S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 355–361 (2018) УДК 515.124.2
DOI 10.17377/semi.2018.15.032 MSC 30L99, 53C23, 54D10

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛЯРНОСТИ f-КВАЗИМЕТРИК

А.В. ГРЕШНОВ

Abstract. We get a new proof for validity of T_4-axiom of separation for weak symmetric f-quasimetric spaces. Using this proof we get T_4-property for more general classes of f-quasimetric spaces. We construct the symmetric (q,q)-quasimetric space (X,d) such that distance function $d(u,v)$ is continuous to each variables but $\lim\limits_{n\to\infty}(\rho(x_0,x_n)+\rho(y_0,y_n)) = 0 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\rho(x_0,y_0)$.

Keywords: distance function, f-quasimetric, open set, interior and closure of a set, weak symmetry, separation axioms, convergence.

1. Введение

Пусть X — некоторое множество, содержащее не менее двух точек. Функция $\rho : X\times X \to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ называется *функцией расстояния* на X, если она удовлетворяет *аксиоме тождества*: $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. Несложно проверить, что $\rho(x,y)=0 \Rightarrow \rho(y,x)=0$.

Определение 1 ([1]). *Функция расстояния ρ, определенная на X, называется f-квазиметрикой, если имеет место следующее f-неравенство треугольника*

$$\rho(x,z) \le f(\rho(x,y),\rho(y,z)) \quad \forall x,y,z\in X,$$

где $f : \mathbb{R}^+\cup\{0\}\times\mathbb{R}^+\cup\{0\} \to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ — некоторая непрерывная в точке $(0,0)$ функция такая, что $f(0,0)=0$. Пара (X,ρ) в этом случае называется f-квазиметрическим пространством.

Greshnov, A.V., Some problems of regularity of f-quasimetrics.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0006.

Поступила 25 ноября 2017 г., опубликована 6 апреля 2018 г.

В случае $f(t_1,t_2)=t_1+t_2$ функция ρ называется *квазиметрикой*, а (X,ρ) — *квазиметрическим пространством* [2]; если $f(t_1,t_2)=q_1t_1+q_2t_2$, $q_1>0$, $q_2>0$, то такое f-квазиметрическое пространство называется (q_1,q_2)-*квазиметрическим* [1], [3].

Если функция расстояния ρ удовлетворяет условию $\rho(x,y)\le q_0\rho(y,x)$ $\forall x,y\in X$, $q_0>0$, то такую функцию расстояния мы будем называть q_0-симметрической (просто симметрической в случае $q_0=1$).

Множество
$$B^{\rm o}(x,r)=\{y\in X\mid \rho(x,y)<r\}$$
будем называть *шаром* с центром в точке x радиуса r. Множество $U\in X$ будем называть *открытым*, если для любой точки $x\in U$ найдется число r_x такое, что $B^{\rm o}(x,r_x)\subset U$. Открытые множества формируют топологию τ_ρ на X; при этом сами шары $\{B^{\rm o}(x,r)\}$ могут и не быть открытыми (см. примеры в [1]).

Окрестностью множества $A\subset X$ мы назовем любое подмножество из X, содержащее открытое множество U такое, что $A\subseteq U$. Точку x_0 назовем *предельной точкой* множества A, если для любого $\varepsilon>0$ выполняется
$$\big(A\cap B^{\rm o}(x_0,\varepsilon)\big)\setminus\{x_0\}\ne\emptyset.$$
Множество $A\in X$ будем называть *замкнутым*, если множество $X\setminus A$ открыто. Несложно показать, что: A — замкнуто $\Leftrightarrow$ множество A содержит все свои предельные точки. Совокупность всех предельных точек множества A обозначаем символом $LimA$; $\overline{A}=A\cup LimA$ — *замыкание* множества A.

Определение 2. *f-квазиметрическое пространство (X,ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_4, если у любой пары непересекающихся замкнутых множеств $E,G\subset(X,\rho)$ найдутся их непересекающиеся окрестности.*

Существуют и другие определения, эквивалентные определению 2.

Определение 3. *f-квазиметрическое пространство (X,ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_4, если каждое открытое множество U, содержащее замкнутое множество F, содержит множество $\overline{V}$, $F\subset V$, где V — открытое множество.*

Свойство 1. *Определения* 2, 3 *эквивалентны.*

Доказательство. (Определение 2$\Rightarrow$Определение 3) Пусть $F\subset X$ — некоторое замкнутое множество, U — открытое множество, содержащее F. Тогда $X\setminus U$ — замкнутое множество, и из определения 2 вытекает, что найдутся открытые множества A_1,A_2, $A_1\cap A_2=\emptyset$, такие, что $F\subset A_1$, $(X\setminus U)\subset A_2$. Тогда множество $X\setminus A_2$ — замкнутое, и при этом $A_1\subset(X\setminus A_2)$, следовательно $\overline{A_1}\subset(X\setminus A_2)$.
(Определение 3$\Rightarrow$Определение 2) Рассмотрим непересекающиеся замкнутые множества E,F. Тогда $X\setminus F$ — открытое множество, $E\subset(X\setminus F)$, и по определению 3 найдется открытое множество U такое, что $E\subset U$, $\overline{U}\subset(X\setminus F)$. Множество $X\setminus\overline{U}$ открыто, $F\subset(X\setminus\overline{U})$, и по определению 3 найдется открытое множество V такое, что $V\subset(X\setminus\overline{U})$ такое, что $F\subset V$, $\overline{V}\subset(X\setminus\overline{U})$. Таким образом, $U\cap V=\emptyset$. $\square$

В работе [1] были исследованы топологические свойства f-квазиметрических пространств. Одним из главных результатов работы [1] является следующая квазиметризационная

Теорема 1. [1, Theorem 3.1] *Любое f-квазиметрическое пространство квазиметризуемо, а любое слабо симметрическое f-квазиметрическое пространство метризуемо.*

Под «квазиметризуемостью» в теореме 1 подразумевается, что для f-квазиметрики найдется квазиметрика, топологически ей эквивалентная (в смысле топологии, введенной выше).

Определение 4. *f-квазиметрическое пространство является слабо симметрическим, если выполняется* $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(a,x_n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$.

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что любое слабо симметрическое f-квазиметрическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_4. Естественно здесь возникает вопрос о том, можно ли установить справедливость аксиомы отделимости T_4 независимо от теоремы 1. В настоящей работе в теореме 2 получен утвердительный ответ на этот вопрос. При этом отметим, что доказательство теоремы 2 не использует доказательство теоремы 1. В следствии 1 мы обобщили теорему 2 на случай f-квазиметрических пространств, удовлетворяющих следующему условию *усиленной* $\underline{\lim}$*-слабой симметрии*: $\forall A\subset X$ $\forall a\in LimA$ $\exists\{x_n\}\subseteq A$ $\lim\limits_{n\to 0}\rho(a,x_n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$.

В работе [4] было доказано выполнение аксиомы отделимости T_3 для (q_1,q_2)-квазиметрических пространств, удовлетворяющих условию $\underline{\lim}$*-слабой симметрии*, т. е. $\forall B^{\circ}(x,R)$ $\forall z\in Lim\big(B^{\circ}(x,R)\big)$ $\exists\{y_i\}\subset B^{\circ}(x,R):\ \lim\limits_{i\to\infty}\rho(z,y_i)=0 \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty}\rho(y_i,z)=0$. Однако соответствующий пример (q_1,q_2)-квазиметрического пространства, удовлетворяющего условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии и не удовлетворяющего условию слабой симметрии, был в [4] неправильным, в настоящей работе примером 1 мы исправляем эту ошибку.

Пусть для функции расстояния ρ выполняется следующее условие *«двойной» сходимости*:

$$\lim_{n\to\infty}(\rho(x_0,x_n)+\rho(y_0,y_n))=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\rho(x_0,y_0).$$

Выполнение условия «двойной» сходимости для функции расстояния ρ важно, в частности, при доказательстве изометричности компактных q_0-симметрических (q,q)-квазиметрических пространств в рамках обобщения теории сходимости по Громову — Хаусдорфу (см., например, [5]). Здесь возникает естественный вопрос о тех условиях на ρ, при которых «двойная» сходимость выполняется. В примере 2 мы показываем, что «двойная» сходимость может не выполняться даже в случае, когда функция расстояния ρ является симметрической (q,q)-квазиметрикой, непрерывной по каждой переменной. В частности, «двойная» сходимость не имеет место для q_0-симметрических квазиметрических пространств, рассматриваемых в [6].

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Арутюнову, С. К. Водопьянову, К. В. Сторожуку за плодотворные обсуждения и полезные замечания, а также рецензенту за внимание к результатам автора.

2. Доказательство результатов работы

Для любого множества $A\subset(X,\rho)$ символом $int\,A$ обозначаем *внутренность* множества A, т. е. $int\,A=\{x\in A \mid \exists r_x>0:\ B^{\circ}(x,r_x)\subset A\}$.

Лемма 1 (см. [1]). *Для каждого $r > 0$ найдется число $\theta(r) > 0$ такое, что*

$$B^o(x, \theta(r)) \subset int\, B^o(x, r).$$

Теорема 2. *f-квазиметрическое слабо симметрическое пространство (X, d) удовлетворяет аксиоме отделимости T_4.*

Доказательство. Пусть A — произвольное замкнутое подмножество из (X, ρ). Пусть Y — некоторое открытое множество из (X, ρ) такое, что $A \subset Y$.

1^0 Для любой точки $a \in A$ найдется число $\epsilon_a > 0$ такое, что $B^o(a, \epsilon_a) \subset Y$.

2^0 По лемме 1 для каждого шара $B^o(a, \epsilon_a)$ существует открытое множество $U(a, \epsilon_a)$ (например, $int\, B^o(a, \epsilon_a)$) такое, что $B^o(a, \theta(\epsilon_a)) \subset U(a, \epsilon_a) \subset B^o(a, \epsilon_a)$. Обозначим

$$\bigcup_{a \in A} U(a, \epsilon_a) = U_2^o.$$

Множество U_2^o открыто как объединение открытых множеств.

3^0 Обозначим

$$U_3 = \bigcup_{a \in A} B^o(a, \theta(\epsilon_a)).$$

Мы имеем $U_3 \subset U_2^o \subset Y$.

Рассмотрим некоторый шар $B^o(a, \varepsilon_a)$, $\varepsilon_a < \theta(\epsilon_a)$. Найдем такое число ε_a, что для любой точки $y_{\varepsilon_a} \in B^o(a, \varepsilon_a)$ будет выполняться

$$f(\rho(a, y_{\varepsilon_a}), \delta_{\varepsilon_a}) < \frac{\theta(\epsilon_a)}{100}$$

для всех достаточно малых δ_{ε_a} таких, что $\delta_{\varepsilon_a} < \delta^0_{\varepsilon_a}$.

Покажем, что

$$W = \overline{\bigcup_{a \in A} B^o(a, \varepsilon_a)} \subset U_3. \tag{1}$$

Предположим противное, т. е. найдется точка $x \in W$ такая, что $x \in (X \setminus U_3)$. Из определения множества W вытекает, что для любого числа $\delta > 0$ найдется точка y_δ, принадлежащая некоторому шару $B^o(\hat{a}_\delta, \varepsilon_{\hat{a}_\delta})$, $\hat{a}_\delta \in A$, такая, что $\rho(x, y_\delta) < \delta$. Выбирая число δ достаточно малым, используя условие слабой симметрии, мы всегда можем сделать величину $\rho(y_\delta, x)$ достаточно малой настолько, насколько необходимо.

Тогда

$$\rho(\hat{a}_\delta, x) \le f(\rho(\hat{a}_\delta, y_\delta), \rho(y_\delta, x)) < \frac{\theta(\epsilon_{\hat{a}_\delta})}{100} \Rightarrow x \in B^o\Big(\hat{a}_\delta, \frac{\theta(\epsilon_{\hat{a}_\delta})}{100}\Big) \subset U_3$$

для некоторого $\delta > 0$.

Таким образом, включение (1) доказано.

4^0 Обозначим

$$U_4 = \bigcup_{a \in A} int\, B^o(a, \varepsilon_a).$$

Множество U_4 открыто по построению, кроме того, $U_4 \subset W$, следовательно, $\overline{U_4} \subset W$. Так как $A \subset U_4$, то по определению 3 теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *f-квазиметрическое слабо симметрическое пространство (X, d) с усиленной $\underline{\lim}$-слабой симметрией удовлетворяет аксиоме отделимости T_4.*

Доказательство. Доказательство следствия 1 происходит в точности так же, как и доказательство теоремы 2; при этом следует отметить, что из существования последовательности $\{y_\delta\}$ (см. п. 3^0 доказательства теоремы 2) и определения усиленной $\underline{\lim}$-слабой симметрии вытекает существование последовательности $\{y'_\delta\} \subset W$ такой, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho(x, y'_\delta) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0} \rho(y'_\delta, x) = 0$. $\square$

Пример 1. Пусть $X = \{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots,$ — счетное множество точек, принадлежащих отрезку $[0, 1]$ такое, что $x_0 = 0$, $x_i = \frac{1}{2^{i-1}}$, $i \in \mathbb{N}$. Определим на множестве X функцию расстояния $\rho(x, y)$ следующим образом:

1^0 $\rho(x_{2n}, x_i) = |x_{2n} - x_i|$, $i, n = 0, 1, 2, \dots$;

2^0 $\rho(x_{2n-1}, x_i) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и при этом $2n - 1 \neq i$;

3^0 $\rho(x_{2n-1}, x_{2n-1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Несложно проверить, что для ρ выполняется обычное неравенство треугольника. Таким образом, ρ — квазиметрика. При этом $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(x_0, x_i) = 0$, но при этом $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(x_i, x_0) = \begin{cases} 1, & i = 2n - 1, \\ 0, & i = 2n, \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. Рассмотрим две последовательности точек $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ и еще две точки x_0, y_0. Пусть $X = \{x_i\} \cup \{y_i\} \cup x_0 \cup y_0$.

Определим на $X \times X$ симметрическую функцию расстояния d следующим образом.

1^0
$$d(x_0, x_i) = d(x_i, x_0) = d(y_0, y_i) = d(y_i, y_0) = \frac{1}{2^i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

2^0
$$d(x_i, y_0) = d(y_0, x_i) = d(x_0, y_i) = d(y_i, x_0) = 1 = d(x_0, y_0) = d(y_0, x_0) \quad i \in \mathbb{N},$$

3^0
$$\forall j \in \mathbb{N}\ \forall i > 100^j: \ d(x_i, y_j) = d(y_j, x_i) = d(y_i, x_j) = d(x_j, y_i) = 1,$$

4^0
$$d(x_i, y_j) = d(y_j, x_i) = 2 \quad \text{в случаях пар } x_i, y_j, \text{ не попадающих в случай } 3^0,$$

5^0
$$d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j) = \Big|\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j}\Big| \quad i \neq j.$$

Проверим, что для d выполняется (q, q)-обобщенное неравенство треугольника с константой $q > 1$. Прежде заметим, что если мы установили для фиксированной пары точек $a, b \in X$ существование константы q такой, что $d(a, b) \leq q(d(a, x) + d(x, b))$ $\forall x \in X$, то из условия симметрии для d вытекает $d(b, a) \leq q(d(b, x) + d(x, a))$ $\forall x \in X$. Исходя из этого простого наблюдения, проведем необходимые оценки для $d(a, b)$.

Случай 1.

$$i \in \mathbb{N}: \ 1 = d(x_0, y_0) \leq q(d(x_0, x_i) + d(x_i, y_0)) = q(\frac{1}{2^i} + 1) \Rightarrow q = 1,$$

$$i \in \mathbb{N}: \ 1 = d(x_0, y_0) \leq q(d(x_0, y_i) + d(y_i, y_0)) = q(1 + \frac{1}{2^i}) \Rightarrow q = 1.$$

Случай 2.

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_k) + d(x_k, x_i) \quad \forall\ i, j, k \in (\mathbb{N} \cup \{0\}),$$

так как из определения d следует, что на $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$ для d выполняется обычное неравенство треугольника.

Случай 3.

$$i \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^i} = d(x_0, x_i) \le q(d(x_0, y_0) + d(y_0, x_i)) = q(1 + d(y_0, x_i)) \Rightarrow q = 1.$$

Случай 4.

$$i \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^i} = d(x_0, x_i) \le q(d(x_0, y_j) + d(y_j, x_i)) = q(1 + d(y_j, x_i)) \Rightarrow q = 1.$$

Случай 5.

$$1 = d(x_0, y_i) \le q(d(x_0, x_j) + d(x_j, y_i)) = q\Big(\frac{1}{2^j} + \begin{cases} 1, & i > 100^j, \\ 2, & i \le 100^j \end{cases}\Big) \Rightarrow q = 1.$$

Случай 6.

$$i \le 100^j: \ 2 = d(x_i, y_j) \le q(d(x_i, y_k) + d(y_k, y_j)) \Rightarrow q = 2;$$

оценка на величину $d(x_i, y_k)$ происходит аналогично тому, как мы оценивали $d(x_j, y_i)$ в случае 5.

Случай 7.

$$i \le 100^j: \ 2 = d(x_i, y_j) \le q(d(x_i, x_0) + d(x_0, y_j)) = q(\frac{1}{2^i} + 1) \Rightarrow q = 2.$$

Случай 8.

$$i > 100^j: \ 1 = d(x_i, y_j) \le q(d(x_i, y_k) + d(y_k, y_j)) \Rightarrow q = 1,$$

т. к. $\min\limits_{i,k \in \mathbb{N}} d(x_i, y_k) = 1$.

Все остальные возможные случаи оценки величины $d(a, b)$ содержатся в разобранных случаях 1–8.

Несложно видеть, что при любом фиксированном $u \in X$ функции $d(u, v)$, $d(v, u)$ непрерывны по переменной v.

Мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 2 \ne d(x_0, y_0) = 1$, т. е. условие «двойной» сходимости для d не выполняется.

References

[1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokutsievskii, K. V. Storojuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics*, Top. Appl., **221** (2017), 178-194. MR3624455

[2] W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, American J. of Math., **53**:3 (1931), 675–684. MR1506845

[3] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, *The theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points*, Doklady Mathematics, **94**:1 (2016), 434–437. Zbl 1352.54030

[4] A. V. Greshnov, *Regularization of distance functions and separation axioms on (q_1, q_2)-quasimetric spaces*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 765–773.

[5] S. V. Selivanova, *The tangent cone to a quasimetric space with dilations*, Siberian Math. J., **51**:2 (2010), 313–324. Zbl 1202.53047

[6] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, 1993. MR1232192

Alexandr Valer'yevich Greshnov
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru