S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 412–421 (2018) УДК 517.544
DOI 10.17377/semi.2018.15.037 MSC 47A68

О СВЯЗИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА И УСЕЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА—ХОПФА

А.Ф. ВОРОНИН

Abstract. In this paper we an equivalen find a connection between the generalized Riemann boundary value problem (also known under the name of the Markushevich boundary problem or the $\mathbb{R}$-linear problem) and convolution equation of the second kind on a finite interval.

Keywords: $\mathbb{R}$-linear problem, problem of Markushevich, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique, convolution equation.

1. Введение

Обобщенная краевая задачи Римана (известная также под названием задачи Маркушевича или задачи $\mathbb{R}$ — линейного сопряжения) на контуре $\Gamma \subset R^2$ состоит в определении функций $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$, аналитических внутри и вне Γ, соответственно, по граничному условию на Γ

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \qquad (*)$$

где a, b, c— заданные функции ($a \in C(\Gamma),\ a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$).

Краевой задаче (*) и ее непосредственным обобщениям при различных предположениях о классах коэффициентов и граничных контуров посвящено много работ. Их обзор можно найти в [1, гл. 5, § 39.3], [2, гл. 5, § 20], [3].

Обобщенная краевая задачи Римана привлекает внимание исследователей с середины прошлого века. С одной стороны, задача является фундаментальной проблемой в теории краевых задач для аналитических функций. С другой стороны, задача тесно связана с рядом нерешенных проблем в механике сплошной

Voronin, A.F., On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener-Hopf equation.

Поступила 4 марта 2018 г., опубликована 23 апреля 2018 г.

среды, анализе, геометрии поверхностей и математической физике. При этом, сама задача имеет простую формулировку.

Первые результаты изучения задачи (*) получены в работах Н.И. Мусхелишвили [4], И. Н. Векуа и А.К. Рукхадзе [5], Г.М. Голузина [6], А.И. Маркушевича [7], Н.П. Векуа [8], Б.В. Боярского [9], Л.Г. Михайлова [10-11], И.Х. Сабитова [12] и Г.С. Литвинчука [13]. На настоящий момент нет общей теории задачи (*), известны лишь отдельные результаты, которые, в своей основе, получены еще в прошлом веке на начальном пути исследования задачи (см., например, [3], [14, Введение]).

Далее обобщенную краевую задачу Римана (*) также будем называть и задачей Маркушевича, как и многие исследователи этой задачи. Отметим несколько последних работ по задаче Маркушевича (*). В [15] на основе работы [13] получено достаточное условие корректности задачи Маркушевича (*). В [16] изучен вырожденный случай задачи (*). В [17] задача Маркушевича (*) исследована при условии $a = 0$, что (принципиально) отличается от настоящей работы (здесь $a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$).

Хорошо известно, что различные краевые задачи для аналитических функций (в частности, задача (*)) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма и к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши (см. исторические сведения в [1],[18]). На этом пути были получены классические результаты по корректности краевых задач для аналитических функций [1],[18]. Однако, в общем случае, эти интегральные уравнения оказались не менее сложными для дальнейшего исследования чем исходные краевые задачи.

В данной работе обобщенная краевая задачи Римана сводится к усеченному уравнению Винера-Хопфа (интегральному уравнению в свертках второго рода на конечном интервале). Класс уравнений в свертках второго рода на конечном интервале является одним из наиболее изученных в более общем классе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поэтому, можно ожидать, что идея такого сведения приведет к новым результатам в исследовании искомой краевой задачи (*).

Здесь, в качестве контура Γ будем рассматривать замкнутую жорданову кривую. Не уменьшая общности считаем, что контур Γ совпадает с расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}$ в комплексной плоскости $x + iy$.

Прежде чем перейти непосредственно к точной формулировке изучаемой задачи введем необходимые обозначения.

Для $1 \leq n, m \leq 2$ положим $L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt,\ x \in \mathbb{R};$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ $(W_-^{n\times n})$ — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при C=0 соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n\times n}$, $W_{0\pm}^{n\times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при W будем опускать. Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Рассмотрим краевую задачу Маркушевича о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где

$$a, b \in W,\quad a(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R},\ c \in W_0. \tag{0.2}$$

Краевой задаче (0.1)-(0.2) соответствует [13, §3] векторный аналог – краевая задача Римана для вектор-функции размера 2. Приведем здесь лемму из [15] об эквивалентности этих двух краевых задач. Данная лемма имеет несколько другую, чем в [13, §3] формулировку.

Рассмотрим краевую задачу Римана на $\mathbb{R}$, в которой требуется определить вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ из краевого условия:

$$\Psi^+(x) = M(x)\overline{\Psi^+(x)} + q(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

где

$$M \in \mathcal{G}W^{2\times 2},\ q \in W_0^{2\times 1},\ M = \frac{1}{\overline{a}}\begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\overline{b} \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

$$q_1 = \frac{\overline{a}c - b\overline{c}}{\overline{a}},\ q_2 = -\frac{\overline{c}}{\overline{a}}. \tag{0.5}$$

Здесь классы функций $W_0^{2\times 1}$, $W_{0\pm}^{2\times 1}$ определены по аналогии с классами $W_0^{2\times 2}$, $W_{0\pm}^{2\times 2}$, соответственно. Например, условие $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ означает, что

$$\Psi^+ = (\Psi_1^+, \Psi_2^+)^T,\ \Psi_j^+ \in W_{0+},\ j = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования.

Справедлива [15] следующая

Лемма 1. *Для существования решения задачи Маркушевича (0.1)-(0.2) необходимо и достаточно существование решения краевой задачи Римана (0.3)-(0.5). Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами*

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x),\ \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}. \tag{0.6}$$

Не уменьшая общности, в задаче Маркушевича (0.1) будем считать, что

$$a(x) = p^{\nu} \equiv \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\nu}, \tag{0.7}$$

где ν – неотрицательное целое число.

В самом деле, из условия (0.2) на коэффициент a следует, что функция a допускает эффективную факторизацию

$$a(x) = a^+(x)p^{\mu}a^-(x),\ x \in \mathbb{R},$$

где $a^{\pm} \in \mathcal{G}W_{\pm}$, μ— индекс Коши функции $a(x)$.

Положив

$$a_1(x) := \begin{cases} a^+(x), & \mu > 0, \\ a^+(x)p^{\mu}, & \mu \leq 0, \end{cases}$$

$$\varphi_1^+ := \frac{\varphi^+}{a_1},\ \varphi_1^- := \varphi^-\, a^-,\ b_1 = \frac{b}{a_1\,\overline{a^-}},\ c_1 := \frac{c}{a_1},$$

и разделив обе части краевого условия (0.1) на функцию a_1 перепишем задачу Маркушевича в требуемом виде

$$\varphi_1^+(t) = p^{\nu}\varphi_1^-(t) + b_1(t)\overline{\varphi_1^-(t)} + c_1(t),$$

где

$$\nu = \left\{ \begin{array}{ll} \mu, & \mu > 0, \\ 0, & \mu \leq 0. \end{array} \right. , \ \varphi_1^{\pm} \in W_{0\pm}, \ b_1 \in W, \ c_1 \in W_0.$$

Приведем хорошо известные результаты из теории краевой задачи Римана и факторизации матриц-функций (см., например, [18, гл. 6],[2, гл. 1, §5], [19]). Будем говорить, что матрица $G \in \mathcal{G}W^{2\times 2}$ допускает стандартную (левую) факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x) = G_+(x)D(x)G_-(x), \ x \in \mathbb{R},$$

где $G_\pm \in \mathcal{G}W_\pm^{2\times 2}$ ($G_\pm$ — фактор-множители), $D(x)$ - диагональная матрица-функция,

$$D(x) = \{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1}, \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_2}\},$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2$ — частные индексы матрицы G (целые числа), $\kappa :=\mathrm{Ind}\det G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}} \arg\det G(x) = \sum\limits_{j=1}^{2} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

Корректность краевой задачи Римана определяют частные индексы ее матричного коэффициента. В частности, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть суммарный индекс матрицы $M(t)$ равен нулю. Тогда для устойчивости чисел p и l (где l – число линейно независимых решений, p – число условий разрешимости задачи Римана (0.3)-(0.5)) относительно элементов матрицы $M(x)$ необходимо и достаточно, чтобы частные индексы матрицы $M(x)$ были равны нулю. Кроме того, если частные индексы матрицы $M(x)$ равны нулю, то однородная задача Римана (0.3)-(0.5) имеет только тривиальное решение.*

1. Предварительные результаты. На алгебре W_0 определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^{\pm} \ : \ W_0 \ \to \ W_{0\pm}, \ P_0^{\pm}\mathcal{F}g(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}g(t)\theta(\pm t)\,dt, \ p \in \mathbb{R},$$

где θ - функция Хевисайда. Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I, \ \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}g(p)\}(t) = g(t)\theta(\pm t), \ t \in \mathbb{R},$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье.

Как уже говорилось выше, в работе будет установлена связь между задачей Маркушевича (0.1) и усеченным уравнением Винера-Хопфа. Рассмотрим искомое усеченное уравнение Винера-Хопфа на конечном интервале $(0, \tau)$, $\tau > 0$:

$$u(t) - \int\limits_0^{\tau} k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \tag{1.1}$$

где

$$k \in L_1(-\tau, \tau), \quad f \in L_1(0, \tau). \tag{1.2}$$

Решение $u(t)$ уравнения (1.1) при условии (1.2) (задачи (1.1)-(1.2)) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

В работах автора [20, лемма 1.1],[21, теорема 1] было установлено, что задача (1.1)-(1.2) эквивалентна некоторой краевой задаче Римана (в алгебре Винера

$W^{2\times2}$) с коэффициентами $G \in \mathcal{G}W^{2\times2}$, $g \in W_0^{2\times1}$. В следующих пунктах будет показано, что матрицы $G(x)$ и $M(x)$ имеют одинаковый набор (левых) частных индексов, а также эквивалентность задач (1.1)-(1.2) и (0.3)-(0.4) при некоторых условиях связи между коэффициентами этих задач, что является основным результатом работы.

Для удобства изложения ниже приведем лемму 2, которая следуют из [21, теорема 1] (или из [20, лемма 1.1]).

Положим

$$k(t) := 0,\ t\overline{\in}(-\tau,\tau),\ k_\pm(t) := \theta(\pm t)k(t),\ u(t) = f(t) = 0,\ t\overline{\in}(0,\tau),$$

$$\Lambda^\pm(x) := 1 - \mathcal{F}k_\pm(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Для вектор-функций $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{2\times1}$ рассмотрим на расширенной прямой $\mathbb{R}$ краевую задачу Римана

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

где

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda^-(x)}\begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x) & 1-\mathcal{F}k(x)\end{pmatrix} \in \mathcal{G}W^{2\times2}, \tag{1.5}$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\Lambda^-(x)}\mathcal{F}k_-(x)\mathcal{F}f(x),\ g_2(x) = \frac{1}{\Lambda^-(x)}e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}f(x). \tag{1.6}$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполнены неравенства в (1.3). Тогда задача (1.1)-(1.2) эквивалентна краевой задаче Римана (1.4)-(1.6) с дополнительным условием*

$$e^{\pm ix\tau}\Phi^\mp \in W_{0\pm}^{2\times1}. \tag{1.7}$$

При этом, решения уравнения (1.1) и краевой задачи (1.4)-(1.7) связаны равенствами

$$\Phi_1(x) = \mathcal{F}k_-(x)\mathcal{F}u(x),\ \Phi_2(x) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x),$$

$$\mathcal{F}u(x) = \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau}\Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x), \tag{1.8}$$

где

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-,\ \Phi^\pm(x) = P_0^\pm\Phi(x).$$

Кроме того, матрица-функция $G(x)$ допускает левую и правую стандартные факторизации с суммарным индексом æ_0:

$$\text{æ}_0 = Ind\det G(x) = Ind\,\frac{\Lambda^+(x)}{\Lambda^-(x)} \geq 0.$$

Правая (нестандартная) факторизация имеет следующий явный вид :

$$G(x) = -A_-(x)\,A_+(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

где

$$A_+(x) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_-(x) \\ 0 & \Lambda^+(x)\end{pmatrix},\quad A_-(x) = \frac{1}{\Lambda^-(x)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x) & \Lambda^-(x)\end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Замечание 1. Можно считать, не уменьшая общности, что неравенство в условие (1.3) выполнено (см. [20, Замечание 1.1]).

2. Об эквивалентности задачи Маркушевича и уравнения в свертках. Рассмотрим, сначала, векторный аналог задачи Маркушевича (задачу Римана (0.3)-(0.5)) и задачу Римана (1.4)-(1.7) (которая является аналогом задачи (1.1)-(1.2)). Из (1.9)-(1.10) следует, что фактор-множители правой стандартной факторизации матрицы $G(x)$ имеют треугольный вид (нижний и верхний треугольный, соответственно). Аналогичный вид имеют фактор-множители правой стандартной факторизации матрицы $M(x)$ в (0.4), что следует из факторизации матрицы $M(x)$ в [15, формула (1.3)]. Такая аналогия позволяет найти связь между самими матрицами M и G и их левыми стандартными факторизациями.

Для простоты считаем, что все возможные нули функции $\Lambda^-(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ сосредоточены в точке $z = -i$.

Имеют место следующие две теоремы:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (0.7) и (1.3), а коэффициент b задачи Маркушевича имеет следующий общий вид:*

$$b(x) = e^{-ix\tau} p^{\nu} \frac{\overline{\mathcal{F}k_-(x)}}{\Lambda^-(x)} + F^+(x), \tag{2.1}$$

где

$$\nu = -Ind\,\Lambda^-(x),\ \ F^+ \in W_+. \tag{2.2}$$

Кроме того, пусть

$$k(t) = k_-(t) + \overline{k_-(-t)},\ \ t \in (-\tau, \tau). \tag{2.3}$$

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (0.3)-(0.5) и (1.4)-(1.7) имеют одинаковый набор (левых) частных индексов. Более того, справедливо равенство

$$M(x) = \{\frac{1}{\Lambda_0^-(x)}, 1\}\, I_1\, G(x)\, \{\Lambda_0^-(x), 1\},\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где

$$\Lambda_0^- = p^{\nu}\Lambda^-,\ \ I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и*

$$c(x) = -e^{ix\tau} b(x)\overline{\mathcal{F}f(x)},\ \ f(t) = -\overline{f(\tau - t)},\ \ t \in (0, \tau). \tag{2.5}$$

Тогда задача Маркушевича (0.1)-(0.2) эквивалентна задаче (1.1)-(1.2). Эквивалентность устанавливается равенствами:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\varphi^-(x)} - e^{ix\tau}\varphi^-(x) + \mathcal{F}f(x)\}(t), \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} \varphi^-(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x)\right), \\ \varphi^+(x) = \frac{1}{2\overline{\Lambda^-(x)}}\left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)}\right) + F^+(x)\overline{\varphi^-(x)}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где функции $\Phi_1^{\pm}$, $\Phi_2^{\pm}$ определены в (1.8).

3. Доказательство теорем 2,3. Для простоты доказательства будем считать, что $F^+ = 0$ (в условии (2.1)). В самом деле, краевое условие (0.1) всегда можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\varphi_1^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + (b(x) + F^+(x))\overline{\varphi^-(x)} + c(x),\ x \in \mathbb{R},$$

где

$$\varphi_1^+(x) = \varphi^+(x) + F^+(x)\overline{\varphi^-(x)} \in W_{0+}. \tag{3.1}$$

Из условий (2.3) и (1.3) следует, что

$$\mathcal{F}k_+(x) = \overline{\mathcal{F}k_-(x)},\ \Lambda^+(x) = \overline{\Lambda^-(x)}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в правой части равенства (2.4), с учетом (2.1) и двух вышестоящих равенств получим матрицу $M(x)$ (в левой части равенства (2.4)). Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 умножим слева левую и правую части краевгое условия (1.4) на множитель

$$\{\frac{1}{\overline{\Lambda_0^-(x)}}, 1\}\, I_1.$$

Положив во вновь полученом краевом условии

$$\phi^+ := \{\frac{1}{\overline{\Lambda_0^-(x)}}, 1\}\, I_1\, \Phi^+,\ \phi^- := -\{\frac{1}{\Lambda_0^-}, 1\}\, \Phi^-, \tag{3.2}$$

с учетом теоремы 2 (равенства (2.4)), имеем

$$\phi^+(x) = M(x)\, \phi^-(x) + \widetilde{q}(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

где

$$\widetilde{q}(x) = \{\frac{1}{\overline{\Lambda_0^-(x)}}, 1\}\, I_1\, g(x). \tag{3.4}$$

Покажем, что $\widetilde{q} = q$. Из (3.4) непосредственно получим

$$\widetilde{q}(x) = \frac{\mathcal{F}f}{\Lambda^-(x)} \left(\frac{e^{-ix\tau}\overline{\mathcal{F}k_-(x)}}{\overline{\Lambda_0^-(x)}}, \mathcal{F}k_- \right)^T. \tag{3.5}$$

С другой стороны, из леммы 1 и первого равенства в условии (2.5) имеем

$$q_1 = c - p^\nu b\bar{c} = b\left(-e^{ix\tau}\overline{\mathcal{F}f} + p^\nu e^{-ix\tau}\bar{b}\mathcal{F}f\right), \tag{3.6}$$

$$q_2 = -\bar{c}p^\nu = \frac{\mathcal{F}f}{\Lambda^-(x)}\mathcal{F}k_-. \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) непосредственно следует, что $\widetilde{q_2} = q_2$. Осталось показать, что $\widetilde{q_1} = q_1$. Можно видеть, что

$$\overline{\mathcal{F}f(x)} = -e^{-ix\tau}\mathcal{F}f(x). \tag{3.8}$$

В самом деле, из следующего очевидного равенства

$$\overline{\mathcal{F}f(x)} = e^{-ix\tau}\mathcal{F}\{\overline{f(\tau - t)}\}(x),$$

и условия на f в (2.5) следует справедливость (3.8).

Подставим теперь выражение для $\overline{\mathcal{F}f(x)}$ из (3.8) в правую часть (3.6), с учетом (2.1)и (3.5) получим

$$q_1 = b\,\mathcal{F}f\left(1 + \frac{\mathcal{F}k_-}{\Lambda^-}\right) = \widetilde{q_1}.$$

Таким образом показали, что если $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ — решение краевой задачи Римана (0.3)-(0.5) (векторного аналога задачи Маркушевича), то функции

$$\phi^+ = \Psi^+, \ \phi^- = \overline{\Psi^+}$$

удовлетворяют краевому условию (3.3) (при $\widetilde{q} = q$). Следовательно, из (3.2)-(3.3) имеем

$$\Psi^+ = \{\frac{1}{\overline{\overline{\Lambda_0^-(x)}}}, 1\}\, I_1\, \Phi^+, \ \overline{\Psi^+} = -\{\frac{1}{\overline{\overline{\Lambda_0^-}}}, 1\}\, \Phi^-. \tag{3.9}$$

Из (3.9) получим

$$\Phi^+ = I_1\, \{\overline{\Lambda_0^-(x)}, 1\}\, \Psi^+, \ \Phi^- = -\{\Lambda_0^-, 1\}\, \overline{\Psi^+} \tag{3.10}$$

— решение задачи Римана (1.4)-(1.7) (которая является аналогом задачи (1.1)-(1.2). Верно и обратное утверждение. Если $\Phi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ — решение краевой задачи Римана (1.4)-(1.7), то функции $\phi^\pm \in W_{0\pm}^{2\times 1}$, определенные в (3.2), будут удовлетворять краевому условию (3.3) (при $\widetilde{q} = q$). Тогда

$$\Psi^+ = \frac{1}{2}\left(\phi^+ + \overline{\phi^-}\right) = \frac{1}{2}\left(\{\frac{1}{\overline{\overline{\Lambda_0^-(x)}}}, 1\}\, I_1\, \Phi^+ \, - \{\frac{1}{\overline{\overline{\Lambda_0^-}}}, 1\}\, \overline{\Phi^-}\right) \tag{3.11}$$

— решение краевой задачи Римана (0.3)-(0.5). Первое равенство в цепочки равенств (3.11) вытекает из совпадения коэффициентов задач Римана (3.3) и (0.3), а также из следующих свойств матрицы M и вектора q [15] :

$$M = \overline{M^{-1}}, \ M\,\overline{q} = -q.$$

Таким образом, эквивалентность рассматриваемых в теореме 3 задач доказана. Осталось показать справедливость формул (2.6)-(2.7).

Из (3.11), леммы 1 (формулы в(0.6)) и равенства (3.1) непосредственно получим формулы в (2.7). Из (3.10) и последнего равенства в (1.8) следуют формулы в (2.6). Теорема 3 доказана.

4. О корректной разрешимости задачи Маркушевича. Имеет место

Следствие 1. *Пусть*

$$\mu = Ind\, a(x) = 0 \tag{4.1}$$

и выполнены условия (1.3) и (2.1)-(2.3), где $\nu = 0$. Тогда задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$ (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи a, b, c в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное уравнение (1.1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство следствия 1. Пусть задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$. Тогда по теореме 1 частные индексы матрица $M(x)$ равны нулю. По теореме 2 частные индексы матрицы $G(x)$ также равны нулю, следовательно, однородная задача Римана (1.4)-(1.5) имеет только тривиальное решение. Тогда по лемме 2 однородное уравнение (0.1) имеет только тривиальное решение в $L_1(0, \tau)$.

Пусть теперь однородное уравнение (0.1) имеет только тривиальное решение в $L_1(0, \tau)$. Покажем, что в этом случае частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю, т.е. однородная задача Римана (1.4)-(1.5) имеет только тривиальное решение. Предположим, что существует нетривиальное решение однородной задачи Римана (1.4)-(1.5). Покажем, что это решение подчиняется ограничению (1.7) (в лемме 2). Тем самым будет показано, что все условия леммы 2 выполнены, следовательно, по лемме 2 однородная задача Римана (1.4)-(1.5) имеет только тривиальное решение. Из равенства (1.4) при $g = 0$ следует, что

$$e^{-ix\tau}\Phi^+ \in W_{0-}^{2\times 1},$$

т.к.

$$e^{-ix\tau}G(x)\Phi^-(x) \in W_{0-}^{2\times 1}$$

по построению. Аналогично,

$$e^{ix\tau}\Phi^- \in W_{0+}^{2\times 1},$$

т.к.

$$G^{-1}(x) = -\frac{1}{\overline{\Lambda^-(x)}}\begin{pmatrix} 1-\mathcal{F}k(x) & e^{ix\tau}\mathcal{F}k_-(x) \\ -e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x) & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}W^{2\times 2},$$

$$e^{ix\tau}G^{-1}(x)\Phi^-(x) \in W_{0+}^{2\times 1}$$

по построению. Т.е. ограничение (1.7) выполняется.

По теореме 2 получим, что матрица $M(x)$ также будет иметь нулевые частные индексы. Тогда из теореме 1 следует, что задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$. Следствие доказано.

Приведем пример применения следствия 1. Рассмотрим задачу Маркушевича (0.1)-(0.2) при условии

$$a(x) = 1,\ b(x) = e^{-ix\tau}\frac{\overline{\mathcal{F}k_-(x)}}{\overline{1-\mathcal{F}k_-(x)}}, \tag{4.2}$$

где

$$||k_-|| \equiv ||k_-||_{L_1(-\tau,0)} < 1/2. \tag{4.3}$$

Тогда по следствию 1 получим, что задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$. В самом деле, рассмотрим сопутствующее однородное уравнение в свертках (1.1) при ограничении (2.3). Из (2.3) и (4.3) имеем

$$||k||_{L_1(-\tau,\tau)} < 1.$$

Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе однородная задача (1.1)-(1.2) имеет только тривиальное решение. Легко видеть, что условия (2.1)(при $F^+ = 0$) и (2.3) выполнены, а справедливость неравенства в (1.3) и условия (2.2) ($\mu = \nu = 0$) следует из оценки:

$$|1-\mathcal{F}k_-(x)| \geq 1 - ||k_-|| > 1/2. \tag{4.4}$$

Таким образом, все условия следствия 1 выполнены и сопутствующая однородная задача (1.1)-(1.2) имеет только тривиальное решение.

С другой стороны, из (4.2)-(4.4) имеем

$$|b(x)| \leq \frac{||k_-||}{|1-\mathcal{F}k_-(x)|} < 1.$$

Тогда, хорошо известно (см. [9] или [11], [13]), что задача Маркушевича (0.1)-(0.2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$.

References

[1] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, New-York: Dover Publication Inc., 1990. Zbl 0830.30026

[2] Georgii S. Litvinchuk, *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*, Springer Science, Business Media, 2012.

[3] Vladimir V. Mityushev, $\mathbb{R}$-*linear and Riemann–Hilbert Problems for Multiply Connected Domains*, Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics, (2012), 147—176. Zbl 1276.30053

[4] Muskhelishvili N.I., *To the problem of torsion and bending of beams constituted from different materials*, Izv. AN SSSR, **7** (1932), 907—945. (In Russian). JFM 58.1279.03

[5] Vekua I.N. and Rukhadze A.K., *The problem of the torsion of circular cylinder reinforced by transversal circular beam*, Izv. AN SSSR, **3** (1933), 373—386. (In Russian). JFM 59.1426.05

[6] Golusin G.M., *Solution of plane heat conduction problem for multiply connected domains enclosed by circles in the case of isolated layer*, Math. zb. **42** (1935), 191—198. (In Russian). Zbl 0012.35601

[7] A. I. Markushevich, *Ob odnoi granichnoi zadache teorii analiticheskikh funktsii*, Uchenye zapiski MGU, **100** (1946), 20–30.

[8] Vekua N. P., *On a boundary problem of the theory of functions of a complex variable for several unknown functions*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **16** (1952), 157—180. (In Russian). Zbl 0049.33301

[9] Bojarski B.V., *On the generalized boundary value problem of Hilbert*, Communications of the Academy of Sciences of the Georgian SSR, **25**:4 (1960), 385–390. (In Russian).

[10] L. G. Mikhailov, *A general boundary-value problem for infinitesimal bending of fused surfaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **5** (1960), 99–109. (In Russian). Zbl 0129.29502

[11] Mihailov L. G., *The general conjugacy problem for analytic functions and its applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **27**:5 (1963), 969—992. (In Russian).

[12] Sabitov I.Kh., *On the general boundary-value problem of linear conjugation on a circle*, Siberian Mathematical Journal, **5**:1 (1964), 124–129. (In Russian). MR0223585

[13] Litvinchuk G. S., *Dve teoremy ob ustoichivosti chastnykh indeksov kraevoi zadachi Rimana i ikh prilozhenie*, Izv. vuzov. Matematika, **12** (1967), 47–57. Zbl 0192.43501

[14] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovsky, *Sharp estimates of defect numbers of a generalized Riemann boundary value problem, factorization of hermitian matrix-valued functions and some problems of approximation by meromorphic functions*, Math. USSR-Sb., **45**:2 (1983), 205—224. Zbl 0509.30033

[15] Voronin A. F., *Conditions for the stability and uniqueness of the solution of the Markushevich problem*, Sib. Elektron. Matem. Izv., **14** (2017), 511–517. (In Russian). Zbl 1370.30019

[16] V. M. Adukov, A. A. Patrushev, *On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **11**:2 (2011), 9–20. (In Russian).

[17] Idzhad Kh. Sabitov, *Markushevich's ill-posed boundary-value problem for multiply connected domains with circular boundaries*, Izvestiya: Mathematics, **76**:6 (2012), 1218–1256. Zbl 1257.30038

[18] N.I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen: Wolters-Noordhoff Pabl., 1972.

[19] Gokhberg I. Ts., Krein M. G., *Sistemy integralnykh uravnenii na polupryamoi s yadrami, zavisyaschimi ot raznosti argumentov*, Uspekhi mat. nauk, **13**:2 (1958), 3–72.

[20] Voronin A.F., *A complete generalization of the Wiener-Hopf method to convolution integral equations with integrable kernel on a finite interval*, Differential Equations, **40**:9 (2004), 1259—1267. Zbl 1079.45003

[21] Voronin A.F., *Systems of convolution equations of the first and second kind on a finite interval and factorization of matrix-functions* , Sib. Math. J., **53**:5 (2012), 781—791. Zbl 1263.45002

Anatoly Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: voronin@math.nsc.ru