S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 422–435 (2018) УДК 517.98
DOI 10.17377/semi.2018.15.038 MSC 35Q35, 35D35

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ПОКРЫТОЙ УПРУГИМ ЛЬДОМ

Д.О. ЦВЕТКОВ

Abstract. We study the problem on small oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel with a free surface completely covered with the elastic ice. The developed approach is based on application of the theory of operator matrices acting in the Hilbert space, the initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for differential-operator of a special form. For this Cauchy problem a theorem on strong solvability is proved.

Keywords: stratification effect in ideal fluids, initial boundary value problem, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.

1. Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложение в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1] – [4] и работы [5], [6], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Так, в океанах

Tsvetkov, D.O., Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with the elastic ice.

Поступила 14 августа 2017 г., опубликована 26 апреля 2018 г.

эти силы порождают внутренние инерционные волны большой амплитуды, которые могут привести к катастрофам. В танкерах, заполненных нефтью, могут возникнуть колебания, приводящие к неустойчивым движениям корабля.

Ледяной покров является важным компонентом гидрологического режима замерзающих морей и океанов. Наличие плавающего льда на поверхности морей и океанов существенным образом влияет на характер их поведения. Рассмотрение таких проблем является одним из важных разделов океанологии, практическая эффективность которого несомненна. Близкую к задаче динамики жидкости в областях, покрытых упругим льдом, изучалась в работах [7], [8].

2. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ, полностью покрытой упругим льдом. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ – липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$(1)\quad 0 < N^2_{min} \le N^2(x_3) \le N^2_{max} = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0,$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля-Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ – отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ – отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) – отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см., например, [5], [6]):

$$(2)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega),\\
&\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),\\
&\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma),\\
&p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0,\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (x\in\Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{aligned}$$

Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0$ есть условия сохранения объема.

Отметим, что наиболее сложно получается линеаризованное динамическое граничное условие на участке Γ упругого льда. Для его вывода воспользуемся так называемым динамическим уравнением Софи Жермен (для мало прогнутой упругой пластинки)

$$-d\triangle_2^2\zeta - \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = q(t,x_1,x_2), \tag{3}$$

где $d > 0$ – коэффициент жесткости льда, ρ_1 – поверхностная плотность льда, $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ – плоский (двумерный) лапласиан, а $q(t,x_1,x_2)$ – действующая сверху вниз нагрузка на единицу площади поверхности Г. Эта нагрузка $q(t,x_1,x_2)$ складывается из атмосферного давления и давления в жидкости:

$$q(t,x_1,x_2) = -P|_\Gamma + p_a = -p_a + \rho_0(0)g\zeta - p + p_a = \rho_0(0)g\zeta - p.$$

Подставляя полученное выражение в (3), получаем динамическое условие на участке упругого льда:

$$\rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta - p = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4}$$

Данное условие содержит бигармонический оператор $\triangle_2^2$, поэтому на границе $\partial\Gamma$ области Г необходимо сформулировать дополнительные краевые условия, связанные со способом закрепления участка упругого льда с соприкасающимися границами. Будем считать, что на линии контакта упругого льда с твердой стенкой S выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \qquad (\text{на } \partial\Gamma), \tag{5}$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma$ (расположенный, очевидно, в плоскости Ox_1x_2).

Перепишем кратко граничное условие (4) вместе с краевыми условиями (5), введя в рассмотрение линейный дифференциальный оператор K, заданный дифференциальным выражением

$$K\zeta := d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta \tag{6}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta \in C^4\left(\overline{\Gamma}\right) \mid \zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma)\right\}. \tag{7}$$

Тогда динамическое условие на участке упругого льда (вместе с краевыми условиями (5)) примет следующий вид:

$$p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \qquad (\text{на } \Gamma). \tag{8}$$

3. Закон баланса полной энергии

Прежде чем исследовать начально-краевую задачу (2), введем для ее решений закон баланса полной энергии. Предположим, что задача (2) имеет классическое решение, то есть такие функции $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{x})$, для которых непрерывны по всем переменным все слагаемые, входящие в уравнения и краевые условия (2), а эти уравнения выполнены для указанных функций.

Лемма 1. *Для* $u = u(\hat{x}) \in \mathcal{D}(K)$, $v = v(\hat{x}) \in \mathcal{D}(K)$ *(см.* (6), (7)*) имеет место тождество*

$$
(9) \quad \int\limits_{\Gamma} (Ku)\, v\, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} u\,(Kv)\; d\Gamma = (u,v)_K := \rho_0(0) g \int\limits_{\Gamma} uv\, d\Gamma +
$$

$$
+ d \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\,(1-\sigma)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] d\Gamma +
$$

$$
+ d \int\limits_{\Gamma} \left[\sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] d\Gamma\,,
$$

где σ *— постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластину, причем* $0 \le \sigma < 1$ *(см., например,* [9] *стр.* 427*).*

Доказательство леммы непосредственно следует из формулы для бигармонического оператора $\triangle_2^2$, (см., например, [9, с.272]): для произвольной функции $u(\widehat{x}) \in C^4\left(\bar{\Gamma}\right)$, и $v(\widehat{x}) \in C^2\left(\bar{\Gamma}\right)$, с учетом условия (5) на $\partial\Gamma$, имеет место тождество

$$
(10) \quad \int\limits_{\Gamma} \left(\triangle_2^2 u\right) v\, d\Gamma
$$

$$
= \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + 2\,(1-\sigma)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] d\Gamma\,.
$$

С помощью билинейной формы $(u,v)_K$ закон баланса полной энергии можно записать в удобной форме

$$
(11) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \Bigg[\Bigg(\int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}|^2\, d\Omega + \rho_1 \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|^2 d\Gamma \Bigg)
$$

$$
+ \Bigg(g^2 \int\limits_{\Omega} \left[\rho_0(x_3) N^2(x_3) \right]^{-1} |\rho|^2\, d\Omega + (\zeta, \zeta)_K \Bigg) \Bigg] = \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{f} \cdot \vec{u}\, d\Omega.
$$

Левая часть представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (первая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии упругого льда. Полная потенциальная энергия (вторая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергией упругого льда. Так как потенциальной энергии упругого льда отвечает форма оператора K, то его можно назвать оператором потенциальной энергии (упругой части системы). Правая часть есть мощность внешних сил.

4. Исключение поля плотности. Использование поля малых смещений жидкости

В начально-краевой задаче (2) можно исключить одну искомую функцию – поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанных с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega). \tag{12}$$

Тогда вместо первых трех уравнений (2) придем к связи

$$\begin{aligned} &\rho(t,x) = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0^{'}(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \\ &f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0^{'}(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{13}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3). \end{aligned} \tag{14}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (2) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad p = \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + Kv_3 \quad (\text{на}\,\Gamma), \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \\ &v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma). \end{aligned} \tag{15}$$

Начально-краевая задача (15) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (15) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (2) можно найти по формулам (12) и (13).

5. Проектирование уравнений движения на ортогональные пространства

Начально-краевую задачу (15) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (15) на ортогональные подпространства (см. [7]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\vec{v}(x)\,d\Omega. \tag{16}$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \le \rho_0 \le M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (16) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций

$$\{\,\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega),\ v_n = 0 \ (\text{на } \partial\Omega)\,\}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\, \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0 \ (\text{на } S),$$
$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\}.$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{w} = \rho_2^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \ (\text{на}\,\Gamma)\,\}.$$

Лемма 2. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0), \tag{17}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (16) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [7], с. 106).

Будем считать $\vec{u}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (15), ортогонального разложения (17) имеем

$$\vec{v}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{v}(t,x) = \vec{w}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\ \vec{w}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$

(18)

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (18) в первое уравнение (15) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right) + \rho_0^{-1}\nabla p_1 + P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_{h,S}\psi_0, \tag{20}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2 + P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,\Gamma}\psi_0. \tag{21}$$

Из последнего соотношения (21) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p \to p_1$, так как $p = p_1 + p_2,\ p_2 = 0$ (на Γ).

Для перехода от (19), (20) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right] := \rho_0^{-1}\nabla\Psi\,, \qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right] := \rho_0^{-1}\nabla\eta\,. \tag{22}$$

Тогда (20) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad (\text{в}\,\Omega\,), \tag{23}$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (23) на Γ и воспользуемся равенством

$$p_1 = \rho_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + K v_3 = \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) \quad (\text{на}\,\Gamma\,);$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma\,). \tag{24}$$

Это соотношение вместе с (19) дает два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (22), а также ограничения, следующие из (19) – (21).

6. Свойства оператора потенциальной энергии упругой части системы

Свяжем с поверхностью Γ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2\,(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_\Gamma := \int\limits_\Gamma \varphi\,(\hat{x})\,\psi\,(\hat{x})\,d\Gamma \tag{25}$$

и соответствующей нормой.

Лемма 3. *Оператор* $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2\,(\Gamma) \to L_2\,(\Gamma)$ *является неограниченным симметричным положительно определенным оператором, действующим в* $L_2\,(\Gamma)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{D}(K)$ плотна в $L_2\,(\Gamma)$, так как в нее входят все финитные (бесконечно дифференцируемые) функции, заданные на Γ. Очевидно также (и это будет видно из дальнейшего), что K – неограниченный оператор.

Далее, из тождества (9) следует, симметрия оператора K. Полагая в (9) $u = v$, получим

$$\begin{aligned}
(Ku,u) &= \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma \\
&+ d\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\,(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] d\Gamma \\
&\ge d\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] d\Gamma + \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma \\
&\ge d\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 - 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right] d\Gamma + \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma \\
&= d\int\limits_\Gamma \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| - \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right]^2 d\Gamma + \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma \ge \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma = \rho_0(0)g\|u\|^2_{L_2(\Gamma)}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор K положительно определен в $L_2\,(\Gamma)$. □

Как известно, симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 3, что оператор K уже расширен по Фридрихсу с $\mathcal{K}$ из (7) на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через K. Кроме того, $\mathcal{D}(K) \subset H_K$, где H_K — энергетическое пространство оператора K.

7. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int\limits_\Gamma v_3\,d\Gamma = \int\limits_\Gamma \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) d\Gamma = 0$$

$$\Longrightarrow \int\limits_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,d\Gamma = 0, \quad \text{так как } w_3|_\Gamma = 0, \quad \rho_0^{-1}|_\Gamma = \text{const}.$$

Это же условие является необходимым условием разрешимости следующей задачи.

Вспомогательная задача (задача Неймана).

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \psi\,d\Gamma = 0. \tag{26}$$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma)\cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}$, $H_- = (H_+)^* =: \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Здесь через $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [10], гл. 3).

Лемма 4. *При любом $\psi \in H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ задача (26) в области Ω с липшицевой (кусочно-гладкой) границей $\partial\Omega$ имеет единственное обобщенное решение $\Phi \in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, причем*

$$\|\Phi\|_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)} \le c_1\|\psi\|_{\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}}. \tag{27}$$

Здесь $H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ – подпространство квазигармонических функций, удовлетворяющих условию Неймана на S, пространства $H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} := \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}|\nabla\Phi|^2\,d\Omega, \quad \int\limits_\Gamma \Phi\,d\Gamma = 0.$$

Для обобщенного решения $\Phi(x)$ задачи (26) имеет место тождество

$$(\Phi,\Psi)_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)} = (\psi, \Psi|_\Gamma)_{H_0}, \quad \forall\Psi\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0). \tag{28}$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [7], стр. 46.

Будем считать, что $\psi = \left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma$ есть заданная функция из пространства $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Тогда, рассматривая задачу Неймана с заданной ψ, получим по лемме 4, что

$$\Phi(x) = T\psi \in H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0),$$

где $T : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ – ограниченный линейный оператор, норма которого не превышает константу $c_1 > 0$ из (27).

Введем теперь оператор следа γ_Γ: для любой $\Phi(x) \in H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ по определению

$$\gamma_\Gamma \Phi := \Phi|_\Gamma .$$

Отметим, что оператор γ_Γ ограниченно действует из $H^1(\Omega, \rho_0)$ (а потому и из подпространства $H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0)$) в $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$. Отсюда получаем, что

$$\gamma_\Gamma \Phi = \Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma T\psi = \gamma_\Gamma T\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma =: C\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \tag{29}$$

где оператор $C = \gamma_\Gamma T : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} = H_- \to H_\Gamma^{1/2} = H_+$ является линейным ограниченным оператором.

Лемма 5. *Сужение оператора C на $H_0 \subset H_-$ является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве H_0.*

Доказательство. Если $\psi \in H_0$, то $C\psi = \gamma_\Gamma T\psi \in H_+$. Так как пространство $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в пространство H_0, а C ограниченно действует из H_0 в H_+, то оператор $C : H_0 \to H_0$ компактен.

Для доказательства свойства симметрии (самосопряженности) и положительности оператора C будем считать, что в тождестве (28) $\Psi \in H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$, причем $\Psi(x)$ также является решением вспомогательной задачи (26) при заданной функции $v \in H_0$; тогда

$$\begin{aligned}
\Phi &= T\psi, \quad \psi = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma\Phi = C\psi,\\
\Psi &= Tv, \quad v = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma\Psi = \Psi|_\Gamma = Cv,
\end{aligned} \tag{30}$$

Из этих формул и из (28) получаем

$$(\psi, Cv)_{H_0} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\overline{\nabla\Psi}\, d\Omega = (C\psi, v)_{H_0}, \quad \forall\, \psi,\, v \in H_0, \tag{31}$$

откуда следует, что $C = C^*$. Полагая здесь $v = \psi$, $\Psi = \Phi$, имеем

$$(C\psi, \psi)_{H_0} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}\left|\nabla\Phi\right|^2\, d\Omega = \|\Phi\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} \geq 0. \tag{32}$$

Если $(C\psi, \psi)_{H_0} = 0$, то $\Phi \equiv \Phi_0 = const$. Тогда из условия нормировки функции Φ

$$\int_\Gamma \Phi_0 \, d\Gamma = 0$$

получаем, что $\Phi \equiv 0$, а потому $\psi = \left(\rho_0^{-1} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma = 0.$

Таким образом, оператор C положителен в H_0. □

Следствием доказанной леммы является такое утверждение: оператор $C : H_0 \to H_0$ имеет обратный оператор C^{-1}, который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathcal{D}\left(C^{-1}\right) = \mathcal{R}\left(C\right)$, плотной в H_0. Кроме того, оператор $C^{-1/2}$ переводит $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ в H_0, а оператор $C^{1/2}$ — соответственно H_0 в $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ (изометрическим образом). Как следует из общей теории оснащенных гильбертовых пространств, расширение оператора $C^{-1/2}$ (которое будем обозначать так же) с $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ на H_0 является изометрическим оператором, переводящим все H_0 на все $H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Соответственно оператор $C^{1/2}$ (после расширения на H_-) переводит изометрически все H_- на все H_0.

Согласно выше приведенным построениям (см. (29)), перепишем систему уравнений (19) и (24) вместе, проектируя дополнительно (24) на H_0; затем осуществим замену:

$$\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma = C^{-1/2} y, \quad y \in H_0, \tag{33}$$

считая, что $P_{H_0} F \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$, и применим к преобразованному уравнению (24) оператор $C^{-1/2}$, в результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left((U C^{-1/2} y) \vec{e}_3 \right) \vec{e}_3 \right] + P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[I + \rho_1 C^{-1} \right] y + C^{-1/2} \widetilde{K} C^{-1/2} y + C^{-1/2} P_{H_0} \left(\Psi + \eta \right) = C^{-1/2} P_{H_0} F. \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь через $U : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ обозначен оператор, который посредством решения задачи (26) ставит в соответствие элементу $\psi \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ функцию $\rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$; $\widetilde{K} = P_{H_0} K P_{H_0}$ – положительно определенный неограниченный в H_0 оператор.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &B_{11} \vec{w} := P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \quad B_{12} y := P_0 \left[N^2(x_3) \left((U C^{-1/2} y) \vec{e}_3 \right) \vec{e}_3 \right], \\ &B_{21} \vec{w} := C^{-1/2} P_{H_0} \Psi, \quad \rho_0^{-1} \nabla \Psi = P_{h,S} \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \\ &B_{22} y := C^{-1/2} P_{H_0} \eta, \quad \rho_0^{-1} \nabla \eta = P_{h,S} \left[N^2(x_3) \left((U C^{-1/2} y) \vec{e}_3 \right) \vec{e}_3 \right]. \end{aligned} \tag{35}$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Начально-краевая задача (15) распадается на тривиальное соотношение (21) и задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка (неполного, то есть не содержащего слагаемого с первой производной) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\mathcal{X} + (\mathcal{K} + \mathcal{B})\,\mathcal{X} = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \qquad \mathcal{X}^{'}(0) = \mathcal{X}^1, \tag{36}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \rho_2 C^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{-1/2}\widetilde{K}C^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ C^{-1/2}P_{H_0}F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Лемма 6. *Оператор-матрица $\mathcal{B}$ из* (37) *обладает свойствами $\mathcal{O} \le \mathcal{B} \le N_0^2\mathcal{I}$, где N_0^2 – константа из* (1), *$\mathcal{O}$ и $\mathcal{I}$ – нулевой и единичный операторы в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \\ &= (B_{11}\vec{w}, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{12}y, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{21}\vec{w}, y)_{H_0} + (B_{22}y, y)_{H_0}.\end{aligned}$$

С учетом определений (35), (16), а также формулы Грина для оператора Лапласа (см., например, [7] с. 102), имеем:

$$(B_{11}\vec{w}, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \left(P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \vec{w}\right)_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega N^2(x_3)\cdot\rho_0(x_3)|w_3|^2\,d\Omega,$$

$$(B_{12}y, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = (B_{21}\vec{w}, y)_{H_0} = \int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)w_3\,d\Omega,$$

$$\begin{aligned}(B_{22}y, y)_{H_0} &= \left(C^{-1/2}P_{H_0}\eta, y\right)_{H_0} = \left(P_{H_0}\eta, C^{-1/2}y\right)_{H_0} \\ &= \int_\Gamma \rho_0(0)P_{H_0}\eta\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma d\Gamma = \int_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\eta\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega \\ &= \int_\Omega \rho_0(x_3)\cdot N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega \\ &= \int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega,\end{aligned}$$

Отсюда имеем, с одной стороны, используя (1) и (18):

$$(\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = \int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3 + \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega \ge N_{\min}^2\int_\Omega \rho_0(x_3)|v_3|^2\,d\Omega \ge 0\,.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} \le N_0^2\cdot\int\limits_{\Omega}\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega \le N_0^2\cdot\int\limits_{\Omega}\rho_0(x_3)\left|\vec{v}\right|^2 d\Omega$$
$$= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)}\right)$$

$$= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\int\limits_{\Omega}\rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega\right)$$
$$= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}-\int\limits_{\Omega}\Phi\cdot\operatorname{div}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}(\Phi)\,|_{\Gamma}\cdot\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{n}\right)dS\right)$$
$$= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\int\limits_{\Gamma}(\Phi)\,|_{\Gamma}\cdot\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma}d\Gamma\right)$$
$$= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+(C^{1/2}y,C^{-1/2}y)_{H_0}\right)=N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}+\|y\|^2_{H_0}\right)=N_0^2\|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{H}}.$$

□

Сделаем в задаче (36) замену $C^{-1/2}y=z$ и подействуем оператором $\operatorname{diag}\left(I;C^{1/2}\right)$ к обеим частям уравнения (36), в результате приходим к следующей задаче Коши

$$\mathcal{A}_1\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{X}_1+\mathcal{K}_{\mathcal{B}}\mathcal{X}_1=\mathcal{F}_1,\qquad \mathcal{X}_1(0)=\mathcal{X}_1^0,\qquad \mathcal{X}_1^{'}(0)=\mathcal{X}_1^1, \tag{39}$$

$$\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C+\rho_1 I\end{pmatrix},\quad \mathcal{K}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}C^{1/2}\\ C^{1/2}B_{21} & C^{1/2}B_{22}C^{1/2}+\widetilde{K}\end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\mathcal{X}_1=\begin{pmatrix}\vec{w}\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{w}\\ C^{-1/2}y\end{pmatrix},\quad \mathcal{F}_1=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\mathcal{F}. \tag{41}$$

Из построений, приведенных выше (леммы 5, 6), следует, что

$$0<<\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_1^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),\quad \mathcal{K}_{\mathcal{B}}=\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^*\ge 0.$$

Тогда для сильной разрешимости задачи Коши (39) достаточно потребовать (доказательство этого факта см. [11], стр. 44.), чтобы

$$\mathcal{X}_1^0\in\mathcal{D}(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}),\quad \mathcal{X}_1^1\in\mathcal{D}(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{1/2}),\quad \mathcal{F}_1\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right),$$

что равносильно следующим условиям

1. $\vec{w}^0\in\vec{J}_0\left(\Omega,\rho_0\right),\quad \vec{w}^1\in\vec{J}_0\left(\Omega,\rho_0\right),$
2. $\left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_{\Gamma}\in\mathcal{D}(\widetilde{K}),\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_{\Gamma}=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_{\Gamma}\in\mathcal{D}(\widetilde{K}^{1/2}),$

3. $\mathcal{F} = \left(P_0\psi_0, C^{-1/2}P_{H_0}F_f\right)^t \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad C^{-1/2}P_{H_0}F_f \in C\left([0,T];H_0\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad P_{H_0}F_f \in C\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F \in C\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right).$$

Определение 1. *Сильным (по переменной t) решением задачи* (2) *на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$ и $\zeta\,(t,\hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:*

1°. $\vec{u}\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\left([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\right)$,

$\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\mathfrak{L}\,(\Omega,\rho_0)\right)$, *где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением*

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2\int\limits_\Omega \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega$$

и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (2)*;*

2°. $u_n = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,;H_0\right)$*;*

3°. *выполнено граничное условие на Γ:*

$$p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma)$.

4°. *выполнены начальные условия* (2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\,, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(K),$$

$$\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in \mathcal{D}(K^{1/2}), \quad f(t) \in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right).$$

Тогда каждая из задач (2) *имеет единственное сильное по t решение.*

Автор приносит благодарность Н.Д. Копачевскому за обсуждение работы.

References

[1] V.K. Krauss, *Internal waves*, Leningrad, 1968.

[2] J. Turner, *Effects of buoyancy in fluids*, Moscow, 1977.

[3] Yu.Z. Mitropol'sky, *Dynamics of internal gravitational waves in the ocean*, Leningrad, 1981.

[4] S.A. Gabov, A.G. Sveshnikov, *Problems of dynamics of stratified fluids*, Moscow, 1986.

[5] N.D. Kopachevsky, A.N. Temnov, *Oscillations of a stratified fluid in a basin of arbitrary shape*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **164**:5 (1986), 734–755. Zbl 0637.76018

[6] N.D. Kopachevsky, D.O. Tsvetkov, *Oscillations of stratificated fluids*, Journal of Math Sciences (Springer), **164**:4 (2010), 574–602. Zbl 1301.35111

[7] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, Ngo Zuy Can, *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems*, Moscow: Nauka, 1989. Zbl 0681.76001

[8] M.A. Soldatov, *Mathematical aspects oscillations theory of an fluid in a basin partially closed by ice*, The thesis for obtaining the Candidate of physical and mathematical degree on the speciality 01.01.03 - mathematical physics, Kharkov, 2003.

[9] K. Rektorys, *Variational methods in mathematical physics and engineering*, Moscow: Mir, 1985. Zbl 0668.49001

[10] N.D. Kopachevsky, *Abstract Green formula and some of its applications*, Simferopol. 2016.

[11] N.D. Kopachevsky, *Volterra integrodifferential equations on a Hilbert space*, Simferopol, 2012.

Denis Olegovich Tsvetkov
Crimean Federal University, Taurida Academy,
pr. Vernadskogo, 4,
295007, Simferopol, Russia
E-mail address: tsvetdo@gmail.com