов.

Лемма 5.2. *Пусть Var –список из k переменных, $M = (W, \le, Q, \models)$ – негативная линейно упорядоченная модель. Тогда существует Var-морфизм модели M на негативную модель, содержащую не более $(k+1)$ элементов.*

Доказательство. Положим для $x, y \in W$:

$$x \equiv y \iff (\forall q \in Var)(x \models q \iff y \models q),$$

$$[x] = \{y |\ x \equiv y\}.$$

Положим

$$W_1 = \{[x] |\ x \in W\},\ Q_1 = W_1,$$
$$[x] \le [y] \iff (\forall q \in Var)(x \models q \Rightarrow y \models q),$$

$$[x] \models_1 q \iff x \models q.$$

Поскольку W линейно упорядочено, легко видеть, что модель M_1 – линейно упорядоченная негативная модель, W_1 содержит не более $(k+1)$ элементов, а $\theta(x) = [x]$ — требуемый p-морфизм.

□

Модель M называется *конусом модели* M_1, если ее шкала является конусом шкалы модели M_1, а отношение истинности – ограничением отношения истинности в модели M_1.

Лемма 5.3. *Пусть Var –список из k переменных, $M = (W, \leq, Q, \models)$ – тонкая модель. Тогда существует Var-морфизм модели M на тонкую модель, содержащую не более $(k+1)$ ненормальных элементов.*

Доказательство. Рассмотрим конус $M_2 = (Q, \leq, Q, \models)$ модели M. По лемме 5.2 существуют линейно упорядоченная негативная модель $M_3 = (W_3, \leq_3, Q_3, \models_3)$ и p-морфизм θ_3 шкалы $(Q, \leq, Q)$ на $(W_3, \leq_3, Q_3)$, такие что $Q_3 = W_3$ содержит не более $(k+1)$ элементов и для любого $x \in Q$ и любой переменной q из Var:

$$x \models q \iff \theta_3(x) \models_3 q.$$

По лемме 5.1 строим продолжение θ p-морфизма θ_3, полагая $W_1 = (W - Q) \cup Q_3$, $Q_1 = Q_3$, $\mathbf{W}_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$, где для $x, y \in W_1$:

$$x \leq_1 y \iff [(x, y \in (W - Q) \text{ и } x \leq y) \text{или } (x, y \in Q_3 \text{ и } x \leq_3 y)$$
$$\text{или } (x \in W \text{ и } \exists v (y = \theta_3(v) \text{ и } x \leq v)].$$

Тогда $\mathbf{W}_1$ является J-шкалой и следующее отображение θ_1 есть p-морфизм из $\mathbf{W}$ на $\mathbf{W_1}$:

$$\theta(x) = x \text{ при } x \in (W - Q),\ \theta(x) = \theta_3(x) \text{ при } x \in Q.$$

При этом модель $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$, где для любого $x \in W$ и любой переменной q из Var:

$$x \models q \iff \theta(x) \models_1 q,$$

удовлетворяет требованиям леммы.

□

Теорема 5.4. *Пусть множество Rul аксиом и правил вывода зависит от k переменных. Тогда Rul опровержимо в тонкой шкале $\mathbf{W}$, если и только если существует p-морфизм шкалы $\mathbf{W}$ на некоторую шкалу $\mathbf{W}_1$, в которой опровержимо Rul, а число ненормальных элементов не превосходит $(k+1)$.*

Доказательство. Из общезначимости Rul в шкале следует общезначимость во всех p-морфных образах.

Пусть Rul опровержимо в тонкой шкале $\mathbf{W}$, т.е. для некоторого правила $A_1, \ldots, A_m / B$ из Rul и некоторой модели M, основанной на $\mathbf{W}$, выполняются условия: $x \models A_i$ для всех $x \in \mathbf{W}$, $1 \leq i \leq m$, $x_0 \not\models B$ для некоторого $x_0 \in \mathbf{W}$. По лемме 5.3 строим шкалу $\mathbf{W}_1$ и Var-морфизм θ. По лемме 3.2 правило опровергается в шкале $\mathbf{W}_1$.

□

6. Тонкие Gl-шкалы

Напомним, что шкала является Gl-шкалой тогда и только тогда, когда все ее нормальные элементы попарно несравнимы.

Поскольку Gl – логика первого уровня, из предложения 4.3 следует, что $(Gl + Rul) \not\vdash \pi_n$, если и только если существует тонкая Gl-шкала высоты больше, чем n, удовлетворяющая Rul.

Примерами тонких Gl-шкал являются линейно упорядоченные шкалы $\mathbf{Z}_n^k$, $k \leq 1$, а также $\mathbf{Z}_n^{0*}$ и SF_n, где

$\mathbf{Z}_n^k = ((Z_n \cup \{\infty\}), \leq, Q_k)$, $Z_n = \{1, \ldots, n\}$, $1 < \ldots < n < \infty$, $Q_k = \{(k+1), \ldots, n, \infty\}$;

$\mathbf{Z}_n^{0*}$ получается из $\mathbf{Z}_n^0$ добавлением одного нормального элемента, предшествующего ∞;

SF_n получается из $\mathbf{Z}_n^0$ добавлением одного нормального предшественника к каждому ненормальному элементу, включая ∞, при этом все нормальные элементы попарно несравнимы. Таким образом, SF_n содержит точно $(n+1)$ нормальных и $(n+1)$ ненормальных элементов.

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbf{W}$ *— тонкая* Gl*-шкала конечной высоты* $m \geq n$*. Тогда существует* p*-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на некоторую шкалу* $\mathbf{W}_1$ *высоты* n*, у которой каждый ненормальный элемент имеет не более одного нормального непосредственного предшественника.*

Доказательство. Пусть $x_1 < \ldots < x_m < \infty$ – максимальная цепь в $\mathbf{W}$. Все нормальные элементы в $\mathbf{W}$ попарно несравнимы, поэтому $x_2, \ldots, x_m$ – ненормальные элементы. Склеиваем $x_{n+1}, \ldots, x_m$ с ∞ и продолжаем до p-морфизма шкалы $\mathbf{W}$ на шкалу $\mathbf{W}_2$, которая имеет высоту n. В шкале $\mathbf{W}_2$ склеиваем нормальных непосредственных предшественников одного и того же ненормального элемента. Получаем p-морфизм на требуемую шкалу.

□

Заметим, что если в лемме 6.1 $\mathbf{W}$ есть одна из шкал $\mathbf{Z}_m^0$, $\mathbf{Z}_m^{0*}$, SF_m, то p-морфный образ изоморфен $\mathbf{Z}_n^0$, $\mathbf{Z}_n^{0*}$, SF_n соответственно.

Назовем тонкую Gl-шкалу $\mathbf{W}$ *k-насыщенной*, если $Q - \{\infty\}$ содержит точно k элементов и для любого ненормального элемента есть хотя бы один нормальный непосредственный предшественник.

В частности, шкала SF_k является k-насыщенной.

Лемма 6.2. *Пусть* $\mathbf{W}$ *–* k*-насыщенная шкала. Тогда для любого множества* Rul*:*

$$\mathbf{W} \models Rul \iff SF_k \models Rul.$$

Доказательство. Пусть $SF_k \models Rul$. Обозначим все ненормальные элементы шкалы $\mathbf{W}$ через $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1} = \infty$. Пусть $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — множества нормальных непосредственных предшественников элементов $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}$ соответственно, и множество $X \in \{X_1, \ldots, X_{k+1}\}$ имеет наибольшую мощность. Выбираем изоморфные копии W_i шкалы SF_k так, что $W_i \cap W_j = \{\infty\}$ для $i \neq j$. Берем их прямую сумму $W = \bigcup\{W_i \mid i \in X\}$ и склеиваем ненормальные элементы одинаковой высоты. Получаем k-насыщенную шкалу, где множество нормальных непосредственных предшественников для каждого ненормального элемента равномощно множеству X. Теперь легко построить $p-$морфизм полученной шкалы на $\mathbf{W}$. Поскольку общезначимость аксиом и правил сохраняется при взятии прямых сумм и p-морфизмах, получаем $\mathbf{W} \models Rul$.

Обратно, легко построить p-морфизм из $\mathbf{W}$ на SF_k, склеивая нормальных непосредственных предшественников одного и того же ненормального элемента.

□

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathbf{W}$ *— тонкая* Gl-*шкала,* $\mathbf{W} \models Rul$ *и в* $\mathbf{W}$ *есть цепь* $a < b_1 < \ldots < b_n < \infty$, *где* $a \notin Q$, $b_1, \ldots, b_n \in Q$. *Тогда* $SF_n \models Rul$.

Доказательство. Сначала построим n-насыщенную шкалу, удовлетворяющую Rul.

Для $i \leq n$ обозначим через $\mathbf{W}_i = (W_i, \leq, Q_i)$ подшкалу шкалы $\mathbf{W}$, где $Q_i = \{b_1, \ldots, b_i, \infty\}$, $W_i = (W - Q) \cup Q_i$. Нетрудно проверить, что следующее отображение θ_i является p-морфизмом из $\mathbf{W}$ на $\mathbf{W}_i$:

$\theta_i(x) = x$ при $x \notin Q$,

$\theta_i(x) = b_1$ при $x \in Q$, $x \leq b_1$;

$\theta_i(x) = b_{j+1}$ при $x \in Q$, $x \not\leq b_j$, $x \leq b_{j+1}$, $j < i$;

$\theta_i(x) = \infty$ при $x \in Q$, $x \not\leq b_i$.

Так как все нормальные элементы попарно несравнимы, $\theta_i(a)$ есть непосредственный предшественник минимального ненормального элемента $\theta_i(b_1)$. Заметим, что в шкале $\mathbf{W}_i$ элемент b_1 имеет высоту i.

Выбираем копии шкал W_i так, чтобы $W_j \cap W_l = \{\infty\}$ для $j \neq l$. Затем берем их прямую сумму и склеиваем ненормальные элементы одинаковой высоты. Полученная шкала является n-насыщенной и удовлетворяет Rul по лемме 3.3. По лемме 6.2 шкала SF_n также удовлетворяет Rul.

□

Лемма 6.4. *Пусть* $\mathbf{W}$ *— тонкая* Gl-*шкала и в* $\mathbf{W}$ *есть цепь* $b_1 < \ldots < b_n < \infty$, *где* $b_1, \ldots, b_n \in Q$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *не имеют нормальных предшественников. Тогда существует* p-*морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на шкалу* $\mathbf{Z}_n^{0*}$ *или шкалу* $\mathbf{Z}_n^0$.

Доказательство. В шкале $\mathbf{W}$ склеиваем с b_1 все ненормальные элементы, предшествующие b_1, с b_2 – все ненормальные элементы, предшествующие b_2 и не предшествующие b_1, и т.д. Все ненормальные элементы, не предшествующие b_n, склеиваем с ∞. Кроме того, все нормальные элементы, если они есть, склеиваем в один элемент. Получаем p-морфизм на шкалу $\mathbf{Z}_n^{0*}$, если в $\mathbf{W}$ есть нормальные элементы, и на шкалу $\mathbf{Z}_n^0$ в противном случае.

□

Лемма 6.5. *Пусть* Rul *содержит* k *переменных,* $k < n$. *Тогда*

(1) $\mathbf{Z}_n^0 \models Rul \iff \mathbf{Z}_{k+1}^0 \models Rul \iff (\forall j > 0)(\mathbf{Z}_j^0 \models Rul)$;

(2) $\mathbf{Z}_n^{0*} \models Rul \iff \mathbf{Z}_{k+1}^{0*} \models Rul \iff (\forall j > 0)(\mathbf{Z}_j^{0*} \models Rul)$;

(3) $SF_n \models Rul \iff SF_{k+1} \models Rul \iff (\forall j > 0)(SF_j \models Rul)$.

Доказательство. Для каждого из трех типов шкал легко построить p-морфизмы шкал с большими индексами на шкалы с меньшими индексами. Поэтому из общезначимости правил в шкалах с большими индексами вытекает их общезначимость в шкалах с меньшими индексами.

(1) Пусть $\mathbf{Z}_n^0 \not\models Rul$.

По теореме 5.4 существует p-морфизм шкалы $\mathbf{Z}_n^0$ на шкалу $\mathbf{W}_1$, содержащую не более $(k+1)$ ненормальных элементов и опровергающую Rul. Ясно, что шкала $\mathbf{W}_1$ изоморфна $\mathbf{Z}_m^0$ для некоторого $m \leq k$. Поэтому $\mathbf{W}_1$ является p-морфным образом шкалы $\mathbf{Z}_k^0$ и $\mathbf{Z}_k^0 \not\models Rul$. Таким образом, общезначимость Rul в $\mathbf{Z}_n^0$ равносильна общезначимости Rul в $\mathbf{Z}_k^0$.

Поскольку шкалы с меньшими индексами являются p-морфными образами шкал с большими индексами, получаем эквивалентность $\mathbf{Z}_{k+1}^0 \models Rul$ и утверждения $(\forall j > 0)\mathbf{Z}_j^0 \models Rul$.

(2) Аналогично пункту (1).

(3) Пусть $SF_n \not\models Rul$. По теореме 5.4 существует p-морфизм шкалы SF_n на шкалу $\mathbf{W}$, содержащую $m+1 \leq (k+1)$ ненормальных элементов и опровергающую Rul. Поэтому $\mathbf{W}$ есть m-насыщенная шкала. По лемме 6.2 получаем $SF_m \not\models Rul$, а значит, $SF_{k+1} \not\models Rul$.

Таким образом, доказана равносильность $SF_n \models Rul$ и $SF_{k+1} \models Rul$. Поскольку шкалы с меньшими индексами являются p-морфными образами шкал с большими индексами, получаем эквивалентность $SF_{k+1} \models Rul$ и $(\forall j > 0)(SF_j \models Rul)$.

□

7. Вычисление номера слоя

Для вычисления номера слоя нам потребуется

Теорема 7.1. *Пусть $L = Gl + Rul$. Тогда для любого n следующие условия равносильны:*

(1) *$L \not\vdash \pi_n$;*
(2) *Существует конечная тонкая* Gl*-шкала высоты $(n+1)$, удовлетворяющая Rul и содержащая не более $(n+2)$ нормальных элементов.*

Доказательство. Пусть $L \not\vdash \pi_n$. По предложению 4.3 существует конечная тонкая Gl-шкала $\mathbf{W}$ высоты $m > n$, удовлетворяющая Rul. По лемме 6.1 существует p-морфизм шкалы $\mathbf{W}$ на некоторую шкалу $\mathbf{W}_1$ высоты $(n+1)$, у которой каждый ненормальный элемент имеет не более одного нормального непосредственного предшественника. Ясно, что $\mathbf{W}_1$ удовлетворяет требованиям пункта (2).

Обратное сразу вытекает из предложения 4.3.

□

Следующая теорема дает возможность отделить бесконечнослойные расширения логики Gl от конечнослойных.

Теорема 7.2. *Пусть $L = Gl + Rul$, k — число переменных в Rul. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *L аксиоматизирует логику бесконечного слоя;*
(2) *высоты конечных тонких* Gl*-шкал, удовлетворяющих Rul, не ограничены;*
(3) *все аксиомы и правила из Rul верны во всех шкалах Z_n^0, или во всех шкалах $\mathbf{Z}_n^{0*}$, или во всех шкалах SF_n;*
(4) *все аксиомы и правила из Rul верны в одной из шкал $\mathbf{Z}_{k+1}^0$, или $\mathbf{Z}_{k+11}^{0*}$, или SF_{k+1}.*

Доказательство. (1) $\iff$ (2). Сразу следует из леммы 4.1 и предложения 4.3.

(2) $\iff$ (3).

Пусть высоты конечных тонких Gl-шкал, удовлетворяющих Rul, не ограничены.

Может случиться, что условие леммы 6.4 выполняются для таких шкал при как угодно больших n. Тогда по лемме 6.4 шкалы $\mathbf{Z}_n^0$ или $\mathbf{Z}_n^{0*}$ удовлетворяют Rul при как угодно больших n. Поскольку такие шкалы с меньшими индексами являются p-морфными образами шкал с большими индексами, все шкалы $\mathbf{Z}_n^0$ или все шкалы $\mathbf{Z}_n^{0*}$ удовлетворяют Rul.

В противном случае для как угодно больших n существуют тонкие шкалы, удовлетворяющие Rul, в которых выполнено условие: в $\mathbf{W}$ есть цепь $a < b_1 < \ldots < b_n < \infty$, где $a \notin Q$, $b_1, \ldots, b_n \in Q$.

Тогда по лемме 6.3 для как угодно большого n существует n-насыщенная шкала, в которой верны все аксиомы и правила из Rul. По лемме 6.2 получаем $SF_n \models Rul$ для как угодно больших n. Легко построить p-морфизм из SF_n на SF_m при $m \leq n$. Поэтому $SF_n \models Rul$ для всех n.

Обратное очевидно.

(3) $\iff$ (4). Сразу по лемме 6.5.

□

Теперь мы можем доказать эффективную вычислимость номера слоя исчисления $Gl + Rul$.

Теорема 7.3. (1) *Семейства конечнослойных и бесконечнослойных* Gl-*логик сильно разрешимы над* Gl.
(2) *Существует алгоритм, вычисляющий номер слоя исчисления $Gl+Rul$ для любого конечного множества Rul схем аксиом и правил вывода.*

Доказательство. (1) Сильная разрешимость над Gl сразу вытекает из равносильности пунктов (1) и (4) теоремы 7.2.

(2) Пусть $L = Gl + Rul$. По пункту (1) можно проверить, принадлежит ли L бесконечному слою. Если нет, то последовательно проверяем для $n = 0, 1, \ldots$, выводима ли π_n в L, используя теорему 7.1. Для установления выводимости π_n в L достаточно опровергнуть Rul во всех тонких Gl-шкалах высоты $(n+1)$, содержащих не более $(2n+4)$ элементов, т.е. в конечном числе конечных тонких шкал. Таким способом находим номер слоя.

□

Укажем оценку для номера слоя исчисления.

Предложение 7.4. *Пусть $L = Gl + Rul$ — исчисление конечного слоя и Rul зависит от k переменных. Тогда L — исчисление m-го слоя для некоторого $m \leq 2k+1$.*

Доказательство. Допустим, что L — исчисление m-го слоя для некоторого $m > 2k+1$. Тогда $L \not\vdash \pi_{2k+1}$ и по теореме 7.1 существует конечная тонкая Gl-шкала $\mathbf{W}$ высоты $(2k+2)$, удовлетворяющая Rul. Так как в $\mathbf{W}$ нормальные элементы попарно несравнимы, в Q есть цепь $b_1 < \ldots < b_{2k+1} < \infty$. Если b_{k+1} не имеет нормальных предшественников, то по лемме 6.4 существует p-морфизм шкалы $\mathbf{W}$ на Z_{k+1}^0 или Z_{k+1}^{0*}, а значит, одна из этих шкал удовлетворяет L.

Если b_{k+1} имеет нормальных предшественников, то по лемме 6.3 получаем $SF_{k+1} \models Rul$.

По теореме 7.2 L — исчисление бесконечного слоя.

□

References

[1] I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica, **4** (1937), 119–136. MR1556966

[2] L. Maksimova, V. Yun, *Slices over minimal logic*, Algebra i Logica, **55**:4 (2016), 449–464. Zbl 06748454

[3] T. Hosoi, *On intermediate logics. I*, J. Faculty of Science Univ. Tokyo, Sec. Ia, **14** (1967), 293–312. MR0221909

[4] L.L. Maksimova, *The structure of slices over minimal logic*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **57**:5 (2016), 1078–1087. MR3604570

[5] L. Maksimova, *Strongly Decidable Properties of Modal and Intuitionistic Calculi*, Logic Journal of IGPL, **8**:6 (2000), 797–819. MR1830528

[6] L. Maksimova, V. Yun, *Strong decidability and strong recognizability*, Algebra i Logica, *56*:5 (2017), 559–581.

[7] L.L. Maksimova, V.F. Yun, *Slices and levels of extensions of the minimal logic*, Siberian Mathematical Journal, **58**:6 (2017), 1341—1353.

[8] S. Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency*, Series: Trends in Logic, **26**, Dordrecht: Springer, 2008. MR2680932

[9] L. Maksimova, *Interpolation and definability over the logic Gl*, Studia Logica, **99**:1–3 (2011), 249–267. MR2836442

[10] L.L. Maksimova, V.F. Yun, *Recognizable logics*, Algebra i Logica, **54**:2 (2015), 252–274. MR3467214

[11] K. Segerberg, *Propositional logics related to Heyting's and Johansson's*, Theoria, **34** (1968), 26–61. MR0241275

[12] L.L. Maksimova, *A method of proving interpolation in paraconsistent extensions of the minimal logic*, Algebra i Logika, **46**:5 (2007), 627–648. MR2378634

[13] L.L. Maksimova, *Pretabular superintuitionistic logics*, Algebra i Logika, **11**:5 (1972), 558–570. MR0325358

[14] D.M. Gabbay, L. Maksimova, *Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics*, Oxford Logic Guides, **46**, Oxford: Clarendon Press, 2005.

Larisa L'vovna Maksimova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru

Veta Fedorovna Yun
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: yun@math.nsc.ru