S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 373–388 (2018) УДК 517.977

DOI 10.17377/semi.2018.15.034 MSC 34H05,34K35

ЗАДАЧА ПАКЕТНОГО НАВЕДЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ СИГНАЛЕ НАБЛЮДЕНИЯ

П.Г. СУРКОВ

Abstract. The problem of guaranteed closed-loop guidance at a given time is studied for a dynamical control system. The initial state is unknown, but belongs to a given finite set of admissible initial states. The information on the position of the system is represented as an integral signal. The control system of ordinary differential equations is reduced to a system of functional-differential equations with the simplification of the form of the signal. The problem of package guidance is formulated for such system and a solvability criterion is proved. For a particular case of the integral signal, the solvability criterion is rewritten in a simplified form. An example is given illustrated the proposed technique by a specific linear control system of differential equations.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

Введение. Задача гарантированного позиционного наведения

Работа посвящена развитию метода программных пакетов [1–3], который является удобным инструментом исследования задач гарантированного позиционного управления при неполной информации. Базируясь на принципе экстремального сдвига Н. Н. Красовского [4], данный метод позволяет сконструировать требуемое управляющее воздействие с точки зрения неупреждающих программных операторов (квазистратегий) [5]. Объектом исследования в настоящей работе будет управляемая динамическая система вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [\sigma, \theta], \tag{1}$$

Surkov, P.G., The problem of package guidance under incomplete information and integral signal of observation.

The work is supported by Russian Science Foundation (project no. 14-11-00539).

Поступила 11 декабря 2017 г., опубликована 10 апреля 2018 г.

где временной отрезок $T = [\sigma, \theta]$ — ненулевой длины, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в этот момент, элементы матриц $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ являются непрерывными функциями на T, а функция $f(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^n$ кусочно-непрерывна. Для данной системы поставим задачу гарантированного позиционного наведения [4, 5] на заданное целевое множество в заданный момент времени θ. Алгоритм ее решения основывается на методе пакетов программ [3, 6].

В работе [6] был получен критерий разрешимости задачи пакетного наведения для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обозначенная в ней методика была применена в задачах гарантированного позиционного наведения для частично наблюдаемых систем с распределенными параметрами [7], систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, при наличии действия неизвестного возмущения [8], стохастическими дифференциальными уравнениями [9], а также функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа [10] и дифференциальными уравнениями с запаздыванием в управлении [11]. В упомянутых работах авторами использовался линейный сигнал наблюдения $y(t) = Q(t)x(t)$, $t \in T$, о положении системы. В работе [12] был предложен алгоритм решения задачи терминального управления нелинейной системой с неизвестным начальным состоянием и при наличии возмущений с привлечением также конструкций программных пакетов.

Определение 1. *Под программным управлением или программой будем понимать всякую измеримую по Лебегу функцию* $u(\cdot)\colon T \to P$, $P \subset \mathbb{R}^m$ *— выпуклый компакт. Множество всех программ обозначается* $\mathcal{U}$.

Определение 2. *Движением системы* $x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ *из начального состояния* x_0 *под действием программы* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *будем называть решение* (*по Каратеодори*) *дифференциального уравнения* (1), *определенное на отрезке* T *и удовлетворяющее условию* $x(\sigma) = x_0$.

Пусть задано непустое конечное множество *допустимых начальных состояний* $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, а также задано выпуклое замкнутое *целевое* множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать априори известным, что начальное состояние системы содержится в X_0, но само это начальное состояние не известно. Пусть имеется следующий сигнал наблюдения о состоянии $x(t)$ системы

$$y(t) = \int_{\sigma}^{t} (Q(t,s)x(s) + R(t,s)y(s))\,ds + c(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

где матрицы $Q(\cdot,\cdot)$ и $R(\cdot,\cdot)$ размерностей $q \times n$ и $q \times q$ соответственно, элементы которых являются непрерывными по первому аргументу и непрерывно-дифференцируемыми функциями по второму аргументу на $T \times T$, функция $c(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^q$ дифференцируема.

Перед управляющей стороной стоит задача — привести фазовое состояние $x(t)$ системы в момент времени θ в заранее заданную ε-окрестность целевого множества M. В процессе движения управление строится по принципу обратной связи по сигналу $y(t)$. Следуя стандартной методике теории гарантирующего управления, позиционная стратегия подразумевает возможность коррекции управляющего воздействия $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени

$\sigma = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \theta$. В каждый момент t_i, $i = [0, k-1]$, управление на интервале $t \in [t_i, t_{i+1})$ определяется согласно прошедшим наблюдениям и истории управления $t \to u(t)$ на $[\sigma, t_i)$, при $i = 0$ история отсутствует.

Можно сформулировать задачу (Ps) в следующем виде: для произвольного, наперед заданного $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, которая для любого начального значения $x_0 \in X_0$ обеспечивала бы движению системы $x(\cdot)$, исходящему в момент σ из состояния x_0, попадание в ε-окрестность целевого множества M в момент времени θ.

В данной работе доказывается критерий разрешимости задачи (Ps) для системы (1), если сигнал наблюдения представлен в интегральном виде (2). Рассмотрен также частный случай, когда элементами матриц Q и R являются функции одной переменной s. На примере конкретной динамической системы проверяется выполнение критерия и находится управляющее воздействие, решающее задачу (Ps).

1. Линейная система общего вида

Интегральное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = Q(t,t)x(t) + R(t,t)y(t) + \int\limits_{\sigma}^{t} \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} x(s) + \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} y(s) \right) ds + \dot{c}(t), \quad (3)$$

с начальным условием $y(\sigma) = 0$. Сделаем замену переменных в интеграле

$$\int\limits_{\sigma}^{t} \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} x(s) + \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} y(s) \right) ds = \int\limits_{\sigma-t}^{0} \left(\frac{\partial Q(t,t+s)}{\partial t} x(t+s) + \frac{\partial R(t,t+s)}{\partial t} y(t+s) \right) ds,$$

и введем обозначения

$$\widetilde{Q}(t,s) = \begin{cases} \frac{\partial Q(t,t+s)}{\partial t}, & t+s \geqslant \sigma, \\ 0, & t+s < \sigma, \end{cases} \quad \widetilde{R}(t,s) = \begin{cases} \frac{\partial R(t,t+s)}{\partial t}, & t+s \geqslant \sigma, \\ 0, & t+s < \sigma. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда, приняв $r = \theta - \sigma$, преобразуем (3) к виду

$$\dot{y}(t) = Q(t,t)x(t) + R(t,t)y(t) + \int\limits_{-r}^{0} (\widetilde{Q}(t,s)x(t+s) + \widetilde{R}(t,s)y(t+s))\, ds + \dot{c}(t).$$

Объединим полученное уравнение с системой (1) в новую управляемую систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t) + \int\limits_{-r}^{0} \widetilde{A}(t,s)z(t+s)\, ds + \overline{B}(t)u + \overline{f}(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

где $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ Q(t,t) & R(t,t) \end{pmatrix}$, $\widetilde{A}(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{Q}(t,s) & \widetilde{R}(t,s) \end{pmatrix}$, $\overline{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix}$.

Для системы (5) сформулируем задачу гарантированного позиционного наведения (будем обозначать ее (Ps′)): для произвольного, наперед заданного $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, которая для всякого начального значения z_0 из допустимого множества начальных состояний $\overline{X}_0$ обеспечивала бы движению системы $z(\cdot)$, исходящему в момент σ из состояния z_0, попадание в ε-окрестность целевого множества $\overline{M}$ в момент времени θ.

Далее найдем формулу для решения системы (5), которая в данном конкретном случае имеет более простой вид, чем представленный в [13, теорема 4.1], см. также [14], [15, с. 21].

Лемма 1. *Решение системы* (5) *определяется формулой*

$$z(t) = V(t,\sigma)z(\sigma) + \int_{\sigma}^{t} V(t,s)(\overline{B}(s)u(s) + \overline{f}(s))\,ds, \quad t \in T, \tag{6}$$

где $w \times w$-матричная функция V — матрица Коши, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} = \overline{A}(t)V(t,s) + \int_{-r}^{0} \widetilde{A}(t,\xi)V(t+\xi,s)\,d\xi,$$

с начальными условиями $V(t,s) = 0$, $s - r \leqslant t < s$, $V(t,t) = I_w$, $I_w \in \mathbb{R}^{w\times w}$ — единичная матрица, $w = n + q$.

Доказательство. Уравнение (5) может быть переписано с использованием интеграла Стилтьеса в виде [16, с. 179] общей линейной системы

$$\dot{z}(t) = \int_{-r}^{0} [d_s\eta(t,s)]z(t+s) + \overline{B}(t)u + \overline{f}(t), \quad t \in T,$$

где $\eta(t,s) = \eta_1(t,s) + \eta_2(t,s)$, $\eta_1(t,s) = \int_{0}^{s} \widetilde{A}(t,\xi)\,d\xi$, $\eta_2(t,s) = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ -\overline{A}(t), & s \in [-r,0). \end{cases}$

Учитывая формулу решения для последней системы [16, с. 180], имеем

$$z(t) = V(t,\sigma)z(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma-0} d_s\left[\int_{\sigma}^{t} V(t,\xi)\eta(\xi,s-\xi)\,d\xi\right]z(s) + \int_{\sigma}^{t} V(t,s)(\overline{B}(s)u(s) + \overline{f}(s))\,ds.$$

Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{\sigma-r}^{\sigma-0} d_s\Big[\int\limits_{\sigma}^{t} V(t,\xi)\eta(\xi,s-\xi)\,d\xi\Big]z(s) = \int\limits_{\sigma-r}^{\sigma-0} d_s\Big[\int\limits_{\sigma}^{t} V(t,\xi)\Big(-\overline{A}(\xi)$$
$$+\int\limits_{0}^{s-\xi}\widetilde{A}(\xi,\tau)\,d\tau\Big)\,d\xi\Big]z(s) = \int\limits_{\sigma-r}^{\sigma-0}\int\limits_{\sigma}^{t} V(t,\xi)\widetilde{A}(\xi,s-\xi)\,d\xi\, z(s)\,ds.$$

Вввиду того, что сумма аргументов у матричной функции $\widetilde{A}$ в последней формуле удовлетворяет соотношению $\xi + s - \xi = s \in [\sigma - r, \sigma)$, то есть всегда меньше σ, то, принимая во внимание (4), получаем $\widetilde{A}(\xi, s-\xi) = 0$. Справедливость утверждения доказана. □

Введем множество

$$M_y = \Big\{y \in \mathbb{R}^q \colon \exists x_0 \in X_0, \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},$$
$$y = \overline{Q}z(\theta) = \overline{Q}V(\theta,\sigma)z(\sigma) + \overline{Q}\int\limits_{\sigma}^{\theta} V(\theta,s)(\overline{B}(s)u(s) + \overline{f}(s))\,ds\Big\},$$

где $\overline{Q} = (0, I_q)$ — блочная матрица размера $q \times (n+q)$. Множество M_y будет выпуклым и замкнутым.

Лемма 2. *Задача* (Ps′) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* (Ps)*, если в задаче* (Ps′) *определить множества* $\overline{X}_0 = X_0 \times \{0\}$ *и* $\overline{M} = M \times M_y$*, выбрать начальное состояние* $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *и сигнал наблюдения о состоянии системы* (5) *в виде* $\psi(t) = \overline{Q}z(t)$.

Доказательство. Учитывая преобразования (3) и специальный выбор множеств $\overline{X}_0$ и $\overline{M}$, а так же равенство $y(t) = \psi(t)$, $t \in T$, заключаем справедливость утверждения. □

2. Задача пакетного наведения

Следуя терминологии, предложенной в работе [6], приведем формулировки основных определений.

Определение 3. *Однородным сигналом назовем функцию, соответствующую каждому допустимому начальному состоянию* $z_0 \in \overline{X}_0$ *и определяемую формулой*

$$g_{z_0}(t) = \overline{Q}V(t,\sigma)z_0, \quad t \in T,$$

Множество всех допустимых начальных состояний z_0, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in T$, обозначим $\overline{X}_0(\tau|g(\cdot))$; таким образом,

$$\overline{X}_0(\tau|g(\cdot)) = \{z_0 \in \overline{X}_0 \colon g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]} = g_{z_0}(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}\}, \quad \tau \in T.$$

Здесь и далее $g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\sigma, \tau]$.

Условие неупреждаемости: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (\sigma, \theta]$ и допустимых начальных состояний z_0', $z_0'' \in \overline{X}_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\sigma, \tau]$ выполняется равенство $u_{z_0'}(t) = u_{z_0''}(t)$.

Определение 4. *Пакетом программ назовем семейство* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0 \in \overline{X}_0}$, *если оно удовлетворяет условию неупреждаемости.*

Определение 5. *Пакет программ* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0 \in \overline{X}_0}$ *называем наводящим, если для любого* $z_0 \in \overline{X}_0$ *движение из* z_0, *соответствующее программе* $u_{z_0}(\cdot)$, *в момент времени* θ *принимает значение в целевом множестве* $\overline{M}$.

Определение 6. *Задача пакетного наведения* (*задача* (Pk)) *разрешима, если существует наводящий пакет программ.*

В [2, теорема 2.2] установлено, что задача (Ps$'$) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (Pk). Анализ доказательства данного утверждение позволяет заключить, что теорема остается справедливой и для рассматриваемого случая.

3. Расширенная задача программного наведения

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Поскольку оно конечно, то для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k(g(\cdot)) \geqslant 1$ такой, что $\tau_{k(g(\cdot))}(g(\cdot)) = \theta$, где $\tau_j(g(\cdot))$, $j = [1, k(g(\cdot))]$, — моменты расслоения [6] однородного сигнала $g(\cdot)$. Введем множество $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{g(\cdot) \in G} \{\tau_j(g(\cdot))\colon j = [1, k(g(\cdot))]\}$, которое представимо в виде $\mathcal{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_K\}$, где $\tau_1 < \ldots < \tau_K$.

Для каждого $k = [1, K]$ введем множество

$$\overline{\mathcal{X}}(\tau_k) = \{\overline{X}_0(\tau_k|g(\cdot))\colon g(\cdot) \in G\},$$

каждый элемент $\overline{X}_k = \overline{X}_0(\tau_k|g(\cdot))$ которого назовем *кластером начальных состояний* в момент τ_k. Тогда для каждого $k = [1, K]$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества $\overline{X}_0$:

$$\overline{X}_0 = \bigcup_{\overline{X}_k \in \overline{\mathcal{X}}(\tau_k)} \overline{X}_k, \quad \overline{X}_k' \bigcap \overline{X}_k'' = \emptyset, \quad \overline{X}_k', \overline{X}_k'' \in \overline{\mathcal{X}}(\tau_k), \quad \overline{X}_k' \neq \overline{X}_k''.$$

Каждый кластер $\overline{X}_{k-1} \in \overline{\mathcal{X}}(\tau_{k-1})$ при $k = [2, K]$ представляет собой объединение конечного числа кластеров из кластерной позиции $\overline{\mathcal{X}}(\tau_k)$; обозначим его как $\overline{\mathcal{X}}_k(\overline{X}_{k-1}) \subset \overline{\mathcal{X}}(\tau_k)$; тогда

$$\overline{X}_{k-1} = \bigcup_{\overline{X}_k \in \overline{\mathcal{X}}_k(\overline{X}_{k-1})} \overline{X}_k.$$

Далее, будем рассматривать пакеты программ как расширенные программные управления. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех семейств $(u_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0}$ векторов из P.

Определение 7. *Расширенной программой будем называть всякую измеримую* (*по Лебегу*) *функцию* $t \to (u_{z_0}(t))_{z_0 \in \overline{X}_0} : T \to \mathcal{P}$ *и всякое семейство* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0 \in \overline{X}_0}$ *программ будем отождествлять с расширенной программой* $t \to (u_{z_0}(t))_{z_0 \in \overline{X}_0}$.

Для каждого $k = [1, K]$ введем множество $\mathcal{P}_k$ всех семейств $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0 \in \overline{X}_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $\overline{X}_k \in \overline{\mathcal{X}}(\tau_k)$ и любых начальных состояний z_0', $z_0'' \in \overline{X}_k$ выполняется равенство $u_{z_0'} = u_{z_0''}$.

Определение 8. *Расширенная программа* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}$ *будет называться допустимой, если для каждого* $k=[1,K]$ *выполняется* $(u_{z_0}(t))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{P}_k$ *при всех* $t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$ *в случае* $k>1$ *и при всех* $t\in[\sigma,\tau_1]$ *в случае* $k=1$.

Рассмотрим *расширенную систему*, состоящую из экземпляров системы (5), параметризованных допустимыми начальными состояниями $z_0\in\overline{X}_0$. Каждый экземпляр имеет соответствующее начальное состояние z_0 и подвержен управляющему воздействию по некоторой программе $u_{z_0}(\cdot)$. Таким образом, расширенная система имеет вид

$$\dot z_{z_0}(t)=\overline{A}(t)z_{z_0}(t)+\int\limits_{-r}^{0}\widetilde{A}(t,s)z_{z_0}(t+s)\,ds+\overline{B}(t)u_{z_0}(t)+\overline{f}(t),\quad z_{z_0}(\sigma)=z_0\in\overline{X}_0.$$

Фазовым пространством этой системы считаем *расширенное пространство* $\mathcal{R}_w$. Для произвольного $j\in\mathbb{N}$ под $\mathcal{R}_j$ будем понимать конечномерное гильбертово пространство всех семейств векторов $(l_{z_0})_{z_0\in\overline{X}_0}$ из $\mathbb{R}^j$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вида

$$\langle l',l''\rangle=\sum_{z_0\in\overline{X}_0}(l'_{z_0},l''_{z_0}),\quad l'=(l'_{z_0})_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{R}_j,\quad l''=(l''_{z_0})_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{R}_j,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда значения расширенных программ трактуем как элементы пространства $\mathcal{R}_m$. Для произвольного непустого множества $\mathcal{E}\subset\mathcal{R}_j$ $(j\in\mathbb{N})$ вводим его нижнюю $\rho^-(\cdot|\mathcal{E})\colon\mathcal{R}_j\mapsto\mathbb{R}$ и верхнюю $\rho^+(\cdot|\mathcal{E})\colon\mathcal{R}_j\mapsto\mathbb{R}$ опорные функции:

$$\rho^-(l|\mathcal{E})=\inf_{e\in\mathcal{E}}\langle l,e\rangle,\quad \rho^+(l|\mathcal{E})=\sup_{e\in\mathcal{E}}\langle l,e\rangle,\quad l\in\mathcal{R}_j.\tag{7}$$

Далее $\rho^-(l|P)=\min_{u\in P}(l,u)$, $l\in\mathbb{R}^m$, — нижняя опорная функция мгновенного ресурса управления P в $\mathbb{R}^m$.

Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ.

Определение 9. *Движением расширенной системы, соответствующим допустимой расширенной программе* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}$, *будем называть функцию* $t\to(z(t;z_0,u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\colon T\to\mathcal{R}_w$.

Определение 10. *Расширенным целевым множеством назовем множество* $\mathcal{M}$ *всех семейств* $(z_{z_0})_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{R}_w$ *таких, что* $z_{z_0}(\theta)\in\overline{M}$ *для всех* $z_0\in\overline{X}_0$.

Определение 11. *Допустимую расширенную программу* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}$ *будем называть наводящей для расширенной системы, если для движения* $(z(\cdot;z_0,u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}$ *расширенной системы, соответствующего* $(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}$, *выполняется условие* $(z(\theta;z_0,u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{M}$.

Определение 12. *Расширенная задача программного наведения* (*задача* (Pm)) *разрешима, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.*

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично [6, теорема 1].

Теорема 1. 1) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.*

2) *Задача* (Pk) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* (Pm).

4. Критерий разрешимости задачи (Pm)

Для расширенной системы введем *множество достижимости*

$$\mathcal{A} = \{(z(\theta; z_0, u_{z_0}(\cdot)))_{z_0 \in \overline{X}_0} : (u_{z_0}(\cdot))_{z_0 \in \overline{X}_0} \in \mathcal{U}_p\},$$

где $\mathcal{U}_p$ — множество допустимых расширенных программ. Нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Множество* $\mathcal{A}$ *есть выпуклый компакт в* $\mathcal{R}_w$.

Пусть S — подпространство пространства $\mathbb{R}^w$, ортогональное всем $l \in \mathbb{R}^w$ таким, что для каждого $z_0 \in \overline{X}_0$ имеем $\rho^+(l|\overline{M}) = \infty$. В качестве $L \subset S$ возьмем выпуклый компакт, содержащий образ единичной сферы, то есть существуют постоянные a_1, $a_2 > 0$, удовлетворяющие неравенству $a_2 > a_1$ и такие, что для каждого вектора $z \in S$ единичной нормы найдется $a \in [a_1, a_2]$, для которого $az \in L$. Тогда через $\mathcal{L}$ обозначим множество всех $(l_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0} \in \mathcal{R}_w$ таких, что $l_{z_0} \in L$ при всех $z_0 \in \overline{X}_0$.

Теорема 2. *Задача* (Pm) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\max_{(\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0} \in \mathcal{L}} \gamma((\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0}) \leqslant 0, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma((\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0}) = &\sum_{z_0 \in \overline{X}_0} \big(\bar{l}_{z_0}, V(\theta, \sigma) z_0\big) \\ &+ \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{\overline{X}_k \in \overline{\mathcal{X}}(\tau_k)} \rho^-\Big(\sum_{z_0 \in \overline{X}_k} \overline{B}^\top(s) V^\top(\theta, s) \bar{l}_{z_0} \big| P \Big)\, ds \\ &+ \sum_{z_0 \in \overline{X}_0} \int\limits_{\sigma}^{\theta} \big(\bar{l}_{z_0}, V(\theta, s) \overline{f}(s)\big)\, ds - \sum_{z_0 \in \overline{X}_0} \rho^+(\bar{l}_{z_0} | \overline{M}). \end{aligned}$$

Доказательство. В силу выпуклости и замкнутости множеств M и M_y, их декартово произведение $\overline{M}$ также выпукло и замкнуто, а следовательно, расширенное целевое множество $\mathcal{M}$ будет выпуклым и замкнутым в $\mathcal{R}_w$. Поскольку согласно лемме 3 множество достижимости $\mathcal{A}$ представляет собой выпуклый компакт, то для разрешимости задачи (Pm) требуется, чтобы пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ было непусто, другими словами, множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ должны не являться отделимыми, т.е.

$$\inf_{a \in \mathcal{A}} \langle \lambda, a \rangle \leqslant \sup_{b \in \mathcal{M}} \langle \lambda, b \rangle,$$

для любого линейного непрерывного функционала $\lambda \neq 0$. В терминах нижней и верхней опорных функций множества (7) последнее неравенство может быть записано в виде

$$\rho^-((\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0} | \mathcal{A}) - \rho^+((\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0} | \mathcal{M}) \leqslant 0, \quad \forall (\bar{l}_{z_0})_{z_0 \in \overline{X}_0} \in \mathcal{R}_w.$$

Для произвольного элемента $(\bar{l}_{z_0})_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{R}_w$, учитывая формулу общего решения (6), последнее выражение перепишется в форме

$$\sum_{z_0\in\overline{X}_0}(\bar{l}_{z_0},V(\theta,\sigma)z_0)+\inf_{(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{U}}\sum_{z_0\in\overline{X}_0}\Big(\bar{l}_{z_0},\int\limits_{\sigma}^{\theta}V(\theta,s)\overline{B}(s)u(s)\,ds\Big)$$
$$+\sum_{z_0\in\overline{X}_0}\Big(\bar{l}_{z_0},\int\limits_{\sigma}^{\theta}V(\theta,s)\overline{f}(s)\,ds\Big)-\sup_{(z_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{M}}\sum_{z_0\in\overline{X}_0}(\bar{l}_{z_0},z_{z_0})\leqslant 0. \tag{9}$$

Поскольку временной отрезок T разбивается моментами расслоения $\mathcal{T}$ на конечное число интервалов $(\tau_{k-1},\tau_k]$, которым соответствуют кластеные позиции $\overline{\mathcal{X}}(\tau_k)$, а допустимые расширенные программы имеют допустимый ресурс $\mathcal{P}_k$, то справедливо соотношение

$$\inf_{(u_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{U}}\sum_{z_0\in\overline{X}_0}\Big(\bar{l}_{z_0},\int\limits_{\sigma}^{\theta}V(\theta,s)\overline{B}(s)u(s)\,ds\Big)$$
$$=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{\overline{X}_k\in\overline{\mathcal{X}}(\tau_k)}\rho^-\Big(\sum_{z_0\in\overline{X}_k}\overline{B}^\top(s)V^\top(\theta,s)\bar{l}_{z_0}|P\Big).$$

Из определения расширенного целевого множества $\mathcal{M}$ следует

$$\sup_{(z_{z_0}(\cdot))_{z_0\in\overline{X}_0}\in\mathcal{M}}\sum_{z_0\in\overline{X}_0}(\bar{l}_{z_0},z_{z_0})=\sum_{z_0\in\overline{X}_0}\rho^+(\bar{l}_{z_0},\overline{M}).$$

Объединяя полученные выше выражения в (9) и учитывая определение множества $\mathcal{L}$, получаем формулу (8). □

Пользуясь определением множества $\overline{X}_0$ в лемме 2, можно ввести множества

$$X_k=\{x_0\in X_0\colon z_0\in\overline{X}_k\},\quad \mathcal{X}(\tau_k)=\{x_0\in X_0\colon z_0\in\overline{\mathcal{X}}(\tau_k)\},\quad k=[1,K], \tag{10}$$

которые будем именовать также кластером и кластерной позицией.

Следствие 1. *Задача* (Ps) *разрешима тогда и только тогда, когда в неравенстве* (8) *функция* $\gamma((\bar{l}_{x_0})_{x_0\in X_0})$ *определяется формулой*

$$\gamma((\bar{l}_{x_0})_{x_0\in X_0})=\sum_{x_0\in X_0}\big((l'_{x_0},V_{11}(\theta,\sigma)x_0)+(l''_{x_0},V_{21}(\theta,\sigma)x_0)\big)$$
$$+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{X_k\in\mathcal{X}(\tau_k)}\rho^-\Big(\sum_{x_0\in X_k}\big(B^\top(s)V_{11}^\top(\theta,s)l'_{x_0}+B^\top(s)V_{21}^\top(\theta,s)l''_{x_0}\big)\,|P\Big)\,ds$$
$$+\int\limits_{\sigma}^{\theta}\sum_{x_0\in X_0}\Big((l'_{x_0},V_{11}(\theta,s)f(s)+V_{12}(\theta,s)\dot{c}(s))$$
$$+(l''_{x_0},V_{21}(\theta,s)f(s)+V_{22}(\theta,s)\dot{c}(s))\Big)ds-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+(\bar{l}_{x_0}|\overline{M}), \tag{11}$$

где матрица Коши имеет блочный вид $V(t,s)=\|V_{ij}(t,s)\|_1^2$, $\bar{l}_{x_0}=\begin{pmatrix}l'_{x_0}\\ l''_{x_0}\end{pmatrix}$, $l'_{x_0}\in\mathbb{R}^n$, $l''_{x_0}\in\mathbb{R}^q$.

Доказательство. Задача (Pm) и задача (Ps) одновременно разрешимы, что следует из совокупности утверждений: лемма 2, [2, теорема 2.2] и теорема 1. Таким образом, из теоремы 2 следует, что задача (Ps) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (8), которое с учетом обозначений (10) и блочного вида матриц может быть переписано в виде (11). □

5. Частный случай интегрального сигнала наблюдения

Пусть сигнал о положении системы (1) имеет следующий вид

$$y(t) = \int\limits_{\sigma}^{t} (Q(s)x(s) + R(s)y(s))\,ds + c(t), \quad t \in T. \tag{12}$$

Интегральное уравнение (12) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = Q(t)x(t) + R(t)y(t) + \dot{c}(t),$$

с начальным условием $y(\sigma) = 0$. Объединим полученное уравнение с системой (1), имеем

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t) + \overline{B}(t)u + \overline{f}(t). \tag{13}$$

Здесь используются те же обозначения, как и в формуле (5).

Предложение 1. *Пусть $F(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — фундаментальная матрица однородной системы*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{14}$$

а $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{q\times q}$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\dot{y}(t) = R(t)y(t), \tag{15}$$

матрица $\Psi(t) \in \mathbb{R}^{q\times n}$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Psi}(t) = R(t)\Psi(t) + Q(t)F(t). \tag{16}$$

Тогда матрица Коши однородной системы $\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t)$ определяется формулой

$$V(t,s) = \begin{pmatrix} F(t)F^{-1}(s) & 0 \\ H(t,s) & \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $H(t,s) = \Psi(t)F^{-1}(s) - \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Psi(s)F^{-1}(s)$.

Доказательство. Поскольку матрицы $F(t)$ и $\Phi(t)$ являются фундаментальными матрицами уравнений (14) и (15) соответственно, то они удовлетворяют матричным дифференциальным уравнениям [17, с. 136]:

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t), \quad \dot{\Phi}(t) = R(t)\Phi(t),$$

С учетом того, что матрица $\Psi(t)$ удовлетворяет матричному уравнению (16), фундаментальная матрица системы (13) определяется формулой

$$U(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ \Psi(t) & \Phi(t) \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Фробениуса [18, с. 58], находим обратную матрицу

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} F^{-1}(t) & 0 \\ -\Phi^{-1}(t)\Psi(t)F^{-1}(t) & \Phi^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для матрицы Коши $V(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$, получаем (16). Справедливость утверждения доказана. □

Для системы (13) рассмотрим задачу гарантированного позиционного наведения — задачу (Ps′).

Следствие 2. *Формула* (11), *когда сигнал наблюдения имеет вид* (12), *может быть переписана в виде*

$$\gamma((\bar{l}_{x_0})_{x_0\in X_0}) = \sum_{x_0\in X_0}\Big((l'_{x_0}, F(\theta)F^{-1}(\sigma)x_0) + (l''_{x_0}, H(\theta,\sigma)x_0)\Big)$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{X_k\in\mathcal{X}(\tau_k)}\rho^-\Bigg(\sum_{x_0\in X_k}\left(B^\top(s)F^{-1\top}(s)F^\top(\theta)l'_{x_0} + B^\top(s)H^\top(\theta,s)l''_{x_0}\right)\Big|P\Bigg)\,ds$$

$$+\int\limits_{\sigma}^{\theta}\sum_{x_0\in X_0}\Big((l'_{x_0}, F(\theta)F^{-1}(s)f(s)) + (l''_{x_0}, H(\theta,s)f(s) + \Phi(\theta)\Phi^{-1}(s)\dot{c}(s))\Big)\,ds$$

$$-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+(l'_{x_0}|M) - \sum_{x_0\in X_0}\rho^+(l''_{x_0}|M_y). \tag{18}$$

Доказательство. Учитывая вид матрицы Коши (17) и явное представление опорных функций множества (7), формулу (11) преобразуем к виду (18). □

Пример. Рассмотрим линейную управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t).\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top$. Значения управления $u(t)$ ограничены отрезком $[-3,3]$. Таким образом, имеем следующие параметры системы (1): $n = 2$, $r = 1$, $P = [-p,p]$, $p = 3$, $f(t) \equiv 0$, $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $B = (0,1)^\top$.

Пусть $[\sigma,\theta] = [0,2]$ и множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных элементов, $X_0 = \{x'_0, x''_0\}$, где

$$x'_0 = (x'_{01}, x'_{02})^\top = (2,-3)^\top, \quad x''_0 = (x''_{01}, x''_{02})^\top = (-2,0)^\top.$$

Пусть данные о положении системы определяются сигналом вида (12), где $c(t) \equiv 0$, $R(t) \equiv I_2$, $Q(t) = \begin{cases}0, & t\in[0,1],\\ (t-1)^2 I_2, & t\in(1,2].\end{cases}$

Цель управления состоит в том, чтобы по имеющимся значениям сигнала сформировать программу управления системой (19), которая обеспечивала бы попадание координаты x_1 в отрезок $[-m,m]$, где $m = 1.7$, в момент $t = 2$. Значит, целевым множеством будет цилиндрическое множество с ограниченным основанием

$$M = \left\{(x_1,x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| \leqslant m, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Используя предложение 1 находим фундаментальные матрицы для систем (14), (15) в виде

$$F(t) = \begin{pmatrix}e^t & -e^{-t}\\ e^t & e^{-t}\end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = e^t I_2.$$

Тогда получаем

$$F(t)F^{-1}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t-s}+e^{s-t} & e^{t-s}-e^{s-t} \\ e^{t-s}-e^{s-t} & e^{t-s}+e^{s-t} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t)\Phi^{-1}(s) = e^{t-s}I_2, \quad t,s\in[0,2],$$

и матрица $\Psi(t)$, удовлетворяющая уравнению (16), определяется формулами

$$\Psi(t) = e^t I_2, \quad t\in[0,1],$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t + \frac{1}{3}e^t(t-1)^3 & -\frac{1}{2}e^t(e^{-2}-e^{-2t})(t-1)^2 \\ \frac{1}{3}e^t(t-1)^3 & e^t+\frac{1}{2}e^t(e^{-2}-e^{-2t})(t-1)^2 \end{pmatrix}, \quad t\in(1,2].$$

Следовательно, матрица Коши (17) определяется формулами

$$V(t,s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} F(t)F^{-1}(s) & 0 \\ 0 & \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \end{pmatrix}, & t\in[0,1], \\ \begin{pmatrix} F(t)F^{-1}(s) & 0 \\ H(t,s) & \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \end{pmatrix}, & t\in(1,2], \end{cases} \tag{20}$$

где $H(t,s) = \begin{pmatrix} h_1(t,s) & h_2(t,s) \\ h_2(t,s) & h_1(t,s) \end{pmatrix}$, $h_1(t,s) = \frac{1}{12}(-3e^{s-t}(t-1)^2 - 3e^{-2+s+t}(s^2 - t^2 + 2t - 2s) + e^{t-s}(3 - 12s + 9s^2 - 2s^3 + 6t - 6t^2 + 2t^3))$, $h_2(t,s) = \frac{1}{12}(3e^{s-t}(t-1)^2 + 3e^{-2+s+t}(s^2 - t^2 + 2t - 2s) + e^{t-s}(-3 + 3s^2 - 2s^3 + 6t - 6t^2 + 2t^3))$.

Для построения множества M_y вычислим

$$x(t;x_0',-p) = \begin{pmatrix} -2e^t + e^{-t} + 3 \\ -2e^t - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x(t;x_0'',-p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5e^{-t}+5e^t-6 \\ 5e^{-t}-5e^t \end{pmatrix},$$

$$x(t;x_0',p) = \begin{pmatrix} 4e^{-t}+e^t-3 \\ -4e^{-t}+e^t \end{pmatrix}, \quad x(t;x_0'',p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4e^{-t}+e^t-6 \\ -e^{-t}+e^t \end{pmatrix}, \quad t\in[0,2].$$

Учитывая последние выражения и определение множества M_y, с помощью формулы (6) находим

$$y_1 \triangleq y(x_0',-p) = \Phi(2)\int\limits_1^2 \Phi^{-1}(s)(s-1)^2 x(s;x_0',-p)\,ds = (-3.54,-2.54)^\top,$$

$y_2 \triangleq y(x_0'',-p) = (1.48,-0.24)^\top$, $y_3 \triangleq y(x_0',p) = (-5.05,-5.96)^\top$, $y_4 \triangleq y(x_0'',p) = (-0.04,1.19)^\top$. Тогда можно выбрать $M_y = \operatorname{Conv}\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, обозначим $m_y = |y_3| = 7.84$.

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям $z_0' = (x_{01}', x_{02}', 0, 0)^\top$ и $z_0'' = (x_{01}'', x_{02}'', 0, 0)^\top$ имеют вид

$$g_{z'}(t) = \overline{Q}V(t,0)z_0', \quad g_{z''}(t) = \overline{Q}V(t,0)z_0''.$$

где $V(t,0)z_0'$ и $V(t,0)z_0''$ с учетом (20) определяются формулами

$$V(t,0)z_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^t x_{01} - e^{-t}x_{02} \\ e^t x_{01} + e^{-t}x_{02} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} e^t x_{01} - e^{-t}x_{02} \\ e^t x_{01} + e^{-t}x_{02} \\ h_1(t,0)x_{01} + h_2(t,0)x_{02} \\ h_2(t,0)x_{01} + h_1(t,0)x_{02} \end{pmatrix}, & t \in (1,2], \end{cases}$$

Согласно лемме 2 матрица $\overline{Q} = (0, I_2) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, поэтому $g_{z'}(t) = g_{z''}(t) = 0$ при $t \in [0,1]$.

Поскольку начальные состояния различаются $z_0' \neq z_0''$ ($x_0' \neq x_0''$), то $\tau_1 = 1$ — первый момент расслоения каждого из этих однородных сигналов; при этом второй момент расслоения τ_2 — конечный момент $\theta = 2$, число K моментов расслоения однородных сигналов равно 2, кластерная позиция $\mathcal{X}(1)$ в момент $t = 1$ содержит единственное множество X_0, а кластерная позиция $\mathcal{X}(2)$ в момент $t = 2$ содержит два множества, $\{z_0'\}$ и $\{z_0''\}$.

Ввиду определения множества $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}_4$ и с учетом того, что M — цилиндрическое множество с ограниченным основанием, можно принять

$$((l_1', l_2', l_3', l_4')^\top, (l_1'', l_2'', l_3'', l_4'')^\top) = ((l', 0, l', 0)^\top, (l'', 0, l'', 0)^\top).$$

Тогда, используя формулу (17), для значений функции $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'' получаем

$$\gamma((l',0,l',0)^\top, (l'',0,l'',0)^\top) = c_1 l' + c_2 l'' - (m + m_y)(|l'| + |l''|) -$$

$$- \frac{p}{2}|l' + l''| \int\limits_0^1 \left| e^{2-s} - e^{s-2} \right| ds - \frac{p}{2}(|l'| + |l''|) \int\limits_1^2 \left| e^{2-s} - e^{s-2} \right| ds -$$

$$- \frac{p}{12}(|l'| + |l''|) \int\limits_1^2 \left| 3e^{s-2} + 3e^s(s^2 - 2s) + e^{2-s}(1 + 3s^2 - 2s^3) \right| ds,$$

где

$$c_1 = \frac{3 + 13e^4}{12e^2} x_{01}' + \frac{-3 + 7e^4}{12e^2} x_{02}', \quad c_2 = \frac{3 + 13e^4}{12e^2} x_{01}'' + \frac{-3 + 7e^4}{12e^2} x_{02}''.$$

В результате находим

$$\gamma = \max_{l', l'' \in \mathcal{L}} \gamma((l',0,l',0)^\top, (l'',0,l'',0)^\top) = -2.49 \leqslant 0;$$

этот максимум достигается при $l' = 0$ и $l'' = -1$. Следовательно, критерий разрешимости (8) выполняется, т.е. задача (Ps) разрешима. В качестве наводящего можно выбрать следующий пакет программ:

$$u_{x'}(t) = \begin{cases} u_{x',x''}(t), & t \in [0,1], \\ -p, & t \in (1,2]; \end{cases} \quad u_{x''}(t) = \begin{cases} u_{x',x''}(t), & t \in [0,1], \\ p, & t \in (1,2]; \end{cases}$$

где $u_{x',x''}(t) = p$, $t \in [0,1]$. Использование данного пакета программ в качестве управляющего воздействия, приводит первую координату систему (18) в следующие состояния

$$x_1\left(2; x', u_{x',x''}(\cdot)\right) = 1.67, \quad x_1\left(2; x'', u_{x',x''}(\cdot)\right) = 0.76,$$

т.е. на целевое множество M в момент времени $\theta = 2$.

На рисунках изображены зависимости первой координаты системы от времени для начальных состояний x' (Рис. 1) и x'' (Рис. 2). Пунктирной линией обозначена часть траектории, когда нет сигнала о состоянии системы ($t \in [0,1]$), а сплошной линией — когда система наблюдаема ($t \in [1,2]$). Заштрихованные фигуры являются целевым множеством M.

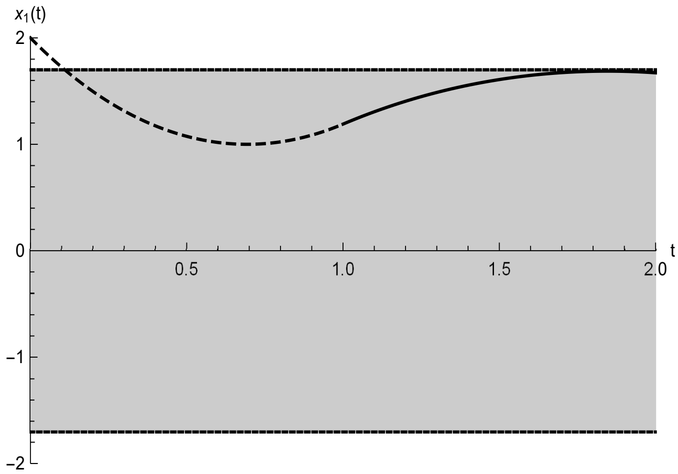

Рис. 1. Компонента x_1 движения системы (18) из x'

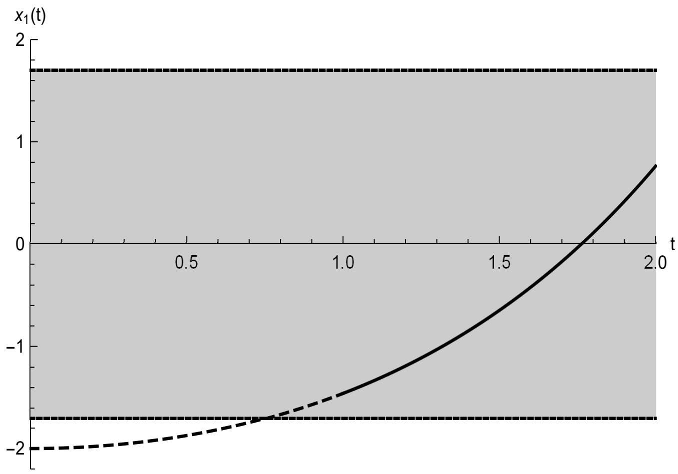

Рис. 2. Компонента x_1 движения системы (18) из x''

References

[1] Yu. S. Osipov, *Control Packages: an Approach to Solution of Positional Control Problems with Incomplete Information*, Russian Mathematical Surveys, **61**:4 (2006), 611–661. DOI: 10.1070/RM2006v061n04ABEH004342 Zbl 1122.49029

[2] A. V. Kryazhimskii, Yu. S. Osipov, *Idealizirovannye pakety programm i zadachi pozitsionnogo upravleniya s nepolnoy informatsiey (Idealized program packages and positional control problems with incomplete information)*, Trudy Inst. Matem. Mekhan. Uro RAN, **15**:3 (2009), 139–157.

[3] A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov, *On the Solvability of Problems of Guaranteeing Control for Partially Observable Linear Dynamical Systems*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **277**, (2012), 144–159. DOI: 10.1134/S0081543812040104 Zbl 1295.93033

[4] N. N. Krasovskii, *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy (Game Problems with Oncoming Motions)*, Moscow: Nauka, 1970. Zbl 0246.90060

[5] A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya (Guarantee Optimization in Control Problems)*, Moscow: Nauka, 1981. Zbl 0542.90106

[6] A. V. Kryazhimskiy, N. V. Strelkovskii, *An Open-Loop Criterion for the Solvability of a Closed-Loop Guidance Problem with Incomplete Information. Linear Control Systems*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **291**:1 (2015), 113–127. DOI: 10.1134/S0081543815090084 Zbl 1334.93067

[7] V. I. Maksimov, *Guidance Problem for a Distributed Sytem with Incomplete Information on the State Coordinates and an Unknown Initial State*, Differential Equations, **52**:11 (2016), 1442–1452. DOI: 10.1134/S0012266116110069 Zbl 1357.93006

[8] V. I. Maksimov, *Differential Guidance Game with Incomplete Information on the State Coordinates and Unknown Initial State*, Differential Equations, **51**:12 (2015), 1656–1665. DOI: 10.1134/S0374064115120134 Zbl 06567320

[9] V. L. Rozenberg, *A Control Problem under Incomplete Information for a Linear Stochastic Differential Equation*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **295**:1 (2016), 145–155. DOI: 10.1134/S0081543816090157 Zbl 1362.93145

[10] P. G. Surkov, *The Problem of Package Guidance with Incomplete Information for a Linear Control System with a Delay*, Computational Mathematics and Modeling, **28**:4 (2017), 504–516. DOI: 10.1007/s10598-017-9377-y Zbl 1381.93046

[11] M. S. Blizorukova, *On a control problem for a linear system with delay in the control*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **297**:1 (2017), 35–42. DOI: 10.1134/S0081543817050054 Zbl 1373.93144

[12] N. L. Grigorenko, A. E. Rumyantsev, *Terminal control of a nonlinear process under disturbances*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **297**, (2017), 108–116. DOI: 10.1134/S0081543817050121 Zbl 1378.49031

[13] S. Nakagiri, *On the Fundamental Solution of Delay-Differential Equations in Banach Spaces*, J. Differential Equations, **41**:2 (1981), 349–368. DOI: 10.1016/0022-0396(81)90043-7 Zbl 0441.35068

[14] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to The Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, Cairo, 2007. MR2319815

[15] Yu. F. Dolgii, P. G. Surkov, *Matematicheskie modeli dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem: ucheb. posobie (Mathematical models of dynamical systems with delay: tutorial)*, Publishing house of Ural University, Ekaterinburg, 2012.

[16] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional-Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, 99, New York: Springer-Verlag, 1993. MR1243878

[17] L. S. Pontryagin, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya (Ordinary differential equations)*, Moscow: Nauka, 1982. MR0708719

[18] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, New York: Chelsea Publishing Company, 1959. MR0107649

Platon Gennad'evich Surkov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
16 S.Kovalevskaya Str.,
620990, Ekaterinburg, Russian Federation.
E-mail address: spg@imm.uran.ru