S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 450–474 (2018) УДК 519.716

DOI 10.17377/semi.2018.15.040 MSC 08A99

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ МНОЖЕСТВА МУЛЬТИФУНКЦИЙ В ПОЛНОМ ЧАСТИЧНОМ УЛЬТРАКЛОНЕ РАНГА 2

С.А. БАДМАЕВ

Abstract. The problem of completeness for some class of discrete functions is studied. Functions from this class map finite cartesian powers of a two-element set E to the set of all subsets of E. Functions of this kind are called multifunctions of rank 2. We proved a necessary and sufficient condition of completeness using some special notion of superposition for an arbitrary set of functions from a given class.

Keywords: function of many-valued logic, multifunction, partial ultraclone, criterion of completeness.

1. Введение

Функции, определенные на k–элементном множестве A и принимающие в качестве значений подмножества множества A, находят применение при моделировании схем с неисправностями, решении функциональных уравнений, изучении многозначных логик и т.д. В последнее время такие функции, в зависимости от того, какие подмножества являются их значениями, принято называть частичными функциями, гиперфункциями, мультифункциями на A. Очевидно, что они являются обобщениями хорошо известных функций k–значной логики.

В теории функций k–значной логики одно из основных направлений исследований представляют так называемые замкнутые классы — множества функций, замкнутые относительно суперпозиции. Суперпозицию функций k–значной логики, очевидно, нельзя использовать с их обобщениями. Поэтому для них необходимо дать новое определение суперпозиции. Для гиперфункций и

Badmaev, S.A., A completeness criterion for sets of multifunctions in full partial ultraclone of rank 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-31-00020.

Поступила 18 марта 2018 г., опубликована 4 мая 2018 г.

мультифункций обычно рассматривают два способа определения суперпозиции: в основе первого лежит объединение подмножеств множества A, и в этом случае замкнутые множества, содержащие все проекции, называют гиперклонами ранга k или мультиклонами ранга k, а в основе второго – пересечение подмножеств множества A, и замкнутые множества, содержащие все проекции, называют ультраклонами ранга k или частичными ультраклонами ранга k.

При описании замкнутых классов важнейшую роль играют максимальные замкнутые классы, описание которых позволяет решить проблему полноты. В работах [1, 2, 3, 4, 5, 6] данным методом получены критерии полноты для функций k–значной логики и частичных функций. На основе описания максимальных гиперклонов, мультиклонов и ультраклонов ранга 2 соответствующие проблемы полноты решены в [7, 8, 9].

В данной статье доказан критерий полноты с помощью описания максимальных частичных ультраклонов ранга 2. Заметим, что этот результат был анонсирован в [10].

2. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P^{\bar{*}}_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}, P^{\bar{*}}_2 = \bigcup\limits_n P^{\bar{*}}_{2,n}$.

$P_{2,n} = \{f | f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$;

$P^-_{2,n} = \{f | f : E^n_2 \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\}, P^-_2 = \bigcup\limits_n P^-_{2,n}$;

$P^*_{2,n} = \{f | f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E^n_2\}, P^*_2 = \bigcup\limits_n P^*_{2,n}$;

Функции из P_2 называют булевыми функциями, а функции из $P^{\bar{*}}_2$ будем называть мультифункциями ранга 2. Ниже для краткости будем использовать термин мультифункция или просто функция, если это не вызывает недоразумений.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где $f, f_1, \dots, f_n \in P^{\bar{*}}_2$, определяла мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$, следуя [11, 12], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества E следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \dots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in F^n$.

Для упрощения записи договоримся использовать следующую кодировку: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$.

При задании функций будем считать, что наборы из множества E^n записаны в натуральном порядке, а вектор значений будем записывать как в виде строки, так и в виде столбца. Например, $f = (0{*}{-}1)$ означает, что $f(00) = 0$, $f(01) = *$, $f(10) = -$, $f(11) = 1$.

В данной статье, как и обычно принято в теории k–значных функций, функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных. Таким образом, считаем, что (-1) и $(-1\ -1)$ одна и та же функция. Согласно этому, например, выражение $f(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) = (-1\ -1)$ будем кратко записывать $f(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) = (-1)$.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [8, 9, 12], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

Рассмотрим следующие множества функций:

1) K_1 – множество, состоящее из всех функций, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$.

2) K_2 – множество, состоящее из всех функций, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$.

3) K_3 – множество, состоящее из всех функций f, для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 – множество, состоящее из всех функций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

5) K_5 – множество, состоящее из всех функций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$.

7) $K_7 = P_2^*$.

8) K_8 – множество всех функций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то
$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$
где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 – множество всех функций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0,1\}$, то
$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$
где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} – множество всех функций, сохраняющих предикат
$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$ где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t$ – всевозможные столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} – множество всех функций, сохраняющих предикат
$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

12) K_{12} – множество всех функций, сохраняющих предикат
$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

Доказательство замкнутости каждого из классов $K_1 - K_{12}$ можно найти в работах [11, 12, 13, 14].

Функцию, не принадлежащую классу K_i, будем обозначать f_{K_i}.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Следующие множества совпадают с $P_2^{\overline{*}}$:*

1) $[\{(1*), (1-)\}]$; *4)* $[\{(0-), (-1), (*0)\}]$; *7)* $[\{(0---), (*0)\}]$;
2) $[\{(*0), (-0)\}]$; *5)* $[\{(0-), (--), (0*), (*0)\}]$; *8)* $[\{(---1), (0*)\}]$.
3) $[\{(0-), (-1), (0*)\}]$; *6)* $[\{(-1), (--), (1*), (*1)\}]$;

Доказательство. Пункты *1) – 6)* доказаны в [11, 13, 14, 15].

7) Множество $\{(0---), (*0)\}$ сведем к $\{(0-), (-1), (*0)\}$. Рассмотрим следующие суперпозиции:

$$\begin{matrix}0\\-\\-\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}; \begin{matrix}*\\*\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & *\\0 & 0\\1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{matrix}*\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-\\-\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}1\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}.$$

8) Множество $\{(---1),(0*)\}$ сведем к $\{(0-),(-1),(0*)\}$. Рассмотрим следующие суперпозиции:

$$\begin{matrix}-\\-\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\*\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\*\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\1\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Имеют место:*

$$1)\ (11)\in[\{(--),(0110),f_{K_{10}}\}]; \qquad 2)\ (00)\in[\{(--),(1001),f_{K_{10}}\}].$$

Доказательство. Докажем первое утверждение, доказательство второго утверждения аналогично в силу двойственности.

Отождествлением переменных из функции (0110) можем получить константу 0. Ниже показано, как каждая из функций $(*0),(-0),(0-)$ приводит к одной из функций $(*1),(-1)$, каждая из которых дает константу 1.

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&*\\0&*\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\-\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\-\\0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&-\\1&-\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\-\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}0\\0\\-\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\-&0\\-&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\1\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Покажем, что функция $f(x_1,x_2)$, у которой среди значений ровно одно значение $*$, позволяет получить либо функцию $(*0)$, либо функцию $(0-)$. Очевидно, что суперпозиция 0 и $f(x,y)$ приводит к одной из функций: $(*000)$, $(0*00)$, $(00*0)$, $(000*)$. Осталось привести следующие равенства:

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&*\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\*\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\*\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\0\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\*\\0\end{pmatrix};\ \begin{matrix}*\\0\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Так как $f_{K_{10}}$ не сохраняет R_{10}, то найдутся наборы $\tilde{\alpha}^i=(\alpha_1^i,\dots,\alpha_n^i)$, где $i\in\{1,2,3,4\}$, такие, что $(\alpha_j^1\alpha_j^2\alpha_j^3\alpha_j^4)^t\in R_{10}$ для любого j, но значение функции $f_{K_{10}}$ на этих наборах представляет набор, который не принадлежит R_{10}.

Обозначим через M матрицу, состоящую из столбцов $(\alpha_j^1\alpha_j^2\alpha_j^3\alpha_j^4)^t$, где $j\in\{1,\dots,n\}$. Если в матрице M нет некоторых столбцов, то вставим их в M, добавив на соответствующие позиции в функцию $f_{K_{10}}$ фиктивные переменные. Если в M встречаются столбцы со $*$ на позициях i_1,i_2, то заменим их на столбцы из M, в которых на позициях i_1,i_2 не встречается $*$, а на других позициях те же значения, что и в заменяемом столбце. Далее, если в матрице M встречаются одинаковые столбцы, то в функции $f_{K_{10}}$ отождествим соответствующие этим столбцам переменные. В результате получим функцию $f'_{K_{10}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)$, которая не сохраняет предикат R_{10}, т.е. $f'_{K_{10}}(M)\notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0000)^t$, $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$, $(1111)^t$, $(0110)^t$, $(1001)^t$, $(----)^t$. Ниже представлен пример одного из вариантов расположения столбцов матрицы M после таких преобразований

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

Так как перестановка строк в матрице M равносильна перестановке переменных в $f^{'}_{K_{10}}$, то достаточно рассмотреть случаи, когда $f^{'}_{K_{10}}(M)$ равно одному из наборов $(0001)^t$, $(0111)^t$, $(\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu, \eta, \theta \in \{0, 1\}$, либо $\mu = \eta = \theta = -$, а также случай $(f^{'}_{K_{10}}(\tilde{\alpha}^s) f^{'}_{K_{10}}(\tilde{\alpha}^l))^t = (\alpha -)^t$, где $\alpha \in \{0, 1\}$ и $s, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $h(x_1, x_2, x_3) = (01100110)$. Суперпозицией функции h, константы 0 и проекций получим следующие функции:

$h_1(x_1, x_2, x_3) = h(0, e_1^3(x_1, x_2, x_3), h(x_1, x_2, x_3)) = (01101001)$,

$h_2(x_1, x_2, x_3) = h(0, e_1^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (01011010)$,

$h_3(x_1, x_2, x_3) = h(0, e_1^3(x_1, x_2, x_3), e_2^3(x_1, x_2, x_3)) = (00111100)$.

Нетрудно заметить, что единичные остаточные по переменной x_1 у функций $h(x_1, x_2, x_3)$, $h_1(x_1, x_2, x_3)$, $h_2(x_1, x_2, x_3)$, $h_3(x_1, x_2, x_3)$ совпадают соответственно со столбцами $(0110)^t$, $(1001)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$.

Далее рассмотрим суперпозицию с внешней функцией $f^{'}_{K_{10}}$ и с внутренними функциями: константой 0, проекциями $e_1^3(x_1, x_2, x_3)$, $e_2^3(x_1, x_2, x_3)$, $e_3^3(x_1, x_2, x_3)$ и функциями $h_1(x_1, x_2, x_3)$, $h_2(x_1, x_2, x_3)$, $h_3(x_1, x_2, x_3)$, $h(x_1, x_2, x_3)$, $(--)$, причем константу 0 будем подставлять в ту переменную, в которую подставляется столбец $(0000)^t$ из R_{10}, проекцию $e_1^3(x_1, x_2, x_3)$ – в переменную, в которую подставляется столбец $(1111)^t$ из R_{10}, функцию $h_1(x_1, x_2, x_3)$ – в переменную, в которую подставляется столбец $(1001)^t$ из R_{10} и т.д.

В результате получим одну из функций $g_1 - g_4$, у каждой из которых единичная остаточная по x_1 совпадает со столбцом, не принадлежащим R_{10}:

1) $g_1(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\alpha - \gamma\delta)$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$;

2) $g_2(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\alpha\beta\gamma*)$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \{0, 1, -, *\}$ и α, β, $\gamma \in \{0, 1, -\}$;

3) $g_3(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 0001)$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \{0, 1, -, *\}$;

4) $g_4(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 0111)$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \{0, 1, -, *\}$.

Каждая из них приводит к функции, из которой легко получить 1. Рассмотрим все варианты.

1) Если $\mu_1 \in \{0, 1\}$, то $g_1(e_1^3(x_1, x_2, x_3), 0, e_1^3(x_1, x_2, x_3)) \in \{(0-), (1-)\}$, а если $\mu_1 \in \{-, *\}$, то $g_1(e_1^3(x_1, x_2, x_3), 0, 0) \in \{(-\alpha), (*\alpha)\}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

2) Суперпозиция функций 0 и $g_2(x_1, x_2, x_3)$ позволяет получить трехместную функцию $f(x_1, x_2, x_3) = (\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 000*)$, где $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \{0, *\}$. При $\eta_1 = *$ легко получим функцию $(*0)$, поэтому $\eta_1 = 0$. В случае, когда только одно из значений η_2, η_3, η_4 равно $*$, f с помощью константы 0 дает бинарную функцию, у которой ровно одно из значений равно $*$. Если $\eta_2 = *$, то $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_1^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 * 00\eta_3\eta_4 0*) = u(x_1, x_2, x_3)$ и $u(0, e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 * 00)$. Если $\eta_2 = 0$, то $\eta_3 = \eta_4 = *$ и $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), e_1^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 * 000 * 0*) = u(x_1, x_2, x_3)$. Далее $u(0, e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 * 00)$.

3) При $\mu_1 \in \{1,-,*\}$ получим одну из функций $(10),(-1),(*1)$. Если $\mu_2 \neq 1$, то получим $g_3(e_1^3(x_1,x_2,x_3),e_1^3(x_1,x_2,x_3),-) = (0-)$. Если $\mu_2 = 1$, то получим $g_3(e_1^3(x_1,x_2,x_3),0,-) = (-0)$.

4) При $\mu_1 \in \{1,-,*\}$ получим одну из функций $(10),(-1),(*1)$. Если $\mu_2 \neq 1$, то получим $g_4(e_1^3(x_1,x_2,x_3),0,-) = (0-)$. Если же $\mu_2 = 1$, то получим $g_4(e_1^3(x_1,x_2,x_3),e_1^3(x_1,x_2,x_3),-) = (-1)$. □

Лемма 3. *Имеют место:*
1) $(11) \in [\{(00),(--),(0**0),f_{K_{10}}\}]$;
2) $(00) \in [\{(11),(--),(1**1),f_{K_{10}}\}]$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение леммы, второе доказывается аналогично в силу двойственности.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были использованы в предыдущей лемме, получим функцию $f'_{K_{10}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)$, которая не сохраняет предикат R_{10}.

Далее покажем, что наборы $(0110)^t,(1001)^t$, которые могут встречаться в M, можно заменить на другие наборы из M без $*$ и при этом функция $f'_{K_{10}}$ всё равно будет давать набор не из предиката R_{10}, т.е. как и в предыдущей лемме возможны четыре варианта, когда $f'_{K_{10}}(M)$ равно одному из наборов $(0001)^t$, $(0111)^t$, $(\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu,\eta,\theta \in \{0,1\}$, либо $\mu=\eta=\theta=-$, а также вариант $(f'_{K_{10}}(\tilde{\alpha}^s)f'_{K_{10}}(\tilde{\alpha}^l))^t = (\alpha-)^t$, где $\alpha \in \{0,1\}$ и $s,l \in \{1,2,3,4\}$.

Рассмотрим только случай $(0110)^t$, случай $(1001)^t$ аналогичен.

Пусть $f'_{K_{10}}(M) = (0001)^t$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на столбец $(1111)^t$, получим $f'_{K_{10}}(M) = (\sigma_1 00\sigma_2)^t$. Если либо ровно одно из значений σ_1,σ_2 равно $*$, либо хотя бы одно из σ_1,σ_2 равно $-$, либо одно из σ_1,σ_2 равно 0, а второе равно 1, то оставим замену без изменений. В остальных случаях вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(----)^t$, и в результате получим либо $(0001)^t$, либо столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0,1\}$.

Пусть $f'_{K_{10}}(M) = (0111)^t$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на столбец $(1111)^t$, получим $f'_{K_{10}}(M) = (\sigma_1 11\sigma_2)^t$. Если либо ровно одно из значений σ_1,σ_2 равно $*$, либо хотя бы одно из σ_1,σ_2 равно $-$, либо одно из σ_1,σ_2 равно 0, а второе равно 1, то оставим замену без изменений. В остальных случаях вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(----)^t$, и в результате получим либо $(0111)^t$, либо столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0,1\}$.

Пусть $f'_{K_{10}}(M) = (\mu\eta\theta*)^t$, где либо $\mu,\eta,\theta \in \{0,1\}$, либо $\mu=\eta=\theta=-$. Заменим в M столбец $(0110)^t$ на $(1111)^t$, получим $f'_{K_{10}}(M) = (\sigma_1\eta\theta\sigma_2)^t$, где $\sigma_1,\sigma_2 \in \{0,1,-,*\}$. Если среди σ_1,σ_2 встречается одна $*$ или две $*$, то в первом случае замену $(0110)^t$ на $(1111)^t$ оставим без изменений, а во втором случае заменим $(0110)^t$ на $(----)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$. Если среди σ_1,σ_2 нет $*$, то вместо столбца $(0110)^t$ подставим столбец $(1100)^t$ и получим $f'_{K_{10}}(M) = (\sigma_1\eta\tau*)^t$. Если $\tau \neq *$, то замену оставим без изменений. Если $\tau = *$, то столбец $(0110)^t$ заменим на столбец $(0101)^t$. В результате получим столбец, в котором встречается только одно значение $*$.

Пусть значение функции $f'_{K_{10}}$ на строке i матрицы M равно $-$, а на строке j равно $\alpha \in \{0,1\}$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Тогда заменим столбец $(0110)^t$ на один из столбцов $(0000)^t$, $(1111)^t$, $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1100)^t$, $(1010)^t$ так, чтобы в заменяющем столбце на позициях i и j стояли те же значения, что и в столбце $(0110)^t$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. В результате получим столбец, в котором встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$.

Далее перейдем к получению константы 1. Заменим столбцы $(0110)^t$,$(1001)^t$ на другие столбцы из M без $*$, затем отождествим переменные и подставим константу 0. Получим функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ такую, что $f(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1010)^t$, $(1100)^t$, $(1111)^t$.

Из приведенных ниже равенств следует, что каждая из функций $(0-)$, $(*0)$, $(*000)$, $(0*00)$, $(00*0)$, $(000*)$, (0111) приводит к одной из функций $(*1)$, (-1), каждая из которых легко дает константу 1.

$$\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & *\\1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{array}{c}0\\ *\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{array}{c}0\\ *\\ *\\0\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & -\\1 & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & *\\0 & *\\1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 0\\1 & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\ *\end{pmatrix},\ \begin{array}{c}0\\0\\1\\ *\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{array}{c}-\\-\\0\\0\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix};\ \begin{array}{c}0\\1\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & -\\0 & -\\1 & -\\1 & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Отметим, что у нас есть функция $(0*)$, поскольку она легко получается из функции $(0{*}{*}0)$ и константы 0. Также отметим, что функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ на нулевом наборе принимает значение 0, иначе легко получим одну из функций $(1\alpha), (-\beta), (*\gamma)$, где $\alpha \in \{0, 1, -, *\}, \beta \in \{0, 1\}, \gamma \in \{0, 1, -\}$.

Достаточно рассмотреть только случаи, когда $f(M)$ совпадает с одним из столбцов $(\epsilon\varepsilon\zeta\eta)^t$, $(\alpha\beta\gamma*)^t$, $(0001)^t$, $(0111)^t$, где либо α, β, $\gamma \in \{0, 1\}$, либо $\alpha = \beta = \gamma = -$, а среди $\epsilon, \varepsilon, \zeta, \eta$ встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$. Действительно, перестановка столбцов в матрице M приведет к одному из этих вариантов.

Нетрудно заметить, что доказательство ниже не зависит от расположения столбцов матрицы M, поэтому мы можем рассмотреть только вариант

$$M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению четырех случаев, в каждом из которых необходимо получить либо константу 1, либо функцию, из которой можно получить константу 1.

В первом случае легко получить функцию $(0-)$, поэтому сразу перейдем к рассмотрению следующих случаев. Будем действовать следующим образом: во втором и в четвертом случаях определим на двоичных наборах достаточно значений функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ для того, чтобы из неё можно было получить функцию (-1), а третий случай сведём ко второму. При определении значений функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будем предполагать, что $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ на определенном двоичном наборе принимает одно из значений 0, 1 или $*$ (очевидно, что $-$ быть не может), из чего будет следовать, что либо $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ с проекциями и 0 приводит к функции, которая дает 1, либо данное значение определит значение $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ на другом двоичном наборе.

Случай 2. Суперпозицией с внешней функцией 0 и внутренней функцией f получим функцию, у которой значения лишь 0 и $*$. Поэтому можно считать, что

$$f\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}.$$

Если $f(00001)=0$, то $f(00110)=0$. Иначе, как показано ниже, несложно подобрать наборы, на которых известны значения функции f так, чтобы столбцы были либо нулевые, либо проекции, а столбец значений задавал функцию, из которой можно получить 1.

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\*\\0\\0\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем для определения значений функции f на других двоичных наборах будем придерживаться этого метода. В целях экономии места и в силу того, что необходимые наборы несложно подобрать, их матрицу приводить не будем. Также для краткости будем подразумевать, что запись $f(00001)=0\Rightarrow f(00110)=0$ означает утверждение «если $f(00001)=0$, то $f(00110)=0$».

Далее продолжим определять значения функции f.

Получим, что $f(00110)=0\Rightarrow f(11111)=*$; $f(00001)=0\Rightarrow f(01010)=0$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}.$$

Поэтому $f(00001)=*$. Тогда $f(00001)=*\Rightarrow f(01010)=*$, $f(00110)=*$, $f(10100)=*$; $f(01010)=*\Rightarrow f(11111)=*$; $f(11111)=*\Rightarrow f(11000)=*$.

Если $f(01000)=0$, то $f(10001)=*$. Далее $f(01000)=0\Rightarrow f(01111)=0$; $f(01111)=0\Rightarrow f(10000)=*$; $f(10000)=*\Rightarrow f(00101)=*$; $f(10001)=*\Rightarrow f(00100)=*$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\*\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Поэтому $f(01000)=*$. Откуда $f(01000)=*\Rightarrow f(00011)=*, f(11101)=*$; $f(00011)=*\Rightarrow f(00100)=*$ и $f(00100)=*\Rightarrow f(10001)=*, f(01111)=*$.

Если $f(00010)=0$, то $f(00101)=0$. Далее $f(00101)=0\Rightarrow f(10000)=0$; $f(00010)=0\Rightarrow f(01001)=0$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}.$$

Поэтому $f(00010)=*$. Откуда $f(00010)=*\Rightarrow f(00101)=*, f(01001)=*, f(10111)=*$; $f(00101)=*\Rightarrow f(10000)=*$; $f(10000)=*\Rightarrow f(11011)=*$.

Если $f(10010)=0$, то $f(11010)=*$. Тогда $f(x_1,x_2,g(x_3),x_4,x_5)=(0{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}{*}{*}0\lambda{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*})=h(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, где $g(x)=(0*)$, $\lambda\in\{0,*\}$. Имеем $h(x_1,x_2,-,-,-)=(000*)$. Поэтому $f(10010)=*$.

Если $f(01100) = 0$, то $f(11100) = *$. Тогда $f(x_1, x_2, x_3, g(x_4), x_5) = (0{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0\lambda{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}) = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $g(x) = (0*)$, $\lambda \in \{0, *\}$. Имеем $h(x_1, x_2, -, -, -) = (000*)$. Поэтому $f(01100) = *$.

Если предположить, что $f(10110) = 0$, то $f(e_1^3(\tilde{u}), 0, e_1^3(\tilde{u}), e_2^3(\tilde{u}), e_3^3(\tilde{u})) = (0***00*) = h(y_1, y_2, y_3)$, где $\tilde{u} = \{x_1, x_4, x_5\}$. Имеем $h(e_2^2(y_2, y_3), e_1^2(y_2, y_3), -) = (00*0)$. Поэтому $f(10110) = *$.

Если предположить, что $f(10011) = 0$, то $f(e_1^4(\tilde{u}), 0, e_2^4(\tilde{u}), e_3^4(\tilde{u}), e_4^4(\tilde{u})) = (0******0***0*0**) = h_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$, где $\tilde{u} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$. Далее получим, что $h_1(h_1(y_1, y_2, y_3, y_4), 0, 0, g(y_3, y_4)) = (0******0***0****) = h_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$, где $g(x_1, x_2) = (0**0)$. Затем рассмотрим суперпозицию $e_3^4(y_1, h_2(y_1, y_2, y_3, y_4), y_3, y_4) = (0******1***1****) = h(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Имеем $h(y_1, -, -, -) = (-1)$. Поэтому $f(10011) = *$.

Если $f(11010) = 0$, то $f(x_1, x_2, g(x_3), x_4, x_5) = (0{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}) = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $g(x) = (0*)$. Имеем $h(x_1, x_2, -, -, -) = (00*0)$. Поэтому $f(11010) = *$.

Тогда $f(x_1, g(x_2), x_3, x_4, x_5) = (0******0*************0**********) = h_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $g(x) = (0*)$. Затем получим $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e_3^5(x_1, h_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_3, x_4, x_5) = (0******1*************1**********)$. Тогда $h(x_1, -, -, -, -) = (-1)$.

Случай 3. Суперпозиция $g(f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ сводит этот случай к предыдущему, где $g(x) = (0*)$.

Случай 4. Имеем

$$f\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Если $f(00001) = 0$, то $f(00110) = 0$ и $f(01010) = 1$. Далее $f(00110) = 0 \Rightarrow f(11111) = 1$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Если $f(00001) = 1$, то

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\*\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Поэтому $f(00001) = *$. Тогда $f(00001) = * \Rightarrow f(01010) = *$, $f(00110) = *$, $f(10100) = *$; $f(01010) = * \Rightarrow f(11111) = *$; $f(11111) = * \Rightarrow f(11000) = *$.

Если $f(01000) = 0$, то $f(10001) = *$. Далее $f(01000) = 0 \Rightarrow f(01111) = 0$; $f(01111) = 0 \Rightarrow f(10000) = *$; $f(10000) = * \Rightarrow f(00101) = *$; $f(10001) = * \Rightarrow f(00100) = *$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\*\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Если $f(01000) = 1$, то, как и в предыдущем случае получим

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Поэтому $f(01000)=*$. Откуда $f(01000)=*\Rightarrow f(00011)=*, f(11101)=*$; $f(00011)=*\Rightarrow f(00100)=*$ и $f(00100)=*\Rightarrow f(10001)=*, f(01111)=*$.

Если $f(00010)=0$, то $f(00101)=0$. Далее $f(00101)=0\Rightarrow f(10000)=1$; $f(00010)=0\Rightarrow f(01001)=1$. Тогда

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Если $f(00010)=1$, то

$$f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\ *\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Поэтому $f(00010)=*$. Откуда $f(00010)=*\Rightarrow f(00101)=*$, $f(01001)=*$, $f(10111)=*$; $f(00101)=*\Rightarrow f(10000)=*$; $f(10000)=*\Rightarrow f(11011)=*$.

Далее $f(10010), f(10011), f(10110)\in\{1,*\}$. В противном случае получим $f(e_1^4(\tilde{u}),0,e_2^4(\tilde{u}),e_3^4(\tilde{u}),e_4^4(\tilde{u}))=(0******0**\lambda_1\lambda_2*1\lambda_3*)=h(y_1,y_2,y_3,y_4)$, где среди $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ есть 0 и $\tilde{u}=\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$. Имеем $h(y_1,-,-,-)=(0-)$.

Аналогично $f(11010), f(11100), f(11110)\in\{1,*\}$. В противном случае получим $f(e_1^4(\tilde{u}),e_1^4(\tilde{u}),e_2^4(\tilde{u}),e_3^4(\tilde{u}),e_4^4(\tilde{u}))=(0******0*1\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*)=h(y_1,y_2,y_3,y_4)$, где среди $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ есть 0 и $\tilde{u}=\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$. Далее получим $h(y_1,-,-,-)=(0-)$.

Тогда $f(x_1,-,-,-,-)=(-1)$. □

Лемма 4. *Имеют место:*

1) $(11)\in[\{(00),(--),f_{K_6},f_{K_8},f_{K_{10}}\}]$;

2) $(00)\in[\{(11),(--),f_{K_6},f_{K_9},f_{K_{10}}\}]$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение, доказательство второго утверждения аналогично в силу двойственности.

Так как функция f_{K_6} не принадлежит классу K_6, то найдутся два набора $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ такие, что $f_{K_6}(\tilde{\alpha})=\mu\neq*$ и $f_{K_6}(\tilde{\beta})=*$. Если $f_{K_6}(\tilde{0})=*$, то $f_{K_6}\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ \mu\end{pmatrix}$. Используя 0, получим функцию $(*0)$, а затем функцию $(*1)$, из которой легко получить константу 1. Поэтому считаем, что $f_{K_6}(\tilde{0})=\eta\neq*$. Тогда имеем $f_{K_6}\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta\\ *\end{pmatrix}$. Используя 0, получим функцию $(0*)$, поэтому будем считать, что эта функция у нас есть.

Ниже приведены суперпозиции функций, которые будут встречаться в дальнейшем. Каждая из них позволяет получить функцию (-1):

$$\begin{matrix}0\\1\\0\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\ *&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\ *\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\1\\ *\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&*\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ *\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\1\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}0\\0\\\ast\\\ast\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\-&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\ast\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&\ast\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\ast\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\1\\\ast\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&1\\-&0\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\0\\-\\0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&0\\1&-\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}0\\0\\\ast\\\ast\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\0\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\-\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\0\\-\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\-\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&-\\0&0\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&\ast\\0&-\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\ast\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}0\\0\\\ast\\\ast\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\0\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\1\\-\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\-&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\-\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\\ast&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\0\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\1\\1\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&\ast\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&-\\1&\ast\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}0\\\ast\\\ast\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\0\\-\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\\ast\\\ast\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&-\\1&0\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ast\\-\end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-&0&0\\1&0&0\\\ast&0&0\\0&0&\ast\\-&0&\ast\\1&0&\ast\\\ast&0&\ast\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\1\\\ast\\\ast\\\ast\\\ast\\\ast\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\-\\1\\\ast\\\ast\\\ast\\\ast\\\ast\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0&-\\-&0&-\\-&0&-\\-&0&-\\-&1&-\\-&1&-\\-&1&-\\-&1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\-\\-\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Также будет встречаться функция (0110), которая по лемме 2 дает (11).

Теперь перейдем к функции f_{K_8}. Так как она не принадлежит классу K_8, то не удовлетворяет по крайней мере одному из трех условий в определении класса. Рассмотрим все три варианта и в каждом из них получим функции суперпозиции которых приведены выше.

I. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет первому условию. Возможны три случая.

1) Если $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\\tilde\beta\\\tilde\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, то отождествлением переменных и подстановкой 0 получим функцию $f(x_1,x_2,x_3)=(\mu_1 0\mu_2 1\mu_3 1\mu_4\mu_5)$, где $\mu_i\in\{0,1,-,\ast\}$, $i\in\{1,2,3,4,5\}$. Имеем $\mu_1=0$, иначе получим одну из функций (10), $(\ast 0)$, (-1). Если $\mu_2\in\{-,\ast\}$, то $f(0,x_2,x_3)\in\{(00\ast 1),(00-1)\}$. Предположим, что $\mu_2=0$. Если $\mu_5=0$, то получим $u(x_1,x_2,x_3)=f(e^3_2(x_1,x_2,x_3),f(x_1,x_2,x_3),e^3_2(x_1,x_2,x_3))=(0010\eta 0\theta 1)$ и $u(0,x_2,x_3)=(0010)$, где $\eta\in\{0,\ast\},\theta\in\{-,\ast\}$. Если $\mu_5\in\{1,\ast\}$, то легко получим $f(e^3_3(x_1,x_2,x_3),-,e^3_2(x_1,x_2,x_3))\in\{(00-1),(01-1),(0--1),(0\ast-1)\}$. Если $\mu_5=-$, то $f(e^3_2(x_1,x_2,x_3),e^3_3(x_1,x_2,x_3),e^3_2(x_1,x_2,x_3))=(001-)$. Далее рассмотрим вариант, когда $\mu_2=1$. Если $\mu_5\in\{0,-\}$, то получим $f(e^3_2(x_1,x_2,x_3),e^3_3(x_1,x_2,x_3),e^3_2(x_1,x_2,x_3))\in\{(0110),(011-)\}$. Если $\mu_5\in\{1,\ast\}$, то $f(e^3_1(x_1,x_2,x_3),-,e^3_1(x_1,x_2,x_3))=(-1)$.

2) Если $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\\tilde\beta\\\tilde\gamma\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, то отождествлением переменных и подстановкой 0 получим функцию $f(x_1,x_2,x_3)=(\mu_1 1\mu_2 0\mu_3\theta\mu_4\mu_5)$, где $\theta\in\{0,1\}$,

$\mu_i \in \{0, 1, -, *\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Имеем $\mu_1 = 0$, иначе получим одну из функций $(10), (*0), (-1)$. Из функции $f(0, x_2, x_3) = (01\mu_2 0)$ при любом значении μ_2 можно получить (-1).

3) Если $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, то отождествлением переменных и подстановкой 0 получим функцию $f(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1 1 \mu_2 1 \mu_3 0 \mu_4 \mu_5)$, где $\mu_i \in \{0, 1, -, *\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Имеем $\mu_1 = 0$, иначе получим одну из функций $(10), (*0), (-1)$. Из функции $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), 0, e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (01\mu_3 0)$ при любом значении μ_3 можно получить (-1).

II. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет второму условию, т.е. $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$.

Тогда отождествлением переменных и подстановкой 0 получим функцию $f(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 - \mu_4 1 \mu_5 \mu_6)$, где $\mu_i \in \{0, 1, -, *\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Имеем $\mu_1 = 0$, иначе получим одну из функций $(11), (-1), (*1)$. Если $\mu_6 \in \{0, -\}$, то $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), e_2^3(x_1, x_2, x_3)) = (0\mu_3 1 \mu_6)$. Если $\mu_6 = 1$, то $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 - \mu_4 1)$. Поэтому $\mu_6 = *$. Если $\mu_2, \mu_3 \in \{1, *\}$, то $f(0, e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) \in \{(001-), (00*-), (011-), (01--), (01*-), (0**-)\}$. Если $\mu_2 = -$, то $f(e_3^3(x_1, x_2, x_3), 0, e_2^3(x_1, x_2, x_3)) = (0\mu_4 - 1)$. Если $\mu_3 = -$, то получим $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), e_2^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 - 1*)$. Поэтому $f(x_1, x_2, x_3) = (000 - \mu_4 1 \mu_5 *)$. Если $\mu_4 = 1$, то получим $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3)) = (0 - 1*)$. Если $\mu_4 \in \{-, *\}$, то $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), 0, e_3^3(x_1, x_2, x_3)) \in \{(00-1), (00*1)\}$. Т.е. $\mu_4 = 0$. Если $\mu_5 = 0$, то $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = e_1^4(f(e_2^4(x_1, x_2, x_3, x_4), e_3^4(x_1, x_2, x_3, x_4), e_4^4(x_1, x_2, x_3, x_4)), 0, 0, g(x_1))$, где $g(x) = (0*)$. Откуда получим, что $h(-, x_2, x_3, -) = (00-1)$. Если $\mu_5 = 1$, то получим, что $f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), e_3^3(x_1, x_2, x_3), -) = (00-1)$. Если $\mu_5 \in \{-, *\}$, то суперпозиция $f(x_1, f(e_2^3(x_1, x_2, x_3), 0, e_3^3(x_1, x_2, x_3)), x_3) = (000 - 010*)$ приводит к случаю, рассмотренному выше при $\mu_5 = 0$.

III. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет третьему условию,, т.е. $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \lambda\end{pmatrix}$, где $\lambda \neq *$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Тогда отождествлением переменных и подстановкой 0 получим функцию $f(x_1, x_2) = (\alpha * \gamma \lambda)$, где $\alpha, \gamma \in \{0, 1, -, *\}$, $\lambda \neq *$. Если $\alpha = *$, то легко получим функцию $(*\lambda)$, из которой можно получить $(*1)$. Поэтому $\alpha \neq *$. Если $\gamma \neq *$, то используя 0 получим функцию $(00*0)$. Поэтому $\gamma = *$. Из функции f легко получим функцию $(0**0)$ и применим лемму 3. □

Лемма 5. *Имеет место* $(--) \in [\{(00), (11), f_{K_7}\}]$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно. □

Лемма 6. *Хотя бы одно из множеств* $\{(0*), (1*)\}$, $\{(*0), (*1)\}$ *является подмножеством множества* $[\{(00), (11), f_{K_6}\}]$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно. □

Лемма 7. *Множество* $[\{(--), f_{K_4}\}]$ *содержит хотя бы одну из констант* 0 *или* 1.

Доказательство. Так как функция f_{K_4} не принадлежит классу K_4, то существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f_{K_4}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix}$ принадлежит одному из множеств:

$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix} \right\};$

$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\-\end{pmatrix} \right\}.$

Отождествлением переменных или добавлением фиктивной переменной приведем функцию f_{K_4} к двухместной функции $f(x_1, x_2) = (\alpha\beta\gamma\delta)$, где $(\beta\gamma)^t \in C_1$ или $(\beta\gamma)^t \in C_2$, $\alpha, \delta \in \{0, 1, -, *\}$.

Заметим, что каждая из функций $(\alpha-), (-\alpha), (\alpha*), (*\alpha)$, где $\alpha \in \{0, 1\}$ с помощью функции $(--)$ приводит либо к 0, либо к 1, а каждая из функций $(-*), (*-)$ легко дает одну из функций $(0*), (*1)$.

Далее покажем, что при любом значении α получим константу 0 или 1.

1) Если $\alpha = 0$, то $\delta = 1$, иначе отождествлением получим одну из функций: $(00), (0-), (0*)$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_1$, то либо $f(x_1, -) \in \{(0-), (-1)\}$, либо $f(-, x_2) \in \{(0-), (-1)\}$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_2$, то имеем функцию $f(x_1, x_2) = (0-*1)$, которая приводит к $(0-)$: $g(x_1, x_2) = e_1^2(e_1^2(x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = (00*1)$ и $g(-, e_1^2(x_1, x_2)) = (00--)$.

2) Если $\alpha = 1$, то $\delta = 0$, иначе отождествлением получим одну из функций: $(11), (1-), (1*)$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_1$, то либо $f(x_1, -) \in \{(1-), (-0)\}$, либо $f(-, x_2) \in \{(1-), (-0)\}$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_2$, то имеем функцию $f(x_1, x_2) = (1-*0)$, которая приводит к $(0-)$: $g(x_1, x_2) = e_1^2(e_1^2(x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = (00*1)$ и $g(-, e_1^2(x_1, x_2)) = (00--)$.

3) Если $\alpha = -$, то $\delta = -$, иначе отождествлением получим одну из функций: $(-0), (-1), (-*)$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_1$, то $f(x_1, -) \in \{(00),\ (11),\ (0-),\ (-0),\ (1-),\ (-1)\}$. Если $(\beta\gamma)^t \in C_2$, то имеем функцию $f(x_1, x_2) = (--*-)$. Тогда

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & -\\0 & -\\1 & *\\1 & -\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\*\\1\end{pmatrix}, \begin{matrix}0\\0\\*\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}.$$

4) Если $\alpha = *$, то $\delta = *$, иначе отождествлением получим одну из функций: $(*0), (*1), (*-)$. Имеем функцию $f(x_1, x_2) = (*\beta\gamma*)$ и $f(x_1, -)$ совпадает с одной из функций: (00), (11),$(0-)$, (-0), $(1-)$, (-1), $(0*)$, $(1*)$, $(-*)$, $(*0)$,$(*1)$, $(*-)$.

$\square$

Лемма 8. *Имеет место*

$$\{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\} \subseteq [\{(10), f_{K_4}, f_{K_6}, f_{K_7}\}].$$

Доказательство. Функция f_{K_4} не удовлетворяет условиям в определении класса, поэтому существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f_{K_4}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix}$ принадлежит одному из множеств: $C_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix} \right\}$; $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\-\end{pmatrix} \right\}$; $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix} \right\}$. Рассмотрим каждый из вариантов.

Если $f_{K_4}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} \in C_1$, то с учетом $\begin{array}{c}1\\-\end{array}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}-\\1\end{array}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}-\\0\end{array}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}0\\-\end{array}\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ получим, что $(00), (11) \in [\{(10), f_{K_4}\}]$. Далее применив леммы 5 и 6, получим либо $(--)$ и $(*\alpha)$, либо $(--)$ и $(\alpha*)$, где $\alpha \in \{0, 1, -\}$. Отсюда справедливость леммы очевидна.

Если $f_{K_4}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} \in C_2$, то $(-*), (*-) \in [\{(10), f_{K_4}\}]$. Тогда $\begin{array}{c}0\\1\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}* & 0\\ - & 1\\ * & 0\\ - & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\1\\*\\1\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}*\\1\end{array}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}1\\0\end{array}\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}*\\0\end{array}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\*\end{pmatrix}$.

Если $f_{K_4}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} \in C_3$, то с учетом суперпозиций выше получим, что $(0*)$, $(1*)$, $(*0)$, $(*1) \in [\{(10), f_{K_4}\}]$. Далее необходимо задействовать функцию f_{K_7}. Так как функция f_{K_7} не принадлежит классу K_7, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f_{K_7}(\tilde{\alpha}) = -$. Тогда $f_{K_7}\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\ -\end{pmatrix}$, $\mu \in \{0, 1, -, *\}$. Если в наборе $\tilde{\alpha}$ все 1, то, учитывая наличие отрицания, сразу получим либо $(0-)$ и $(1-)$, а значит (00) и (11), либо $(*-)$ и $(-*)$. Оба случая рассмотрены выше. Предположим, что найдутся $i_1, \ldots, i_k$ такие, что $\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_k} = 0$. Теперь рассмотрим суперпозицию с внешней функцией f_{K_7} и внутренними функциями отрицанием $\bar{x}$, которое встречается только на позициях $i_1, \ldots, i_k$, и проекциями x на остальных позициях. Эта суперпозиция приводит к функции $(\lambda-)$, где $\lambda \in \{0, 1, -, *\}$, которая с отрицанием позволяет получить либо (00), (11), либо $(-*)$, $(*-)$. Оба случая рассмотрены выше. □

Лемма 9. *Имеет место*

$$\{(00), (11), (--)\} \subseteq [\{(10), (0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-), f_{K_5}\}].$$

Доказательство. Функция f_{K_5} не удовлетворяет условиям в определении класса, поэтому существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f_{K_5}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix}$ принадлежит множеству $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}\right\}$. Тогда в множестве $[\{(10), f_{K_5}\}]$ содержатся либо $(00), (11)$, либо $(--)$. В первом случае с помощью функции $(*-)$ получим $(--)$, а во втором случае используя $(0*)$, получим (00), а затем с помощью отрицания получим 1. □

Лемма 10. *Справедливы утверждения:*

1) в множестве $[\{(00), (11), (--), f_{K_{11}}\}]$ *содержится по крайней мере одна из функций* (10), (-0), (-1), $(1-)$, $(0*)$, $(1*)$, $(-*)$, $(0---)$;

2) в множестве $[\{(00), (11), (--), f_{K_{12}}\}]$ *содержится по крайней мере одна из функций* (10), $(1-)$, (-0), $(0-)$, $(*0)$, $(*1)$, $(*-)$, $(---1)$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение, доказательство второго утверждения аналогично в силу двойственности.

Так как функция $f_{K_{11}}$ не сохраняет предикат R_{11}, то найдутся наборы $\tilde{\alpha}^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$, $\tilde{\alpha}^2 = (\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2)$, $\tilde{\alpha}^3 = (\alpha_1^3, \ldots, \alpha_n^3)$ такие, что $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_{11}$

для любого j, но $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}\notin R_{11}$, т. е. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}$ должен совпадать с одним из следующих столбцов: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\-\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ *\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\ *\\ \eta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}*\\ \mu\\ \eta\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta\in\{0,1,-\}$. Отметим, что наборы $\tilde\alpha^i=(\alpha^i_1,\ldots,\alpha^i_n)$, где $i\in\{1,2,3\}$, не содержат $*$, иначе набор $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}\in R_{11}$. Так как перестановка строк R_{11} не меняет его, достаточно рассмотреть случаи, когда $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}$ совпадает с одним из столбцов: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ *\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta\in\{0,1,-\}$.

Рассмотрим все варианты.

I. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Для $\tilde\alpha^1$, не затрагивая столбцы вида $(-\,-\,-)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 0, а для $\tilde\alpha^2$, $\tilde\alpha^3$, также не затрагивая столбцы вида $(-\,-\,-)^t$, выберем уточнения, на которых значения $f_{K_{11}}$ равны 1. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Тогда $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\ \beta\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\{0,1,-,*\}$. Если $\alpha\in\{1,-\}$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}\right\}$. Если $\beta\in\{0,-,*\}$, то $f\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix}\right\}$. Если $\alpha=0$, то $\begin{array}{c}0\\1\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix}$. Если $\alpha=*$, то $\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&*\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}*\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-\\-\end{pmatrix}$.

II. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\ \tilde\alpha^2\\ \tilde\alpha^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$. Для $\tilde\alpha^1$, не затрагивая столбцы вида $(-\,-\,-)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 0, а для $\tilde\alpha^2$, $\tilde\alpha^3$, также не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнения, на которых значения $f_{K_{11}}$ равны либо 1, либо $-$. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}\right\}$. Далее получим, что $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ совпадает с одним из столбцов $\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\-\\1\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\1\\-\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\-\\-\\\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, -, *\}$. Случай со столбцом $(\alpha 11\beta)^t$ аналогичен случаю в предыдущем пункте. Если $\alpha \in \{1, -\}$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}\right\}$. Если $\beta \in \{0, *\}$, то $f\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\*\end{pmatrix}\right\}$. Если $\beta = -$, то $f\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}$, либо $f\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}$, либо получим одну из функций $(0 - --)$, $(*---)$. Для функции $(*---)$: $\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&*\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{array}{c}*\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-\\-\end{pmatrix}$. При $\beta = 1$ справедливость утверждения очевидна.

III. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\\tilde\alpha^2\\\tilde\alpha^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}$. Для $\tilde\alpha^1$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 0, для $\tilde\alpha^2$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 1, а для $\tilde\alpha^3$, также не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно либо 1, либо $-$. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}\right\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\1\\-\\\beta\end{pmatrix}\right\}$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, -, *\}$. Оба случая аналогичны случаям, которые были рассмотрены выше.

IV. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde\alpha^1\\\tilde\alpha^2\\\tilde\alpha^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}$. Для $\tilde\alpha^1$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 0 или $-$, а для $\tilde\alpha^2$ и $\tilde\alpha^3$ не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнения, на которых значения $f_{K_{11}}$ равны 1. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим функцию $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Тогда получим $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, -, *\}$. Если $\alpha = 1$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Если $\alpha = -$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$. Если $\beta \in \{0, -, *\}$, то $f\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}\right\}$. Далее действуем аналогично предыдущим случаям.

V. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}$. Для $\tilde{\alpha}^1$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 0 или $-$, для $\tilde{\alpha}^2$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 1 или $-$, а для $\tilde{\alpha}^3$, также не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнения, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно 1. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим функцию $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}\right\}$. Первые три варианта были рассмотрены в предыдущих случаях. Рассмотрим четвертый вариант. Имеем $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\\1\\\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, -, *\}$. Если $\alpha = 1$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}$. Если $\alpha = -$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$. Если $\beta \in \{0, -, *\}$, то $f\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\*\end{pmatrix}\right\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\-\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\-\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Далее $\begin{array}{c}0\\-\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}*\\-\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\1\\1\end{pmatrix}$.

VI. $f_{K_{11}}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\\eta\\*\end{pmatrix}$, где $\mu, \eta \in \{0, 1, -\}$. Для $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\alpha}^2$, не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнения, на которых значения $f_{K_{11}}$ не равны $*$, а для $\tilde{\alpha}^3$, также не затрагивая столбцы вида $(- - -)^t$, выберем уточнение, на котором значение $f_{K_{11}}$ равно $*$. Затем при необходимости отождествим переменные или добавим фиктивные и подставим в $f_{K_{11}}$ функции (00), (11) и $(--)$. Получим функцию $f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\\*\end{pmatrix}$, где $\gamma, \delta \neq *$. Тогда

$f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\delta\\*\\\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\{0,1,-,*\}$. Если $\beta=*$, то $f\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\\*\end{pmatrix}$. Далее суперпозицией 0 и f получим функцию $(00*0)$, которая, как показано в доказательстве леммы 4, позволяет получить функцию (-1). □

Следствие 1. *Пусть* $A_1=\{(10)\}$, $A_2=\{(-0)\}$, $A_3=\{(1-)\}$, $A_4=\{(0-),(-1)\}$, $A_5=\{(0-),(0*),(1*),(-*)\}$, $A_6=\{(-1),(*0),(*1),(*-)\}$, $A_7=\{(0*),(1*),(-*),(*0),(*1),(*-)\}$, $A_8=\{(0---)\}$, $A_9=\{(---1)\}$. *Тогда найдется такое* i, *где* $1\le i\le 9$, *что* $A_i\subseteq[\{(00),(11),(--),f_{K_{11}},f_{K_{12}}\}]$.

Доказательство. Ниже в таблице показано, какие из функций приводят к множествам A_i, где $i\in\{1,\dots,9\}$. Например, на пересечении четвертого столбца и третьей строки находится A_2, следовательно, $A_2\subseteq[\{(00),(11),(--),(1-),(-0)\}]$. Очевидно, что при наличии, например $(*0)$, с помощью (11) и $(--)$ легко получим $(*1)$ и $(*-)$.

	(10)	(-0)	(-1)	$(1-)$	$(0*)$	$(1*)$	$(-*)$	$(0---)$
(10)	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
$(1-)$	A_1	A_2	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
(-0)	A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
$(0-)$	A_1	A_2	A_4	A_3	A_5	A_5	A_5	A_8
$(*0)$	A_1	A_2	A_6	A_3	A_7	A_7	A_7	A_8
$(*1)$	A_1	A_2	A_6	A_3	A_7	A_7	A_7	A_8
$(*-)$	A_1	A_2	A_6	A_3	A_7	A_7	A_7	A_8
$(---1)$	A_1	A_2	A_9	A_3	A_9	A_9	A_9	A_8

□

Лемма 11. *Справедливы утверждения:*

1) в множестве $[\{(00),(11),(--),f_{K_8}\}]$ *содержится по крайней мере одна из функций* (10), (-1), $(1-)$, $(*0)$, $(*1)$, $(*-)$;

2) в множестве $[\{(00),(11),(--),f_{K_9}\}]$ *содержится по крайней мере одна из функций* (10), (-0), $(0-)$, $(0*)$, $(1*)$, $(-*)$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение, доказательство второго утверждения аналогично в силу двойственности.

Так как функция f_{K_8} не принадлежит классу K_8, то не удовлетворяет одному из трех условий в определении класса. Рассмотрим все три варианта.

I. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет первому условию. Возможны два случая.

1) Если $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\\tilde\beta\\\tilde\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, то отождествлением переменных и подстановкой 0 и 1 получим функцию $f(x_1,x_2)=(011\alpha)$, где $\alpha\in\{0,1,-,*\}$. Если $\alpha=0$, то $f(1,x_2)=(10)$. В остальных случаях $f(x_1,-)=(-1)$.

2) Если $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\\tilde\beta\\\tilde\gamma\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, то отождествлением переменных и подстановкой 0 и 1 получим одну из функций (100α), (101α), (110α), где $\alpha\in\{0,1,-,*\}$,каждая из которых легко дает (10).

II. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет второму условию, т.е. $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\end{pmatrix}$. Тогда отождествлением переменных и подстановкой 0 и 1 получим функцию $f(x_1, x_2) = (\alpha - 1\beta)$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, -, *\}$. Если $\alpha = 1$ или $\beta = -$, то легко получим $(1-)$. Если $\alpha = -$ или $\beta = 1$, то легко получим (-1). Если $\alpha = *$, то легко получим $(*1)$. Если $\beta = 0$, то легко получим (10). В случае, когда $\alpha = 0$ и $\beta = *$, как показано в доказательстве леммы 4, получим функцию (-1).

III. Пусть f_{K_8} не удовлетворяет третьему условию, т.е. $f_{K_8}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \lambda\end{pmatrix}$, где $\lambda \neq *$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда отождествлением переменных и подстановкой 0 и 1 сразу же получим функцию $f(x) = (*\lambda)$, где $\lambda \in \{0, 1, -\}$. □

Следствие 2. *Пусть* $B_1 = \{(10)\}$, $B_2 = \{(0-), (-1)\}$, $B_3 = \{(0-), (*0), (*1), (*-)\}$, $B_4 = \{(-1), (0*), (1*), (-*)\}$, $B_5 = \{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\}$. *Тогда найдется такое* i, *где* $1 \leq i \leq 5$, *что* $B_i \subseteq [\{(00), (11), (--), f_{K_8}, f_{K_9}\}]$.

Доказательство. Ниже в таблице показано, какие из функций приводят к множествам B_i, где $i \in \{1, \dots, 5\}$. Например, на пересечении четвертого столбца и третьей строки находится B_3, следовательно, $B_3 \subseteq [\{(00), (11), (--), (*0), (0-)\}]$. Очевидно, что при наличии, например $(*0)$, с помощью (11) и $(--)$ легко получим $(*1)$ и $(*-)$. Также учитываем, что $\begin{matrix}1\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$.

	(10)	(-1)	$(1-)$	$(*0)$	$(*1)$	$(*-)$
(10)	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1
(-0)	B_1	B_2	B_2	B_3	B_3	B_3
$(0-)$	B_1	B_2	B_2	B_3	B_3	B_3
$(0*)$	B_1	B_4	B_4	B_5	B_5	B_5
$(1*)$	B_1	B_4	B_4	B_5	B_5	B_5
$(-*)$	B_1	B_4	B_4	B_5	B_5	B_5

□

Лемма 12. *Пусть* $C_1 = \{(10)\}$, $C_2 = \{(0-), (-1)\}$, $C_3 = \{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\}$. *Тогда найдется такое* i, *где* $1 \leq i \leq 3$, *что* $C_i \subseteq [\{(00), (11), (--), f_{K_8}, f_{K_9}, f_{K_{11}}, f_{K_{12}}\}]$.

Доказательство. В силу следствий 1 и 2 имеем некоторое множество A_i и некоторое множество B_j, где $i \in \{1, \dots, 9\}$, $j \in \{1, \dots, 5\}$. Ниже в таблице показано, какие из множеств A_i и B_j приводят к множествам C_1, C_2, C_3, либо к множеству $P_2^{\overline{*}}$. На пересечении i–го столбца и j–ой строки находится множество, являющееся подмножеством $[A_i \cup B_j \cup \{(--)\}]$. Для получения $P_2^{\overline{*}}$ необходимо воспользоваться леммой 1. Очевидно, что в $P_2^{\overline{*}}$ содержится каждое из множеств C_1, C_2, C_3. Заметим, что при наличии, например $(*0)$, с помощью (11) и $(--)$ легко получим $(*1)$ и $(*-)$. Также учитываем, что $\begin{matrix}1\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
B_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1
$B_2 \bigcup \{(--)\}$	C_1	C_2	C_2	C_2	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	C_2	C_2
$B_3 \bigcup \{(--)\}$	C_1	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$
$B_4 \bigcup \{(--)\}$	C_1	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$
$B_5 \bigcup \{(--)\}$	C_1	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$	C_3	$P_{\overline{2}}^*$	$P_{\overline{2}}^*$

$\square$

Лемма 13. *По крайней мере одна из функций* $(0-)$, $(1-)$, (-0), (-1) *принадлежит множеству*

$$[\{(00), (11), (--), (0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-), f_{K_{10}}\}].$$

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были использованы в лемме 3, получим функцию $f'_{K_{10}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$, которая не сохраняет предикат R_{10}.

Далее, как и в доказательстве леммы 3 заменим наборы $(0110)^t, (1001)^t$, которые могут встречаться в M, на другие наборы без $*$ из M, затем отождествим переменные и подставим константы 0 и 1. Получим функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такую, что $f(M) \notin R_{10}$, где матрица M состоит из столбцов $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1100)^t$, $(1010)^t$.

Достаточно рассмотреть только случаи, когда $f(M)$ совпадает с одним из столбцов $(\epsilon\varepsilon\zeta\eta)^t$, $(\alpha\beta\gamma*)^t$, $(0001)^t$, $(0111)^t$, где либо α, β, $\gamma \in \{0, 1\}$, либо $\alpha = \beta = \gamma = -$, а среди $\epsilon, \varepsilon, \zeta, \eta$ встречаются ω и $-$, где $\omega \in \{0, 1\}$. Действительно, перестановка столбцов в матрице M приведет к одному из этих вариантов.

Нетрудно заметить, что доказательство ниже не зависит от расположения столбцов матрицы M, поэтому мы можем рассмотреть только вариант

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению возможных значений функции f.

I. Без ограничения общности будем считать, что $f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\beta \in \{0, 1\}$. Подставим константы 0 и 1 и получим функцию $g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ - \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Если $\alpha \neq *$ или $\beta \neq *$, то справедливость утверждения очевидна. Если $\alpha = *$ и $\gamma = *$, то $\begin{array}{c} * \\ - \\ \beta \\ * \end{array}\begin{pmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ 1 & - \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$.

II. Суперпозицией с внешней функцией 0 и внутренней функцией f получим функцию, у которой среди значений встречаются только 0 и $*$. Поэтому можно считать, что $f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$. Тогда $f(0000) = 0$ и $f(1111) = 0$.

Действительно, если одно из значений будет $*$, например $f(0000) = *$, а другое 0, то $f\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Тогда $\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&*\\0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{matrix}*\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-\\-\end{pmatrix}$. Если будет наоборот, то в доказательстве леммы 3 показано, как из функций $(000*)$ и $(--)$ получить (-0). Если же $f(0000) = *$ и $f(1111) = *$, то получим функцию $(*00*)$ и $\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&*\\0&0\\1&0\\1&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\\1\\*\end{pmatrix}, \begin{matrix}*\\0\\1\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Имея отрицание, получим $f\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}$. Далее из $f(0000) = 0$ и $f(1111) = 0$ следует, что $f\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\*\\0\end{pmatrix}$. В доказательстве леммы 3 показано, как из функций $(00*0)$ и $(--)$ получить (-0).

III-IV. Суперпозиция с внешней функцией $(0*)$ и внутренней функцией f сводит третий случай к случаю II. В четвертом случае суперпозиция с внешней функцией $(*0)$ и внутренней функцией f приведет к функции $(*000)$. Затем перестановкой переменных получим функцию из случая II. □

Следствие 3. *Множество*

$$[\{(00), (11), (--), (0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-), f_{K_{10}}\}]$$

является полным в $P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство. По лемме 13 получим одну из функций $(0-)$, $(1-)$, (-0), (-1). Далее по лемме 1 получим полное в $P_2^{\overline{*}}$ множество. □

Лемма 14. *Классы* $K_1 - K_{12}$ *попарно различны и не совпадают с* $P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство. Доказательство приведено ниже в таблице, где на пересечении i-ой строки и j-го столбца указана функция, принадлежащая классу K_i и не принадлежащая классу K_j, где $i, j \in \{1, \ldots, 12\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\bullet$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 $-$	0 $*$	$*$ 0	0 $*$	0 $-$	0 $*$	$*$ 0
2	1 1	$\bullet$	1 1	1 1	1 1	$-$ 1	1 $*$	$*$ 1	1 $*$	$-$ 1	1 $*$	$*$ 1
3	1 $*$	$*$ 0	$\bullet$	0 $*$	0 $-$ $-$ $*$	$-$ $*$	$-$ $*$	$*$ $-$	$-$ $*$	0 $-$ $-$ $*$	$-$ $*$	$*$ $-$
4	1 0	1 0	1 0	$\bullet$	$-$ $-$	$-$ $-$	1 $*$ $*$ 0	1 0	1 0	1 $-$ $-$ 0	1 0	1 0
5	1 0	1 0	1 0	1 $*$	$\bullet$	$-$ $*$	$-$ $*$	1 0	1 0	1 $-$ $-$ 0	1 0	1 0
6	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	$\bullet$	$*$ 1	1 0	1 0	0 0 0 $*$	1 0	1 0
7	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	$-$ 1	$\bullet$	1 0	1 0	$-$ 1	1 0	1 0
8	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	0 $-$	1 $*$	$\bullet$	0 $-$	0 $-$	$-$ 0	0 $-$
9	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	1 $-$	$*$ 1	1 $-$	$\bullet$	1 $-$	1 $-$	1 $-$
10	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	$-$ $-$	1 $*$	1 0	1 0	$\bullet$	1 0	1 0
11	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	$-$ $-$	$*$ 1	$*$ 1	0 $-$	0 $-$	$\bullet$	0 $-$
12	1 1	0 0	1 1	1 1	1 1	$-$ $-$	1 $*$	$-$ 1	1 $*$	$-$ 1	$-$ 1	$\bullet$

$\square$

4. Критерий полноты

Теорема 1. *Для того чтобы система функций из $P_2^{\overline{*}}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов $K_1 - K_{12}$.*

Доказательство. Необходимость. Следует из замкнутости этих классов и из того, что каждый из классов не совпадает с $P_2^{\overline{*}}$ по лемме 14.

Достаточность. Пусть в системе имеются функции $f_{K_1} - f_{K_{12}}$. Функция f_{K_1} не принадлежит классу K_1, поэтому, отождествляя переменные у этой функции, можно получить одну из 8 одноместных функций: $h_1 = (10)$, $h_2 = (11)$, $h_3 = (1*)$, $h_4 = (-*)$, $h_5 = (--)$, $h_6 = (-1)$, $h_7 = (1-)$, $h_8 = (-0)$. Так как $\begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}-\\1\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}0\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$, то достаточно рассмотреть только функции $h_1 - h_5$. Отождествляя переменные у функции f_{K_2}, можно получить одну из 8 одноместных функций: $g_1 = (10)$, $g_2 = (00)$, $g_3 = (*0)$, $g_4 = *-)$, $g_5 = (--)$, $g_6 = (0-)$, $g_7 = (-0)$, $g_8 = (1-)$.

Так как $\begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}0\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}-\\1\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$, то достаточно рассмотреть только функции $g_1 - g_5$.

Введем 4 множества: $A_1 = \{(10)\}$, $A_2 = \{(--)\}$, $A_3 = \{(00),(11)\}$, $A_4 = \{(0*),(1*),(*0),(*1)\}$. Тогда $[\{f_{K_1}, f_{K_2}\}]$ содержит одно из множеств $A_1 - A_4$:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
h_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
h_2	A_1	A_3	A_3	A_2	A_2
h_3	A_1	A_3	A_4	A_4	A_2
h_4	A_1	A_2	A_4	A_4	A_2
h_5	A_1	A_2	A_2	A_2	A_2

Отождествляя переменные у функции f_{K_3}, получим одну из функций: (10), (00), (11), ($-$0), (0$-$), ($-$1), (1$-$), ($--$). Каждая из них множество A_4 сводит к одному из множеств A_1, A_2, A_3.

Лемма 5 множество A_3 сводит к множеству A_2.

Если получено множество A_1, то по лемме 8 получим множество $\{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-), (**)\}$. Затем по лемме 9 получим функции (00), (11), ($--$) и в силу следствия 3 получим полное в $P_2^{\overline{*}}$ множество.

Если получено множество A_2, то по лемме 7 получим либо множество $\{(00), (--)\}$, либо множество $\{(11),(--)\}$. Затем по лемме 4 получим функции (00), (11), ($--$). Далее по лемме 12 получим одно из множеств $\{(10)\}$, $\{(0-),(-1)\}$, $\{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\}$. Первое множество приводит к рассмотренному выше случаю с множеством A_1. В случае с множеством $\{(0-),(-1)\}$, применяя лемму 6, а затем лемму 1 получим полное в $P_2^{\overline{*}}$ множество. В случае с множеством $\{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\}$ в силу следствия 3 получим полное в $P_2^{\overline{*}}$ множество.

□

References

[1] E. L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition*, Amer. J. Math., **43**:4 (1921), 163–185. JFM 48.1122.01

[2] S.V. Yablonsky, *Functional Constructions in k-valued Logic*, Tr. MIAN USSR, **51** (1958), 5–142.

[3] I. Rosenberg, *Über die Functionale Vollständigkeit in Den Mehrwertigen Logiken (Struktur der Funktionen von Mehreren Veränderlichen auf Endlichen Mengen*, Rozpravy Ceskoslovenske Akad. Vĕd. Rada Mat. Prirod. Vĕd., **80** (1970), pp. 3–93. Zbl 0199.30201

[4] Wang Xianghao, *Structure Theory of Total and Partial Functions Defined on Finite Set*, Acta Sci. Natur. Univ. Jiliensis, **2**:6 (1963), 295–316.

[5] R.V. Freiwald, *On Completeness of Partial Functions of Boolean Algebra (in Russian)*, DAN USSR, **167**:6 (1966), 1249–1250.

[6] Lo Czu Kai, *Maximal Closed Classes in the Set of Partial Functions on Multi Valued Logic*, Kiberneticheskiy Sbornik. Novaya seriya, **25** (1988), 131–141.

[7] V. V. Tarasov, *Completeness Criterion for Undefined Functions of Boolean Algebra (in Russian)*, Problemy Kibernetiki, **30** (1975), 319–325. Zbl 0414.94040

[8] V.I. Panteleev, *Completeness Criterion for Predefined Boolean Functions (in Russian)*, Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser., **2**:68 (2009), 60–79. Zbl 1319.03064

[9] V.I. Panteleev, *Completeness Criterion for Sub-defined Partial Boolean Functions (in Russian)*, Vestnik Novosibir. Gos. Univ. Ser.: Matem., Mechan., Inform., **9**:3 (2009), 95–114. Zbl 1249.06037

[10] S.A. Badmaev, *Completeness Criterion for Partial Ultrafunctions (in Russian)*, Collection of Abstracts of Maltsev Meeting, (2016), 172.

[11] S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev, *On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set (in Russian)*, Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika, **16** (2016), 3–18. Zbl 1350.08002

[12] V.I. Panteleyev, *On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones (in Russian)*, Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika, **5**:4 (2012), 46–53. Zbl 1304.08003

[13] S.A. Badmaev, *On Some Maximal Partial Ultraclones on a Two-element set (in Russian)*, Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika, **21** (2017), 3–18. Zbl 06853400

[14] S.A. Badmaev, *On Some Maximal Clone of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **10**:2 (2017), 140–145.

[15] S.A. Badmaev, *On Complete Sets of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set (in Russian)*, Vestnik Buryat. Gos. Univ. Matem., Inform., **3** (2015), 61–67.

Sergey Alexandrovich Badmaev
Buryat State University,
Smolin St., 24a,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: badmaevsa@mail.ru