S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 475–502 (2018) УДК 519.21

DOI 10.17377/semi.2018.15.041 MSC 60K05, 60F10

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ МОМЕНТНОМ УСЛОВИИ КРАМЕРА. I

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. In the work, which consists of 4 papers (the article and [15]—[17]), we obtain integro-local limit theorems in the phase space for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds.

In the part I (the article) we consider the so-called first renewal process $\mathbf{Z}(t)$ in a regular region, which is an of analog Cramer's deviation region for random walk. The regular region includes normal and moderate deviations.

Keywords: compound multidimensional renewal process, first (second) renewal process, large deviations, integro-local limit theorems, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function.

1. Введение

Условимся элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{xy} := x_{(1)}y_{(1)} + \cdots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$.

Mogulskii A.A., Prokopenko E.I., Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00129).

Поступила 5 февраля 2018 г., опубликована 4 мая 2018 г.

Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть заданы "начальный" случайный вектор $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных $(d+1)$-мерных векторов $(\tau, \boldsymbol{\zeta}), (\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2), (\tau_3, \boldsymbol{\zeta}_3), \ldots$, где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_0 := 0, \quad \mathbf{Z}_0 := \mathbf{0}; \qquad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j \quad \text{при} \quad n \geq 1.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : \ T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : \ T_k \leq t\}.$$

Ясно, что

$$\nu(t) = \eta(t) - 1.$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Наряду с о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ мы будем изучать также процесс

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)} \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

который мы также будем называть о.п.в. Траектории процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ непрерывны справа.

Для того, чтобы различать процессы $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$, мы будем называть их *первый о.п.в.* и *второй о.п.в.*, соответственно. Будут установлены интегро-локальные предельные теоремы для процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$. В области больших уклонений они будут, вообще говоря, различными.

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина $\boldsymbol{\zeta}_1$ этого скачка имеет совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ (см., например, [1] — [4]). Это реализуется, например, *для о.п.в. со стационарными приращениями* (см., например, [3],[4]). Если $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \stackrel{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta})$, то процессы $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ будем называть *однородными о.п.в.*; в противном случае — *неоднородными*.

Если $\tau_1 = \tau \equiv 1$, то процесс $\mathbf{Z}(t)$ при $t = 0, 1, 2, \cdots$ становится *случайным блужданием*, порожденным последовательностью сумм независимых случайных векторов $\{\boldsymbol{\zeta}_k\}$. Интегро-локальные теоремы для сумм случайных векторов можно найти в [5]—[8].

Интегро-локальные теоремы в одномерном случае $d = 1$ для $Z(t), Y(t)$ (в одномерном случае в обозначениях полужирные буквы заменяем обычными) при $t \to \infty$ в области *нормальных уклонений* в случае *независимых* нерешетчатых τ и ζ с конечными вторыми моментами установлены в [7]; в общем случае при выполнении некоторых дополнительных условий— в [9] (см. обзор в [3],[4]).

Грубые аналоги интегро-локальных теорем в одномерном случае $d = 1$ (локальные принципы больших уклонений для конечномерных распределений) установлены в [8], [10]. Принципы больших уклонений и грубые (логарифмические) асимптотики преобразования Лапласа над распределением процессов $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ в многомерном случае $d \geq 1$ получены в [11], [12], соответственно.

Везде, если не оговорено противное, будем предпологать, что выполнено условие Крамера для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{v\tau+v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ является *нерешетчатым*, т.е. *для любого ненулевого вектора* $(c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *выполняется* $|\mathbf{E}e^{i(c\tau+\mathbf{c}\boldsymbol{\zeta})}| < 1$. *Эти два условия для случайного вектора* $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ *во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.* Моментные условия для случайного вектора $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ (т.н. условия "допустимой неоднородности") будут приводиться в каждом из утверждений.

Заметим попутно, что из нерешетчатости случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ вытекает его *невырожденность в* $\mathbb{R}^{d+1}$: *для любого ненулевого вектора* $(c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *и любого числа* $b \in \mathbb{R}$ *выполняется* $\mathbf{P}(c\tau + \mathbf{c}\boldsymbol{\zeta} = b) < 1$.

Итак, основным объектом изучения будет точная асимптотика для т.н. "интегро-локальных" вероятностей

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x})), \quad \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x})), \tag{1.1}$$

где $\Delta[\mathbf{x})$ есть куб

$$[x_{(1)},\ x_{(1)} + \Delta) \times \cdots \times [x_{(d)},\ x_{(d)} + \Delta)$$

в пространстве $\mathbb{R}^d$ с вершиной $\mathbf{x}$ и стороной Δ, причем $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$, $\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t}$ принадлежит некоторому компактному множеству K, которое будет определено ниже. Кроме того, для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ будет получена интегро-локальная теорема для конечно-мерных распределений этого процесса.

Асимптотика вероятностей (1.1) есть весьма непростой объект; он требует привлечения для его исследования интегро-локальных теорем для меры восстановления, соответствующей последовательности $(\tau_j, \boldsymbol{\zeta}_j)$. Это позволяет получить весьма полные результаты. Как замечено в [3],[4], подход, связанный с использованием асимптотики меры восстановления, является по-видимому, единственно возможным; иных подходов к получению предельных теорем для о.п.в. в области больших уклонений (в том числе интегральных теорем) в настоящее время не видно.

Настоящая работа состоит из четырех частей. Часть I (т.е. настоящая статья) посвящена интегро-локальной предельной теореме для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ в т.н. регулярной зоне уклонений этого процесса; в этой части обобщаются на случай $d \geq 2$ результаты работ [3],[4], где эта задача решена в одномерном случае $d = 1$. В части II установлена интегро-локальная предельная теорема для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ в т.н. нерегулярной зоне уклонений этого процесса. В части III получена интегро-локальная предельная теорема для второго о.п.в. $\mathbf{Y}(t)$ в регулярной зоне уклонений этого процесса; результаты этой части обобщают и дополняют утверждения работ [3],[4], где аналогичная задача решена в одномерном случае $d = 1$. Часть IV посвящена интегро-локальной предельной теореме для конечно-мерных приращений первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ (в регулярной зоне уклонений этого процесса); результаты этой части обобщают и дополняют результаты работ [3],[4], где аналогичная задача рассмотрена для одномерного случая $d = 1$.

Заметим попутно, что интегро-локальные предельные теоремы для второго о.п.в. $\mathbf{Y}(t)$ вне регулярной зоны уклонений этого процесса и для конечномерных приращений $\mathbf{Y}(t)$ остаются открытыми проблемами.

Настоящая работа является продолжением работ [3],[4], и в ней в полной мере используются результаты и идеи работ [3],[4].

Остановимся более подробно на содержании части I. В формулировках основных результатов всех частей работы будет участвовать ряд функций, смысл и свойства которых желательно знать для понимания природы установленных законов. Поэтому необходимо ввести сначала нужные понятия и обозначения, снабдив их пояснениями и ссылками. Этому посвящен раздел 2, который в полной мере важен для всех четырех частей работы. В разделе 3 приведены формулировки основных результатов части I работы и комментарии к ним. Значительная часть доказательств основных интегро-локальных теорем для процессов $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ состоит в доказательстве интегро-локальных теорем для меры восстановления, соответствующей случайному блужданию $\{(T_n, \mathbf{Z}_n)\}$. Доказательству этих теоремы посвящен раздел 4. Доказательство основной теоремы приведено в разделе 5.

2. Предварительные сведения и утверждения

Обозначения и утверждения настоящего раздела будут использоваться в каждой из четырех частей настоящей работы. В этих обозначениях мы следуем в значительной степени работам [3],[4]. Положим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}. \tag{2.1}$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Векторы, если они обозначаются одним символом, мы будем также выделять полужирным шрифтом. Если дана функция $F(u, \boldsymbol{v})$ двух переменных $u \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$, то в дальнейшем нижними индексами (1) и (2) мы будем отмечать производные по первому и второму (градиент) аргументу, соответственно, например:

$$F'_{(1)}(u_1, \boldsymbol{v}_1) = \frac{\partial}{\partial u} F(u, \boldsymbol{v}_1) \Big|_{u=u_1}, \quad F''_{(1)}(u_1, \boldsymbol{v}_1) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} F(u, \boldsymbol{v}_1) \Big|_{u=u_1},$$

$$F''_{(2)}(u_1, \boldsymbol{v}_1) = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}^2} F(u_1, \boldsymbol{v}) \Big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1}, \quad F''_{(2,1)}(u_1, \boldsymbol{v}_1) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} F(u, \boldsymbol{v}) \Big|_{(u,\boldsymbol{v})=(u_1,\boldsymbol{v}_1)}.$$

Через $F' = F'(u, \boldsymbol{v})$ и $F'' = F''(u, \boldsymbol{v})$ мы будем обозначать, соответственно, вектор

$$F' = F'(u, \boldsymbol{v}) = (F'_{(1)}(u, \boldsymbol{v}), F'_{(2)}(u, \boldsymbol{v}))$$

и матрицу

$$F'' = F''(u, \boldsymbol{v}) = \|F''_{(i,j)}(u, \boldsymbol{v})\|_{i,j=1,2}.$$

Через $|F''|$ обозначим определитель матрицы F''.

Для функций $G = G(\boldsymbol{v}) : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, будем использовать аналогичные обозначения. Через G' и G'' мы будем обозначать, соответственно, вектор $G' = G'(\boldsymbol{v})$

первых производных (т.е. градиент) и матрицу $G'' = G''(\boldsymbol{v})$ вторых производных функции $G = G(\boldsymbol{v})$.

2.1. **Функция уклонений и некоторые ее свойства.** Мы будем использовать известные интегро-локальные теоремы для сумм $n \geq 1$ независимых случайных векторов $\boldsymbol{\xi}_j := (\tau_j, \boldsymbol{\zeta}_j) \in \mathbb{R}^{d+1}$:

$$\mathbf{S}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_j = (T_n,\ Z_n); \quad \mathbf{S}_0 := (0, \mathbf{0})$$

(см., например, [8], § 2.9 или теорему 4.2 ниже). Важную роль при этом играет *функция уклонений*

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu})} \left\{ \lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \right\}, \tag{2.2}$$

соответствующая случайному вектору $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Это есть преобразование Лежандра над *выпуклой, полунепрерывной снизу* функцией $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$; поэтому функция $\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ также *выпукла* и *полунепрерывна снизу.*

Наряду с множествами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}$ нам понадобится область $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ аналитичности функции $\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$. Эта область содержит те точки $(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, для которых система уравнений (в количестве $d + 1$)

$$\begin{cases} A'_{(1)}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \theta, \\ A'_{(2)}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha}, \end{cases}$$

для координат точки $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ (где достигается верхняя грань в (2.2)), имеет решение

$$(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})),$$

принадлежащее $(\mathcal{A})$, так что

$$\begin{cases} A'_{(1)}(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) = \theta, \\ A'_{(2)}(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) = \boldsymbol{\alpha}, \end{cases} \tag{2.3}$$

и при этом

$$\mathcal{L} = \left\{ (\theta, \boldsymbol{\alpha}) := A'(\lambda, \boldsymbol{\mu}) :\ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}) \right\}.$$

Так как функция $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ строго выпукла в $(\mathcal{A})$, то такое решение всегда единственно (см., например, [13], Гл. 1). Сказанное означает, что условия

$$(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L} \quad \text{и} \quad (\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A})$$

эквивалентны. Ясно, что точка $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = (a_\tau, \mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}})$, где

$$a_\tau := \mathbf{E}\tau, \quad \mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}} := \mathbf{E}\boldsymbol{\zeta},$$

всегда принадлежит $\mathcal{L}$; для нее $(\lambda(a_\tau, \mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}}), \boldsymbol{\mu}(a_\tau, \mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}})) = (0, \mathbf{0}) \in (\mathcal{A})$.

Поясним принцип, которому следуем мы при использовании полужирных и обычных букв. Если аргумент функции является вектором, который обозначается одной буквой, то для этой буквы используется полужирный шрифт. Если значение функции многомерно, то для обозначения этой функции тоже используется полужирный шрифт. Например, для $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ обозначения

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad \lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$$

следуют этому принципу. Если же при этом $d = 1$, то эти же функции будут обозначаться как

$$A(\lambda, \mu), \quad \lambda(\theta, \alpha), \quad \mu(\theta, \alpha).$$

Пусть $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}$. Тогда

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})\theta + \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} - A(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})), \tag{2.4}$$

$$\Lambda'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha})\theta + \boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} -$$

$$A'_{(1)}(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha}))\lambda'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) - A'_{(2)}(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha}))\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}).$$

В силу (2.3) отсюда получаем

$$\Lambda'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}). \tag{2.5}$$

Аналогично находим

$$\Lambda'_{(2)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \tag{2.6}$$

так что

$$\Lambda'(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := (\Lambda'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \Lambda'_{(2)}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) = (\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})). \tag{2.7}$$

Если τ и $\boldsymbol{\zeta}$ независимы, то

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = A^{(\tau)}(\lambda) + A^{(\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{\mu}),$$

где

$$A^{(\tau)}(\lambda) := \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau}, \quad A^{(\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{\mu}) := \ln \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}.$$

Поэтому в этом случае $A'_{(1)}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не зависит от $\boldsymbol{\mu}$, $A'_{(2)}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не зависит от λ, области $(\mathcal{A})$ и $\mathcal{L}$ прямоугольны.

2.2. **Вторая функция уклонений.** Наряду с функцией уклонений (первой) $\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ нам понадобится *вторая функция уклонений* $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, определяемая соотношением (см., например, [3],[4])

$$D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right).$$

Она возникает естественным образом при изучении асимптотики меры восстановления, соответствующей случайному блужданию $\{T_n, \mathbf{Z}_n\}$, и играет определяюшую роль при ее описании (см. теорему 4.1 ниже). Свойства функции $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ изучены весьма полно (см., например, [8], §2.9; [14]; [11], [3],[4]). Она *выпукла, полуаддитивна, линейна вдоль любого луча, исходящего из* 0. Чтобы функция $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ лучше соответствовала названию "функция уклонений" ее немного следует "подправить", доопределив на границе множества

$$\mathcal{D}^{<\infty} := \{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) : \ D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) < \infty\} \tag{2.8}$$

конечности функции D_Λ по полунепрерывности снизу (функция уклонений в п.б.у. с необходимостью полунепрерывна снизу (см., например, [8], §2.9)). Этот подправленный вариант обозначается через (см., например, [3],[4])

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\theta', \boldsymbol{\alpha}') \in (\theta, \boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta', \boldsymbol{\alpha}'),$$

где $(\theta, \boldsymbol{\alpha})_\varepsilon := \{(\theta', \boldsymbol{\alpha}') : \ |\theta' - \theta| + |\boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}| < \varepsilon\}$—$\varepsilon$-окрестность точки $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

В [8], §2.9, (см. также [14], [10], [11]) установлено следующее утверждение:

Функция $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ допускает представление

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\} = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \partial\mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}. \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{A}^{\le 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\},$$

∂B — *граница* B.

Представление (2.9) позволяет найти еще одну весьма важную характеризацию функции $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$. Отметим предварительно, что в силу линейчатости функции D при $\theta > 0$ выполняется равенство

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \theta D\left(1, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right) \tag{2.10}$$

и, стало быть, функция двух переменных $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ полностью определяется значениями функции одной переменной

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := D(1, \boldsymbol{\alpha}). \tag{2.11}$$

Кроме того, именно в терминах функции $D(\boldsymbol{\alpha})$ будут сформулированы основные результаты настоящей работы. В силу (2.9)

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \partial \mathcal{A}^{\le 0}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} + \lambda\}. \tag{2.12}$$

Для описания границы $\partial \mathcal{A}^{\le 0}$ рассмотрим сечение $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\mu}}$ множества $\mathcal{A}$ на уровне $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\mu}} := \{\lambda : \ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}\}.$$

При любом $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ определены значения

$$A(\boldsymbol{\mu}) := \inf\{\lambda : \ A(-\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\} = -\sup\{\lambda : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\}, \tag{2.13}$$

$$A^{\infty}(\boldsymbol{\mu}) := \inf\{\lambda : \ A(-\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\} = -\sup\{\lambda : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\},$$

считая по определению

$$\inf\{\lambda : \ \lambda \in \emptyset\} = \infty, \quad \sup\{\lambda : \ \lambda \in \emptyset\} = -\infty.$$

Очевидно,

$$(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in \partial \mathcal{A}^{\le 0}, \quad (-A^{\infty}(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in \partial \mathcal{A},$$

т.е. кривая $\lambda = -A(\boldsymbol{\mu})$ в $\mathbb{R}^{d+1}$ есть параметрическое задание границы $\partial \mathcal{A}^{\le 0}$, а кривая $\lambda = -A^{\infty}(\boldsymbol{\mu})$— параметрическое задание границы множества $\mathcal{A}$.

Соотношение (2.12) можно записать в виде

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\alpha - A(\boldsymbol{\mu})\}. \tag{2.14}$$

Это означает, что функция $D(\boldsymbol{\alpha})$ *есть преобразование Лежандра над функцией* $A(\boldsymbol{\mu})$.

2.3. **Базовая функция $A(\boldsymbol{\mu})$ и ее свойства.** Как уже отмечалось, функция $D(\boldsymbol{\alpha})$ выпукла и полунепрерывна снизу (см., например, лемму 1.1 в [11]). Так как в силу леммы 1.1 в [11] функция $A(\boldsymbol{\mu})$ тоже выпукла и полунепрерывна снизу (это нетрудно установить и непосредственно, с помощью (2.13)), то в силу (2.14)

$$A(\boldsymbol{\mu}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D(\boldsymbol{\alpha})\}.$$

Функция $A(\boldsymbol{\mu})$ обладает и многими другими свойствами логарифма преобразования Лапласа над распределением некоторого случайного вектора. В [3],[4] показано для одномерного случая $d = 1$, что $A(0) = 0$, $A(\mu) \to \infty$ при $|\mu| \to \infty$, если случайная величина ζ разнозначна (так что $D(0) = \sup\{-A(\mu)\} < \infty$), то для однородного о.п.в. $Z(t)$

$$A'(0) = a := \frac{a_\zeta}{a_\tau} \sim \mathbf{E}\frac{Z(t)}{t}, \tag{2.15}$$

$$A''(0) = \sigma^2 := \frac{1}{a_\tau}\mathbf{D}(\zeta - a\tau) \sim \mathbf{E}\frac{Z(t)}{t} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.16}$$

Аналоги соотношений (2.15), (2.16) справедливы и в общем случае $d \geq 1$ и сохраняются в неоднородном случае при выполнении условий "допустимой неоднородности".

Как показано в [11] (в одномерном случае в [3],[4]), в широких предположениях в однородном случае (и в неоднородном случае при выполнении некоторых условий "допустимой неоднородности") справедливо соотношение

$$A(\boldsymbol{\mu}) \sim \frac{1}{t}\ln \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}(t)} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.17}$$

Таким образом функция $A(\boldsymbol{\mu})$ играет по отношению к о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ ту же роль, какую играет логарифм преобразования Лапласа над распределением случайного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ по отношению к соответствующему случайному блужданию $(n,\ \mathbf{Z}_n)$ (для случайных блужданий соотношения (2.15)—(2.17) имеют вид *точных* равенств, а не асимптотических). Чтобы подчеркнуть эту роль функции $A(\boldsymbol{\mu})$ в работах [3],[4] предложено назвать ее *базовой функцией* для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$.

Очевидно, что всегда $A^\infty(\boldsymbol{\mu}) \leq A(\boldsymbol{\mu})$. Так как $(0, \mathbf{0}) \in (\mathcal{A})$, $A(0, \mathbf{0}) = 0$, $A(\mathbf{0}) = 0$, то в окрестности точки $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ всегда $A^\infty(\boldsymbol{\mu}) < A(\boldsymbol{\mu})$. Обозначим

$$\mathfrak{M} := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d :\ (-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A})\}.$$

Это открытое (но не обязательно односвязное) подмножество $\mathbb{R}^d$, содержащее точку $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Для любого $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathfrak{M}$ выполняется $A^\infty(\boldsymbol{\mu}_0) < A(\boldsymbol{\mu}_0)$ и при этом

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\mu}_0) = 0.$$

Поскольку при этом

$$A'_{(1)}(\lambda, \boldsymbol{\mu}_0)|_{\lambda = -A(\boldsymbol{\mu}_0)} = \frac{\mathbf{E}e^{-A(\boldsymbol{\mu}_0)\tau + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\zeta}}\tau}{\mathbf{E}e^{-A(\boldsymbol{\mu}_0)\tau + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\zeta}}} > 0,$$

то по теореме о неявной функции функция $A(\boldsymbol{\mu})$ аналитична в точке $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ (см. пояснение к доказательству этого факта в доказательстве леммы 2.1 ниже).

Множество $\mathfrak{M}$ будем называть *зоной аналитичности функции* $A(\boldsymbol{\mu})$.

Основное отличие базовой функции $A(\boldsymbol{\mu})$ от логарифма преобразования Лапласа состоит в том, что при $\boldsymbol{\mu} \notin \mathfrak{M}$ функция $A(\boldsymbol{\mu})$ может быть конечной, но не аналитической. В лемме 2.1 (см. ниже) установлено, что в зоне аналитичности $\mathfrak{M}$ функция $A(\boldsymbol{\mu})$ строго выпукла, т.е. матрица $A''(\boldsymbol{\mu})$ вторых производных функции $A(\boldsymbol{\mu})$ при $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ положительно определена (и найдена в явном виде).

Для $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ через $(\tau(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}))$ обозначим случайный вектор в $\mathbb{R}^{d+1}$ с распределением

$$\mathbf{P}((\tau(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu})) \in \cdot) := \frac{\mathbf{E}(e^{-A(\boldsymbol{\mu})\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ (\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \cdot)}{\mathbf{E}e^{-A(\boldsymbol{\mu})\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}} = \mathbf{E}(e^{-A(\boldsymbol{\mu})\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ (\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \cdot). \tag{2.18}$$

Пояснение: последнее равенство в (2.18) следует из тождества

$$\mathbf{E}e^{-A(\boldsymbol{\mu})\tau+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}} = e^{A(-A(\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})} = 1,$$

верного при $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$.

Обозначим для $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}) := \frac{\mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu})}}{a_{\tau(\boldsymbol{\mu})}}, \quad \mathbf{a}_{\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu})} := \mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}), \quad a_{\tau(\boldsymbol{\mu})} := \mathbf{E}\tau(\boldsymbol{\mu}),$$

так что

$$(\tau(\mathbf{0}), \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{0})) \stackrel{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta}), \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{0}).$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathfrak{M}$. *Тогда*

(i). *Случайный вектор* $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$ *невырожден в* $\mathbb{R}^{d+1}$*;*

(ii). *Случайный вектор*

$$\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0) := \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_0)\tau(\boldsymbol{\mu}_0)$$

невырожден в $\mathbb{R}^d$*;*

(iii). *Функция* $A(\boldsymbol{\mu})$ *аналитична в точке* $\boldsymbol{\mu}_0$ *и матрица вторых производных* $A''(\boldsymbol{\mu})$ *при* $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ *имеет вид*

$$A''(\boldsymbol{\mu}_0) = \frac{1}{a_{\tau(\boldsymbol{\mu}_0)}} B^2_{\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)}, \tag{2.19}$$

где $B^2_{\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)}$ *—ковариационная матрица случайного вектора* $\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)$ *(см. (6.1)).*

Доказательство леммы 2.1 мы поместили ниже, в разделе 6.2.

Продолжим изучение базовой функции $A(\boldsymbol{\mu})$. Пусть $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$—точка, в которой достигается sup (точная верхняя грань) в (2.14), если такая единственная точка имеется. Если $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{M}$, то функция $A(\boldsymbol{\mu})$ аналитична в точке $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$, значение $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ есть решение уравнения (системы уравнений)

$$A'(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha}. \tag{2.20}$$

Так как матрица $A''(\boldsymbol{\mu})$ положительно определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$, то единственное решение этого уравнения

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) = (A')^{(-1)}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.21}$$

является обратной вектор-функцией к вектор-функции $A'(\mu)$. Пусть

$$\mathfrak{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{M}\}.$$

Тогда в открытом множестве $\mathfrak{A}$ (оно не всегда односвязно) вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ будет, очевидно, аналитической, и выполнено

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{2.22}$$

Дифференцируя (2.22) и используя (2.20), получаем для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$

$$D'(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Стало быть, отсюда следует, что функция $D(\boldsymbol{\alpha})$ также аналитична в $\mathfrak{A}$.

Из сказанного и (2.10), (2.11) получаем, что функция $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ конечна в конусе (ср. с (2.8))

$$\mathcal{D}^{<\infty} = \Big\{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) : \ D\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) < \infty, \quad \theta > 0\Big\},$$

и аналитична в конусе

$$\mathcal{D} := \Big\{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) : \ \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} \in \mathfrak{A}, \quad \theta > 0\Big\}. \tag{2.23}$$

Если положить

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}) := -A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})), \tag{2.24}$$

то из (2.21), (2.22) получаем, что при $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}), \quad A(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) = 0, \quad (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A}), \tag{2.25}$$

т.е. точка $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ при движении $\boldsymbol{\alpha}$ по открытому множеству $\mathfrak{A}$ движется по "регулярной" части $\partial\mathcal{A}^{\leq 0} \cap (\mathcal{A})$ границы $\partial\mathcal{A}^{\leq 0}$, проходя при этом через точку $(0, \mathbf{0})$ при $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}$. Пара $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ определяет наряду с $(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ еще одно параметрическое задание регулярной части границы множества $\mathcal{A}^{\leq 0}$.

В силу (2.10), (2.22) для $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\mathbf{D}'_{(1)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = D\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} D'\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) =$$

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) - A\Big(\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big) - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) = -A\Big(\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big) = \lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big), \tag{2.26}$$

$$\mathbf{D}'_{(2)}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = D'\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) = \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big). \tag{2.27}$$

Асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]) \tag{2.28}$$

(см. (1.1)) в настоящей работе будет изучаться в зоне нормированных уклонений

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t} \in \mathfrak{A}, \tag{2.29}$$

и эту зону, по аналогии с областями аналитичности, возникающими в классических предельных теоремах для случайных блужданий, естественно назвать *крамеровской зоной.* Однако в отличие от названных классических теорем, асимптотику (2.28) не всегда возможно получить во всей зоне (2.29). В ряде случаев ее приходится сужать. Если $\lambda_+ > D(\mathbf{0})$, где

$$\lambda_+ = \sup\{\lambda : \ A^{(\tau)}(\lambda) < \infty\},$$

то сужение не требуется.

Рассмотрим случай $\lambda_+ \leq D(\mathbf{0})$. В этом случае запретной частью зоны $\mathfrak{A}$ будет замкнутое множество

$$\mathfrak{B} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ \lambda(\boldsymbol{\alpha}) \geq \lambda_+\}.$$

Таким образом, в части I (т.е. в настоящей работе) будет получена интегро-локальная предельная теорема для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ при $t \to \infty$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]) \sim ?,$$

в регулярной зоне уклонений

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t} \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}.$$

В части II при некоторых дополнительных условиях эта задача будет решена во внутренности нерегулярной зоны уклонений $\mathfrak{B}$:

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t} \in (\mathfrak{B}),$$

которая иным способом будет определена в части II.

Для формулирования и доказательства основного результата части I нам необходимы дополнительные обозначения. При $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ положим для краткости (см. (2.26), (2.27))

(2.30)

$$(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) := \Big(\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big) = D'(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \Big(-A\Big(\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big), \quad (\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) := A'(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}),$$

так что векторы

$$(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = (\widehat{\lambda}(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) = \Big(\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big),$$

$$(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) = (\widehat{\theta}(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\theta, \boldsymbol{\alpha})) = A'\Big(\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big)$$

суть функции от одной переменной $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}$. Заметим, что при $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{D}$ справедливо (см. (2.10), (2.25))

(2.31)

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \theta D\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) = \theta\Big(\lambda(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big) + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)\Big) = \theta\widehat{\lambda} + \boldsymbol{\alpha}\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \quad A(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = 0, \quad (\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) \in (\mathcal{A}).$$

Ниже будет установлено (см. лемму 2.2), что для $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{D}$ минимум по $r \in (0, \infty)$ функции

$$L(r) = L_{\theta, \boldsymbol{\alpha}}(r) := r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right) \tag{2.32}$$

достигается в единственной точке

$$r_{\theta, \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}},$$

и при этом выполняется

$$(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{1}{r_{\theta, \boldsymbol{\alpha}}}(\theta, \boldsymbol{\alpha}),$$

где функции $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ определены в (2.30).

Обозначим

$$C(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sqrt{\frac{\widehat{\theta}^d \left|\Lambda''\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right|}{(2\pi\theta)^d Q\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)}}, \quad Q\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right) := \left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\Lambda''\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)^T, \tag{2.33}$$

где верхний индекс ^{T} означает транспонирование, так что

$$\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\Lambda''\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)^T := \widehat{\theta}^2\Lambda''_{(1)}\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right) + 2\widehat{\theta}\Lambda''_{(1,2)}\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^T + \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\Lambda''_{(2)}\left(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^T.$$

Нам понадобится

Лемма 2.2. *Пусть $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{D}$, векторы $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$, $(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})$ определены в (2.30). Тогда:*

I. Минимум функции (см. (2.32))

$$L(r) = L_{\theta, \boldsymbol{\alpha}}(r) = r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)$$

достигается в единственной точке

$$r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}}, \tag{2.34}$$

и при этом выполняется векторное тождество

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}\widehat{\theta}}{\theta}.$$

Таким образом, наряду с определением вектора $(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})$*, данного в (2.30), имеет место следующее представление*

$$(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{1}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}(\theta, \boldsymbol{\alpha}).$$

Для функций $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ *справедливо представление*

$$\widehat{\lambda} = \lambda\left(\frac{\theta}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}\right), \quad \widehat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}\left(\frac{\theta}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}\right), \tag{2.35}$$

где функции $\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$
являются решением системы (2.3). При этом

$$L(r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}) = D(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad L'(r)\Big|_{r=r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}} = 0, \tag{2.36}$$

$$L''(r)\Big|_{r=r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{1}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}} Q(\widehat{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) > 0. \tag{2.37}$$

II. Для заданного $\varepsilon > 0$ *найдется* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что*

$$\min_{|r - r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}| \geq \varepsilon} L(r) \geq L(r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}) + \varepsilon_1.$$

В одномерном случае $d = 1$ лемма 2.2 доказана в [3],[4], и приведенное ниже доказательство в значительной степени повторяет доказательство для одномерного случая.

Доказательство леммы 2.2. Разобьем доказательство на несколько этапов.

1. Функция уклонений $\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ выпукла (см., например, [7], Гл. 9): для любых $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, $(\theta_1, \boldsymbol{\alpha}_1)$, $(\theta_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \in \mathbb{R}^{1+d}$ выполняется

$$p\Lambda(\theta_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + q\Lambda(\theta_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \geq \Lambda(p\theta_1 + q\theta_2, p\boldsymbol{\alpha}_1 + q\boldsymbol{\alpha}_2).$$

Отсюда вытекает выпуклость в области $(0, \infty)$ функции $L(r)$: для любых $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, справедливо

$$pL(r_1) + qL(r_2) \geq L(pr_1 + qr_2).$$

2. Полагая $(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r) := \frac{1}{r}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ и дифференцируя функцию $L(r)$, получаем

$$L'(r) = \Lambda(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r) - \Lambda'_{(1)}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\theta_r - \Lambda'_{(2)}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

Привлекая (2.7), (2.4), находим

$$L'(r) = \Lambda(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r) - \lambda(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\theta_r - \boldsymbol{\mu}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{\alpha}_r = -A(\lambda(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{\mu}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)). \tag{2.38}$$

3. Дифференцируя функцию $L'(r)$ в представлении (2.38), получаем

$$L''(r) = -A'_{(1)}(\lambda(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{\mu}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r))\left[\lambda'_{(1)}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\left(-\frac{\theta}{r^2}\right) + \lambda'_{(2)}(\theta_r, \boldsymbol{\alpha}_r)\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r^2}\right)\right] -$$

$$A'_{(2)}(\lambda(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r))\left[\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\left(-\frac{\theta}{r^2}\right)+\boldsymbol{\mu}'_{(2)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r^2}\right)\right].$$

Поскольку в силу (2.7)

$$\lambda'_{(1)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)=\Lambda''_{(1)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),\quad \lambda'_{(2)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)=\Lambda''_{(1,2)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),$$

$$\boldsymbol{\mu}'_{(1)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)=\Lambda''_{(2,1)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),\quad \boldsymbol{\mu}'_{(2)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)=\Lambda''_{(2)}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),$$

и, в силу (2.3),

$$A'_{(1)}(\lambda(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r))=\theta_r,\quad A'_{(2)}(\lambda(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{\mu}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r))=\boldsymbol{\alpha}_r,$$

то

$$L''(r)=\frac{1}{r}(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\Lambda''(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)^T>0, \tag{2.39}$$

где матрица $\Lambda''(\theta_r,\boldsymbol{\alpha}_r)$ положительно определена (см., например, [8], § 1.2).

4. Из утверждений 1-3 вытекает следующее: *если число $\rho>0$ таково, что для вектора $(\theta_\rho,\boldsymbol{\alpha}_\rho):=\frac{1}{\rho}(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ выполняются два условия:*

$$A(\lambda(\theta_\rho,\boldsymbol{\alpha}_\rho),\boldsymbol{\mu}(\theta_\rho,\boldsymbol{\alpha}_\rho))=0,\qquad (\theta_\rho,\boldsymbol{\alpha}_\rho)\in\mathcal{L}, \tag{2.40}$$

то точка $r=\rho$ является единственным на полуоси $(0,\infty)$ значением, где достигается минимум функции $L(r)$, т.е.

$$L(\rho)=\inf_{r>0}L(r),\quad L(r)>L(\rho)\quad \textit{при}\quad r>0,\quad r\neq\rho.$$

5. Убедимся, что число

$$\rho:=\frac{\theta}{A'_{(1)}(\widehat{\lambda},\widehat{\boldsymbol{\mu}})}, \tag{2.41}$$

где, как и прежде, $(\widehat{\lambda},\widehat{\boldsymbol{\mu}})=(\lambda(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}),\boldsymbol{\mu}(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}))$ (см. (2.30)), удовлетворяет обоим условиям (2.40). Для этого, продифференцируем по $\boldsymbol{t}\in\mathfrak{A}$ каждое из двух равенств (см. (2.25), (2.24)):

$$A(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))=0,\quad -A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))=\lambda(\boldsymbol{t}).$$

Получим два векторных равенства

$$A'_{(1)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\lambda'(\boldsymbol{t})+A'_{(2)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t})=0,\quad -A'(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t})=\lambda'(\boldsymbol{t}).$$

Исключив (с помощью второго равенства) из первого равенства вектор-функцию $\lambda'(\boldsymbol{t})$, получим тождество

$$A'_{(1)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))A'(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t})=A'_{(2)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t}). \tag{2.42}$$

В силу (2.20) для $\boldsymbol{t}\in\mathfrak{A}$ имеем

$$A'(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))=\boldsymbol{t}.$$

Дифференцируя последнее равенство по $\boldsymbol{t}$, получаем матричные равенства

$$\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t})A''(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))=A''(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{t})=I, \tag{2.43}$$

где I—единичная матрица порядка d, матрица $A''(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))$ в силу леммы 2.1 положительно определена. Поэтому, умножая левую и правую части (2.42) справа на матрицу $A''(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))$, получаем в силу (2.43) тождество

$$A'_{(1)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))A'(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}))=A'_{(2)}(\lambda(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t})).$$

Подставляя в это тождество $\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} \in \mathfrak{A}$, и используя обозначение $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = (\lambda(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}), \boldsymbol{\mu}(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}))$, получаем

$$A'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})A'(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) = A'_{(2)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}).$$

Воспользовавшись далее равенством $A'(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}$ (см. (2.20)), получаем (с учетом (2.41))

$$(A'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}), A'_{(2)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})) = (\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho). \tag{2.44}$$

Поскольку $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) \in (\mathcal{A})$ (см. (2.31)), то из (2.44) вытекает, что

$$(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho) \in \mathcal{L}. \tag{2.45}$$

Мы убедились, что для числа ρ, определенного формулой (2.41), второе условие в (2.40) выполнено.

Обращаясь к системе (2.3), находим при $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = (\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho)$

$$(A'_{(1)}(\lambda(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho), \boldsymbol{\mu}(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho)), A'_{(2)}(\lambda(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho), \boldsymbol{\mu}(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho)) = (\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho) \in \mathcal{L}. \tag{2.46}$$

Как уже отмечалось, система (2.3) при $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}$ имет единственное решение $(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha}))$ (см., например, [13], Гл. 1). Поэтому, сравнивая тождества (2.44), (2.46), приходим к выводу, что

$$(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = (\lambda(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho), \boldsymbol{\mu}(\theta_\rho, \boldsymbol{\alpha}_\rho)). \tag{2.47}$$

Поскольку

$$A(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = 0$$

(см. (2.31)), то мы убедились, что для числа ρ, определенного формулой (2.41), первое условие в (2.40) тоже выполнено. Остается заметить, что в силу (2.30) справедливо $\widehat{\theta} = A'_{(1)}(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$, т.е. равенства (2.34), (2.41) эквивалентны. Из (2.47) вытекает равенство (2.35). Подставляя далее $r = r_{\theta, \boldsymbol{\alpha}}$ в равенства (2.38) и (2.39), используя при этом (2.35) и утверждение шага 4 доказываемой леммы, получаем доказательства равенств (2.36) и (2.37). Утверждение I доказываемой леммы установлено.

6. Утверждение II вытекает из утверждения I. Лемма 2.2 доказана. $\square$

3. Интегро-локальная предельная теорема для первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ в регулярной зоне уклонений

Наряду с уже названными в начале раздела 1 моментными и структурными условиями мы будем предполагать, что нормированное уклонение $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{x}}{T}$ принадлежит некоторому компакту

$$K \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}. \tag{3.1}$$

Через $\mathcal{A}_K$ обозначим компакт (аналитическая часть поверхности $\partial \mathcal{A}^{\le 0}$ в $\mathbb{R}^{d+1}$):

$$\mathcal{A}_K := \{(\lambda(\boldsymbol{\alpha}'), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}')) \colon \ \boldsymbol{\alpha}' \in K\}.$$

Напомним, что множество $\mathcal{A}_1$ состоит из точек $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$, в которых конечно преобразование Лапласа $\mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1}$ над распределением с.в. $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ (см. (2.1)), $(\mathcal{A}_1)$—внутренность $\mathcal{A}_1$.

Сформулируем теперь основное утверждение части I работы.

Теорема 3.1. *Пусть $\boldsymbol{\alpha} \in K$ и выполнено условие "допустимой неоднородности":*

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1).$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]) = \mathbf{I}_{\mathbf{0}\in\Delta[\mathbf{x}]}\mathbf{P}(\tau_1 \geq t)+$$

$$\frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1 C(\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}I_Z(\boldsymbol{\alpha})(1+o(1)) + O(e^{-t(D(\boldsymbol{\alpha})+\varepsilon)}), \tag{3.2}$$

где $\psi_1 = \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$,

$$I_Z(\boldsymbol{\alpha}) := \int_0^\infty e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y}\mathbf{P}(\tau > y)dy, \qquad C(\boldsymbol{\alpha}) := C(1, \boldsymbol{\alpha}),$$

$C(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ есть положительная непрерывная в конусе $\mathcal{D}$ функция, определенная в (2.33), $\Delta = \Delta_t$ сходится к 0 достаточно медленно при $t \to \infty$, остаточные члены $o(1)$ и $O(\cdot)$ равномерны по $\boldsymbol{\alpha} \in K$.

4. Интегро-локальная теоремы для функции (меры) восстановления

В настоящем разделе мы изучаем функцию (меру) восстановления

$$H(B) := \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}((T_n, \mathbf{Z}_n) \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

отвечающую случайному блужданию

$$(T_0, \mathbf{Z}_0), (T_1, \mathbf{Z}_1), (T_2, \mathbf{Z}_2), \cdots,$$

по которому строятся первый и второй о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$. Мы приведем формулировку интегро-локальной теоремы для функции восстановления $H(B)$, доказанной в работах [3],[4] (адаптировав ее к обозначениям настоящей работы). Эта теорема понадобится во всех без исключения частях настоящей работы.

Для того, чтобы различать однородный и неоднородный ($(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \overset{D}{\neq} (\tau, \boldsymbol{\zeta})$) случаи, мы будем меру восстановления в неоднородном случае обозначать через $H_1(B)$. Обозначим для $(u, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\delta[u) := [u, u+\delta), \quad \Delta[\mathbf{x}) := [x_{(1)}, x_{(1)} + \Delta) \times \cdots \times [x_{(d)}, x_{(d)} + \Delta)$$

полуинтервал шириной δ с вершиной u и куб в $\mathbb{R}^d$ с ребром Δ с вершиной $\mathbf{x}$, соответственно, и положим

$$B = B_{u,x} := \delta[u) \times \Delta[\mathbf{x}). \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение параметр t, характеризующий вместе с точкой $(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ удаление параллепипида $B_{u,\mathbf{x}}$ от начала координат: $(u, \mathbf{x}) = (t\theta, t\boldsymbol{\alpha})$. Мы будем предполагать, что точка $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{t}(u, \mathbf{x})$ принадлежит некоторому компакту $\mathbf{K}_{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, отделенному от точки $(0, \mathbf{0})$ и вложенному в открытый конус $\mathcal{D}$ аналитичности функции $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ (см. (2.23)).

Теорема 4.1. *Пусть $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ и выполнены условия "допустимой неоднородности":*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{K}} \subset \mathcal{A}_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{K}} := \Big\{(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = (\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\Big)) : \ (\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}\Big\}. \tag{4.2}$$

Тогда для $\delta = \delta_t \to 0$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$ имеет место соотношение

$$H_1(B_{u,x}) = \frac{\delta\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})C(\theta, \boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}(1 + o(1)), \tag{4.3}$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}$.

Сделаем пояснение к формуле (4.3). В однородном случае (когда $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \overset{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\mu})$) множитель $\psi_1(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$ в правой части (4.3) равен $\psi(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$; поскольку для всех достаточно больших t аргумент $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$ лежит в $\partial\mathcal{A}^{\leq 0} \cap (\mathcal{A})$, то $\psi_1(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = \psi(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = 1$. Таким образом, "вся специфика неоднородности" сосредоточена в множителе $\psi_1(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$.

Теорема 4.1 доказана в [3],[4] (см. теорему 4.1) для случая $d = 1$ и при дополнительном предположении выполнения условия $[\mathbf{C}_0]$ для с.в. $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$. Ниже мы приведем доказательство теоремы 4.1 в случае произвольной размерности $d \geq 1$, которое близко в некоторых частях доказательству для одномерного случая $d = 1$, но не использует условие $[\mathbf{C}_0]$ для с.в. $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$.

Исходным утверждением для доказательства теоремы 4.1 является интегро-локальная теорема для сумм $(T_n, \mathbf{Z}_n)$ при $n \to \infty$. Приведем формулировку этой теоремы.

Напомним прежде, что наряду с функциями $\lambda(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ одной переменной $\boldsymbol{\alpha}$ (см. (2.21), (2.24)) в (2.5), (2.6) определены функции $\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ двух переменных $\theta, \boldsymbol{\alpha}$ как производные функции уклонений $\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$; ранее пара функций $(\lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\theta, \boldsymbol{\alpha}))$ была определена как единственное решение системы (2.3). Последние будут использоваться в следующей интегро-локальной теореме, вытекающей из теоремы 2.8.2 в [8].

Теорема 4.2. *Пусть фиксирован некоторый компакт $\mathbf{K}_\Lambda$ из области аналитичности $\mathcal{L}$ функции $\Lambda(\gamma, \boldsymbol{\beta})$, точки u и $\mathbf{x}$ таковы, что $(\gamma, \boldsymbol{\beta}) := (\frac{u}{n}, \frac{\mathbf{x}}{n}) \in \mathbf{K}_\Lambda$, и при этом $(\lambda(\gamma, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\mu}(\gamma, \boldsymbol{\beta})) \in (\mathcal{A}_1)$. Тогда для $\delta = \delta_n \to 0$, $\Delta = \Delta_n \to 0$ достаточно медленно при $n \to \infty$ выполняется*

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[u), \quad \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x})) = \frac{\delta\Delta^d}{n^{\frac{d+1}{2}}}\frac{\psi_1}{\psi}C_1(\gamma, \boldsymbol{\beta})e^{-n\Lambda(\gamma,\boldsymbol{\beta})}(1 + o(1)), \tag{4.4}$$

где ψ_1, ψ суть, соответственно, значения функций $\psi_1(\cdot,\cdot)$, $\psi(\cdot,\cdot)$ в точке $(\lambda(\gamma, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\mu}(\gamma, \boldsymbol{\beta}))$,

$$C_1(\gamma, \boldsymbol{\beta}) := \sqrt{\frac{|\Lambda''(\gamma, \boldsymbol{\beta})|}{(2\pi)^{d+1}}},$$

остаточный член $o(1)$ равномерен по $(\gamma, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{K}_\Lambda$.

Ниже с помощью представленя (4.4) будет найдена асимптотика меры восстановления $H_1(B_{u,\mathbf{x}})$ для удаляющихся множеств $B_{u,\mathbf{x}}$ (см. (4.1)), т.е. асимптотика суммы вероятностей (4.4). Тем самым будет выполнено

Доказательство теоремы 4.1. Чтобы несколько упростить изложение, мы будем предполагать при доказательстве теоремы 4.1, не ограничивая по существу общность, что вместо условия $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ (т.е. условия теоремы 4.1) имеет место сходимость

$$(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \left(\frac{u}{t}, \frac{\mathbf{x}}{t}\right) \to \left(\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{4.5}$$

где $(\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0)$—любая фиксированная точка из $\mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ (т.е. из $\mathcal{D} = (\mathcal{D})$). При этом условие допустимой неоднородности (4.2) можно записать в форме

$$\Big(\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{\theta^0}\Big), \boldsymbol{\mu}\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{\theta^0}\Big)\Big) \in (\mathcal{A}_1). \tag{4.6}$$

Если мы докажем соотношение (4.3) для $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \to (\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0) \in \mathcal{D}$, то из него путем стандартных рассуждений (связанных с существованием в $\mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ сходящихся подпоследовательностей) можно установить, что остаточный член $o(1)$ в (4.3) будет равномерным по $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K}_{\mathcal{D}}$.

Доказательство проведем в два этапа. На этапе I докажем теорему 4.1 в однородном случае. На этапе II осуществим переход к неоднородному случаю.

I. Напомним, что меру восстановления для однородного случая, когда $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \overset{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\xi}$, мы обозначаем через $H(B)$, $\mathbf{P}\,(T_0 \in \delta[u), \mathbf{Z}_0 \in \Delta[\mathbf{x})\,) = 0$ (см. (4.1)) так что

$$H(B_{u,\mathbf{x}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_n \in \delta[u),\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x})) \tag{4.7}$$

при $\boldsymbol{\xi}_1 \overset{d}{=} \boldsymbol{\xi}$. Ряд в правой части (4.7) разобьем на три суммы

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_1}, \quad \sum_{n\in\mathcal{N}_2}, \quad \sum_{n\in\mathcal{N}_3},$$

соответственно, по областям

$$\mathcal{N}_1 := \{1 \le n < c_1 t\}, \quad \mathcal{N}_2 := \{c_1 t \le n \le c_2 t\}, \quad \mathcal{N}_3 := \{n > c_2 t\},$$

где $c_1 := r_{\theta^0,\boldsymbol{\alpha}^0} - b$, $c_2 := r_{\theta^0,\boldsymbol{\alpha}^0} + b$. Убедимся, что если разность $c_2 - c_1 = 2b$ достаточно мала, то найдется компакт $\mathbf{K}_\Lambda \subset \mathcal{L}$ такой, что для всех достаточно больших t при $n \in \mathcal{N}_2$, $r := \frac{n}{t}$ выполняется

$$(\gamma, \boldsymbol{\beta}) := \Big(\frac{u}{n}, \frac{\mathbf{x}}{n}\Big) = \Big(\frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\Big) \in \mathbf{K}_\Lambda. \tag{4.8}$$

Действительно, поскольку $(\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0) \in \mathcal{D}$, то выполняется

$$(\gamma_0, \boldsymbol{\beta}_0) := \Big(\frac{\theta^0}{r_{\theta^0,\boldsymbol{\alpha}^0}}, \frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{r_{\theta^0,\boldsymbol{\alpha}^0}}\Big) \in \mathcal{L}$$

(см. (2.45) в доказательстве леммы 2.2). Следовательно, найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что компакт

$$\mathbf{K}_\Lambda := \{(y, \mathbf{z}) :\ |(y, \mathbf{z}) - (\gamma_0, \boldsymbol{\beta}_0)| \le \varepsilon_1\}$$

целиком лежит в области $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{K}_\Lambda \subset \mathcal{L}.$$

Поскольку $(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \to (\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0)$ при $t \to \infty$ (см. (4.5)), и функция $r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}$ аналитична в некоторой окрестности точки $(\theta^0, \boldsymbol{\alpha}^0)$, то найдутся $t_0 < \infty$ и $b > 0$ такие, что при всех $t \ge t_0$ и $n \in \mathcal{N}_2$ выполняется

$$|(\gamma, \boldsymbol{\beta}) - (\gamma_0, \boldsymbol{\beta}_0)| \le \varepsilon_1$$

(напомним, что константа $b > 0$ участвует в определении $\mathcal{N}_2$). Следовательно, (4.8) имеет место.

Соотношение (4.8) позволяет воспользоваться теоремой 4.2. При $r := \frac{n}{t} \in [c_1, c_2]$ и $\psi_1 = \psi$ получаем

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \delta\Delta^d \sum_{n\in\mathcal{N}_2} \frac{C_1(\gamma,\boldsymbol{\beta})}{t^{\frac{d+1}{2}} r^{\frac{d+1}{2}}} e^{-n\Lambda(\gamma,\boldsymbol{\beta})}(1+o(1)) =$$

$$\delta\Delta^d \sum_{n:\ r\in[c_1,c_2]} \frac{C_1(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r})}{t^{\frac{d+1}{2}} r^{\frac{d+1}{2}}} e^{-tr\Lambda(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r})}(1+o(1)).$$

Так как изменение функции $r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right) = L(r)$ в окрестности точки $r = r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}} \in [c_1, c_2]$ на интервале длины $O(\frac{1}{t})$ есть $o(\frac{1}{t})$, то

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \frac{\delta\Delta^d}{t^{\frac{d-1}{2}}} \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{r^{\frac{d+1}{2}}} C_1\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right) e^{-tL(r)} dr(1+o(1)). \tag{4.9}$$

Воспользуемся равенством $L(r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}) = D(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ (см. первую формулу в (2.36)) и известным методом Лапласа подсчета интегралов вида (4.9). Получим, при $\left(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right) = \left(\frac{\theta}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}}\right)$, равенство

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_2} = \frac{\delta\Delta^d}{t^{\frac{d-1}{2}}} \frac{C_1(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})\sqrt{2\pi}}{\sqrt{tL''(r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}})} r_{\theta,\boldsymbol{\alpha}}^{\frac{d+1}{2}}} e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}(1+o(1)).$$

В силу леммы 2.2 (см. (2.37)) правая часть этого равенства совпадает с правой частью (4.3) при $\psi_1 = \psi$.

Оценим теперь $\sum_{n\in\mathcal{N}_1}$ и $\sum_{n\in\mathcal{N}_3}$. В силу многомерного экспоненциального неравенства чебышевского типа (см. теорему 1.3.2 в [8])

$$\mathbf{P}\left(T_n \in \delta[u),\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x})\right) \le \exp\left\{-t\inf\left\{r\Lambda\Big(\frac{\theta'}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{r}\Big) : (r,\theta',\boldsymbol{\alpha}') \in W(\theta,\boldsymbol{\alpha})\right\}\right\},$$

где

$$W(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \Big\{(r,\theta',\boldsymbol{\alpha}') \,:\, r>0,\ \theta\le\theta'\le\theta+\delta/t,\ \alpha_{(i)}\le\alpha'_{(i)}\le\alpha_{(i)}+\Delta/t;\ 1\le i\le d\Big\}.$$

В силу утверждения II леммы 2.2 найдутся $\varepsilon_2 > 0$ и $t_0 < \infty$ такие, что при всех $t \ge t_0$, $n \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3$ выполняется

$$\inf\left\{r\Lambda\left(\frac{\theta'}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{r}\right) : (r,\theta',\boldsymbol{\alpha}') \in W(\theta,\boldsymbol{\alpha})\right\} \ge D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \varepsilon_2,$$

так что при $t \ge t_0$

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[u),\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x})) \le e^{-t(D(\theta,\boldsymbol{\alpha})+\varepsilon_2)}. \tag{4.10}$$

Поэтому в силу (4.10)

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_1} \le c_1 t e^{-t(D(\theta,\boldsymbol{\alpha})+\varepsilon_2)} = o\left(\frac{\delta\Delta^d}{\sqrt{t^d}} e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\right).$$

Для оценки суммы $\sum_{n\in\mathcal{N}_3}$ разобьем ее на две части: на сумму $\sum'$ по области $c_2 t \le n \le t^2$ и на сумму $\sum''$ по области $n > t^2$. Сумма $\sum'$ оценивается точно так же, как сумма $\sum_{n\in\mathcal{N}_1}$. Для суммы $\sum''$ имеем

$$\sum{}'' \le \sum_{n>t^2} \mathbf{P}\left(T_n \le 2u\right) \le \sum_{n>t^2} e^{-n\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{2u}{n}\right)}, \tag{4.11}$$

где при $n > t^2$, $\frac{2\theta}{t} \le \mathbf{E}\tau$ (в силу убывания функции $\Lambda^{(\tau)}(u)$ при $u < \mathbf{E}\tau$)

$$\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{2u}{n}\right) = \Lambda^{(\tau)}\left(\frac{2\theta t}{n}\right) \ge \Lambda^{(\tau)}\left(\frac{2\theta}{t}\right).$$

Поскольку $\Lambda^{(\tau)}(0) = \infty$, то $\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{t}) \to \infty$ при $t \to \infty$, так что

$$\sum{}'' \le \sum_{n \ge t^2} e^{-n\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{t})} \le 2e^{-t^2\Lambda^{(\tau)}(\frac{2\theta}{t})} = o\left(\frac{\delta\Delta^d}{\sqrt{t^d}} e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\right).$$

Это доказывает утверждение теоремы 4.1 в однородном случае.

II. Рассмотрим теперь неоднородный случай. Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (4.5), (4.6). Тогда при некоторых $c > 0$, $C < \infty$, $t_0 < \infty$ и при всех $t \ge t_0$ справедливо неравенство*

(4.12)
$$\left|H_1(\delta[u],\ \Delta[\mathbf{x}]) - \mathbf{E}(H(\delta[u-\tau_1], \Delta[\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1]);\ \ |\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t)\right| \le Ce^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})-c\ln^2 t}.$$

В силу этой леммы для доказательства утверждения (4.3) теоремы 4.1 в общем случае достаточно отыскать асимптотику

$$\mathbf{E}(H(\delta[u-\tau_1],\ \Delta[\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1]);\ \ |\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t).$$

Если воспользоваться (4.12) и результатами раздела *I* доказательства, то получим

$$H_1(\delta[u],\ \Delta[\mathbf{x}]) =$$

(4.13)
$$\delta\Delta^d \frac{1}{t^{\frac{1}{d}}} \mathbf{E}\left(C_1\left(\theta - \frac{\tau_1}{t}, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right) e^{-tD\left(\theta-\frac{\tau_1}{t},\boldsymbol{\alpha}-\frac{\zeta_1}{t}\right)}(1+o(1));\ \ |\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t\right) + o\left(\frac{\delta\Delta^d}{\sqrt{t^d}} e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\right).$$

Напомним, что $\mathbf{D}'(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = (\widehat{\lambda},\widehat{\mu})$ (см. (2.24)). В силу выпуклости функции $D(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ для любых (τ_1,ζ_1) имеем неравенство

$$-tD\left(\theta - \frac{\tau_1}{t}, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right) \le -tD(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\zeta}_1.$$

Поэтому, учитывая, что в области $|\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t$ при $t \to \infty$ выполняется

$$-tD\left(\theta - \frac{\tau_1}{t}, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right) = -tD(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\zeta}_1 + o(1),$$

получаем, что правая часть (4.13) совпадает с правой частью (4.3).

Таким образом, нам осталось провести

Доказательство леммы 4.1. Так как $(0,\mathbf{0}) \notin B_{u,\mathbf{x}}$, то

$$\mathbf{P}((T_0,\mathbf{Z}_0) \in B_{u,\mathbf{x}}) = 0,$$

и для $B_{u,\mathbf{x}} = \delta[u) \times \Delta[\mathbf{x})$ имеем

$$H_1(B_{u,\mathbf{x}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}((T_n,\mathbf{Z}_n) \in B_{u,\mathbf{x}}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}((\tau_1 + T'_n, \boldsymbol{\zeta}_1 + \mathbf{Z}'_n) \in B_{u,\mathbf{x}}),$$

где $(T'_n, \mathbf{Z}'_n)$, $n = 0, 1, \cdots$—последовательность сумм однородных, независимых слагаемых, независимая от $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$. Поэтому меру восстановления множества $B_{u,\mathbf{x}}$ в неоднородном случае можно представить в виде

$$H_1(B_{u,\mathbf{x}}) = H_1(\delta[u),\ \Delta[\mathbf{x})) = \mathbf{E}H(\delta[u - \tau_1),\ \Delta[\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}_1)). \tag{4.14}$$

В силу представления (4.14) имеем

$$H_1(\delta[u),\ \Delta[\mathbf{x})) = \mathbf{E}(H(\delta[u - \tau_1),\ \Delta[\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}_1));\ |\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t) +$$
$$\mathbf{E}(H(\delta[u - \tau_1),\ \Delta[\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}_1));\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t).$$

Поэтому

$$\Big| H_1(\delta[u),\ \Delta[\mathbf{x})) - \mathbf{E}(H(\delta[u - \tau_1),\ \Delta[\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}_1));\quad |\boldsymbol{\xi}_1| \le \ln^2 t) \Big| = \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

где

$$P_n := \mathbf{P}(T_n \in \delta[u),\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}),\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t),$$

и для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \le C e^{-tD(\theta, \boldsymbol{\alpha}) - c \ln^2 t}, \tag{4.15}$$

Для всех достаточно больших t выполняется $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) \in (\mathcal{A})$. Поэтому для таких t при любом $n \ge 1$ в силу (2.25) имеем

$$P_n = \mathbf{E}(e^{-\widehat{\lambda} T_n - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{Z}_n + \widehat{\lambda} T_n + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{Z}_n};\ T_n \in \delta[u),\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}),\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t) \le$$
$$\exp\{-\widehat{\lambda} u - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x} + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\boldsymbol{\mu}}|\Delta\} \mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda} T_n + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{Z}_n}; |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t) =$$
$$\exp\{-tD(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\boldsymbol{\mu}}|\Delta\} \mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t) \prod_{k=2}^{n} \mathbf{E} e^{\widehat{\lambda}\tau_k + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_k} \le$$
$$\exp\{-tD(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + |\widehat{\lambda}|\delta + |\widehat{\boldsymbol{\mu}}|\Delta\} \mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t).$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что вектор $(\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}})$ в силу (2.25) лежит на границе множества $\mathcal{A}^{\le 0}$ и для него при $k \ge 2$ выполняется

$$\mathbf{E} e^{\widehat{\lambda}\tau_k + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_k} \le 1.$$

Оценим теперь

$$E_1 := \mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t) = \mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}_0 \tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 \boldsymbol{\zeta}_1 + \overline{\lambda}\tau_1 + \overline{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\zeta}_1};\ |\boldsymbol{\xi}_1| > \ln^2 t),$$

где

$$(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0) := \left(\widehat{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{\theta^0} \right), \widehat{\boldsymbol{\mu}} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}^0}{\theta^0} \right) \right), \quad (\overline{\lambda}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) := (\widehat{\lambda}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}) - (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0).$$

Рассмотрим случайный вектор $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1 = (\widehat{\tau}_1, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1)$ с распределением

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}_1, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1) \in \cdot) := \frac{\mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}_0 \tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 \boldsymbol{\zeta}_1};\ (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \in \cdot)}{\mathbf{E} e^{\widehat{\lambda}_0 \tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 \boldsymbol{\zeta}_1}}.$$

Используя этот новый случайный вектор, имеем

$$E_1 = \mathbf{E} e^{\widehat{\lambda}_0 \tau_1 + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 \boldsymbol{\zeta}_1} E_2,$$

где

$$E_2 := \mathbf{E}(e^{\overline{\lambda}\widehat{\tau}_1+\overline{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1};\ |\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1| \geq \ln^2 t).$$

Поскольку $(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0) \in (\mathcal{A}_1)$, то

$$\overline{C} := \mathbf{E}e^{\widehat{\lambda}_0\tau_1+\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0\boldsymbol{\zeta}_1} < \infty,$$

и нам достаточно оценить E_2. Применяя для этого неравенство Гельдера, получаем для $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$

$$E_1 \leq \left(\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\overline{\lambda}\widehat{\tau}_1+\frac{1}{p}\overline{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\right)^p \mathbf{P}^q(|\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1| > \ln^2 t).$$

Так как вектор $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1 = (\widehat{\tau}_1, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1)$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_0]$ и $(\overline{\lambda}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) \to (0, \mathbf{0})$ при $t \to \infty$, то найдутся $C_0 < \infty$, $t_0 < \infty$, параметр $\frac{1}{p} > 1$ достаточно близкий к 1, такие, что при $t \geq t_0$

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\overline{\lambda}\widehat{\tau}_1+\frac{1}{p}\overline{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1} \leq C_0 < \infty.$$

Для $q = 1 - p$ и некоторых $C_1 < \infty$, $c_1 > 0$ имеем (в силу условия $[\mathbf{C}_0]$ для $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1$)

$$\mathbf{P}^q(|\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1| \geq \ln^2 t) \leq C_1 e^{-c_1 \ln^2 t}.$$

Поэтому для любых достаточно больших t справедливо неравенство

$$\sup_{n\geq 1} P_n \leq \overline{C} C_0^p C_1 e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})-c_1\ln^2 T+|\widehat{\lambda}|\delta+|\widehat{\boldsymbol{\mu}}|\Delta}. \tag{4.16}$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leq t^2 \sup_{n\geq 1} P_n + \sum_{n\geq t^2} P_n, \tag{4.17}$$

где первое слагаемое в правой части оценивается с помощью (4.16), а второе—с помощью неравенства (4.11), в силу которого

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n\geq t^2} P_n \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n\geq t^2} \mathbf{P}(T_n < 2u) = -\infty. \tag{4.18}$$

Из соотношений (4.16)—(4.18) вытекает, что для некоторых $c > 0$, $C < \infty$, $t_0 < \infty$ и всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство (4.15), т.е. требуемое утверждение (4.12). Лемма 4.1 доказана. □

А вместе с ней и утверждение теоремы 4.1 доказано. □

Замечание 4.1. *В теореме 4.1 настоящей работы отсутствует условие* $[\mathbf{C}_0]$ *для случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$*, а в теореме 4.1 в* [3],[4] *это условие для* $\boldsymbol{\xi}_1$ *присутствует ("по умолчанию"). Поэтому мы привели полное доказательство теоремы 4.1, которое в некоторых своих частях повторяет доказательство теоремы 4.1 в* [3],[4]*, но при этом не использует условие* $[\mathbf{C}_0]$ *для* $\boldsymbol{\xi}_1$.

5. Доказательство теоремы 3.1

Заметим, что аналогично предыдущему, условие $\boldsymbol{\alpha} \in K$, не ограничивая общности, можно сузить до условия

$$\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}^0 \in K,$$

используя при этом условие допустимой неоднородности в виде

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)) \in (\mathcal{A}_1).$$

Имеем

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]) = P_{Z,1} + P_{Z,2}, \tag{5.1}$$

где

$$P_{Z,1} := \mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}),\ \tau_1 > t) = \mathbf{I}_{\{\mathbf{0} \in \Delta[\mathbf{x}]\}} \mathbf{P}(\tau_1 > t), \tag{5.2}$$

$$P_{Z,2} := \mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}),\ \tau_1 \le t) = \int_0^t H_1(dy, \Delta[\mathbf{x}]) \mathbf{P}(\tau > t - y). \tag{5.3}$$

Оценим сначала часть

$$J_1 := \int_{t(1-p)}^t H_1(dy, \Delta[\mathbf{x}]) \mathbf{P}(\tau > t - y)$$

интеграла в правой части (5.3), взятую по области $(t(1-p),\ t)$ при фиксированном $p \in (0,1)$. Для удобства ссылок оценку сверху интеграла J_1 сформулируем в виде леммы.

Лемма 5.1. *При любом $\varepsilon > 0$ и $t \to \infty$ справедливо неравенство*

$$J_1 \le \frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}} \psi_1 C(1, \boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} (1 + o(1)) \int_0^\infty e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha}) y} \mathbf{P}(\tau > y - \varepsilon) dy, \tag{5.4}$$

где $C(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ определено в (2.27).

Доказательство. Пусть $p > 0$ фиксировано и таково, что в точках $(u, \mathbf{x})$ при $u \in (t(1-p), t)$ применима интегро-локальная теорема 4.1 для меры восстановления. Положив $y_k = k\delta$, $k = 0, 1, ...$, получим оценку сверху

$$J_1 \le \sum_{0 \le y_k \le pt} H_1(\delta[t - y_k),\ \Delta[\mathbf{x})) \mathbf{P}(\tau > y_k - \delta), \tag{5.5}$$

По теореме 4.1

$$J_1 \le \sum_{0 \le y_k \le pt} \frac{\delta \Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}} \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) C\left(1 - \frac{y_k}{t}, \boldsymbol{\alpha}\right) e^{-tD\left(1 - \frac{y_k}{t}, \boldsymbol{\alpha}\right)} (1 + o(1)) \mathbf{P}(\tau > y_k - \delta). \tag{5.6}$$

В силу выпуклости функции $D(v, \boldsymbol{\alpha})$

$$D\left(1 - \frac{y_k}{t}, \boldsymbol{\alpha}\right) \ge D(1, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{y_k}{t} D'_{(1)}(1, \boldsymbol{\alpha}). \tag{5.7}$$

При

$$\boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}, \quad \boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}^0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

для всех достаточно больших t выполняется

$$D'_{(1)}(1, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}) < \lambda_+. \tag{5.8}$$

Так как точка $\boldsymbol{\alpha}^0$ отделена от запретного множества $\mathfrak{B}$, то значение $\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ отделено от λ_+:

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}) < \lambda_+ - \varepsilon \quad \text{при некотором} \quad \varepsilon > 0. \tag{5.9}$$

Поскольку случай $\lambda_+ = \infty$ является более простым с точки зрения последующих выкладок, то в (5.9) и в дальнейшем для определенности и упрощения изложения мы будем рассматривать лишь более сложный случай

$$\lambda_+ < \infty$$

(рассмотрения в случае $\lambda_+ = \infty$ отличаются лишь упрощениями).

Из (5.6), (5.7), (5.9) вытекает, что

$$J_1 \le \frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1 C(1,\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}\sum_{0\le y_k\le pt}\delta e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y_k}\mathbf{P}(\tau > y_k-\delta)(1+o(1)). \tag{5.10}$$

Далее, пусть для определенности $\lambda(\boldsymbol{\alpha}) \ge 0$. Тогда

$$\delta e^{y_k\lambda(\alpha)}\mathbf{P}(\tau > y_k - \delta) \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y}\mathbf{P}(\tau > y - 2\delta)dy,$$

и из (5.10) находим

$$J_1 \le \frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1 C(1,\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}\int_0^{pt} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y}\mathbf{P}(\tau > y-2\delta)dy(1+o(1)), \tag{5.11}$$

где интеграл в правой части (5.11) сходится в силу (5.9).

Из (5.11) вытекает, что J_1 при всех достаточно больших t не превосходит правой части в (5.4). Таким образом, J_1 при всех достаточно больших t не превосходит правой части в (5.4) равномерно по $\alpha \in K$. Лемма 5.1 доказана. $\square$

Аналогично получаем оценку снизу для J_1 того же вида. (В правой части (5.5) $\mathbf{P}(\tau > y_k - \delta)$ надо заменить на $\mathbf{P}(\tau > y_k + \delta)$, а вместо неравенства (5.7) использовать асимптотическое представление

$$D\left(1-\frac{y_k}{t},\alpha\right) = D(1,\alpha) - \frac{y_k}{t}D'_{(1)}(1,\alpha) + O\left(\left(\frac{y_k}{t}\right)^2\right)$$

при малых $\frac{y_k}{t}$ (при малых p)).

Мы получаем в итоге

$$J_1 = \frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1 C(1,\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}(1+o(1))\int_0^{\infty} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y}\mathbf{P}(\tau > y)dy. \tag{5.12}$$

Оценим теперь сверху вторую часть J_2 интеграла в (5.3):

$$J_2 := \int_0^{t(1-p)} H_1(dy,\Delta[\mathbf{x}])\mathbf{P}(\tau > t-y). \tag{5.13}$$

Для $y_k := \delta k$, $k = 0, 1, \cdots$; $v \ge 0$ имеем

$$J_2 \le \sum_{k=0}^{[t(1-p)/\delta]} H_1(\delta[y_k],\Delta[x])\mathbf{P}(\tau > t-y_k). \tag{5.14}$$

Воспользуемся следующим утверждением (ср. с теоремой 4.1)

Лемма 5.2. *При некоторых $C < \infty$, $t_0 < \infty$ и всех*

$$t \ge t_0, \quad 0 \le y \le t, \quad 0 < \delta \le 1, \quad 0 < \Delta \le 1$$

справедливо

$$H_1(\delta[y], \Delta[\mathbf{x}]) \le t^2 e^{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})y - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}}. \tag{5.15}$$

Лемму 5.2 докажем ниже в настоящем разделе, а сейчас с помощью этой леммы продолжим оценивание сверху J_2.

Из экспоненциального неравенства Чебышева вытекает, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \ge t) \le -\lambda_+. \tag{5.16}$$

Из соотношений (5.15), (5.16) следует оценка сверху для логарифма J_2:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln J_2 \le -\min_{0\le w\le 1-p} \{\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0)w + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)\boldsymbol{\alpha}^0 + (1-w)\lambda_+\}. \tag{5.17}$$

Поскольку в силу условия $\boldsymbol{\alpha}^0 \notin \mathfrak{B}$ выполняется $\lambda_+ - \lambda(\alpha^0) > 0$, то нижняя грань в правой части (5.17) достигается при $w = 1-p$, так что правая часть в (5.17) равна

$$-\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)\boldsymbol{\alpha}^0 - p(\lambda_+ - \lambda(\boldsymbol{\alpha}^0)) = -D(1, \boldsymbol{\alpha}^0) - p(\lambda_+ - \lambda(\boldsymbol{\alpha}^0)).$$

Поэтому

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln J_2 \le -D(1,\boldsymbol{\alpha}^0) - p(\lambda_+ - \lambda(\boldsymbol{\alpha}^0)) \le -D(\boldsymbol{\alpha}^0) - \frac{1}{2}p(\lambda_+ - \lambda(\boldsymbol{\alpha}^0)). \tag{5.18}$$

Из (5.18) вытекает, что при некотором $\varepsilon > 0$ и $t \to \infty$

$$J_2 = O\left(e^{-t(D(\boldsymbol{\alpha})+\varepsilon)}\right) = o\left(\frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}} e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}\right). \tag{5.19}$$

Таким образом, $P_{Z,2} = J_1 + J_2$ равно правой части в (5.12). Вместе с (5.1)-(5.3) это доказывает требуемое утверждение (3.2). Следовательно, для доказательства (3.2) нам осталось выполнить

Доказательство леммы 5.2. Для любых $n \ge 1$, $\Delta \le 1$, $\delta \le 1$ имеем

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[y],\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}]) =$$

$$\mathbf{E}(\exp\{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})T_n - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{Z}_n + \lambda(\boldsymbol{\alpha})T_n + \mu(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{Z}_n\};\ T_n \in \delta[y],\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}]) \le$$

$$\exp\{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})y - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}\} e^{|\lambda(\boldsymbol{\alpha})|\delta + |\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})|\sqrt{d}\Delta} \mathbf{E} e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})T_n + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{Z}_n} \le$$

$$\exp\{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})y - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}\} e^{|\lambda(\boldsymbol{\alpha})| + |\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})|\sqrt{d}} \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \psi^{n-1}(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})).$$

Поскольку $\alpha \to \alpha^0$ при $t \to \infty$, то для всех достаточно больших t

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A}), \quad \psi(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) = 1,$$

и при этом в силу условия $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)) \in (\mathcal{A}_1)$ допустимой неоднородности выполняется

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) < \infty.$$

Поэтому для некоторых $t_0 < \infty$, $C_1 < \infty$ и при всех $t \ge t_0$, $n \ge 1$

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[y],\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}]) \le C_1 e^{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})y - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}}.$$

Следовательно, при всех $t \geq t_0$

$$H_1(\delta[y],\ \Delta[\mathbf{x}]) \leq C_1 t^2 e^{-\lambda(\boldsymbol{\alpha})y - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}} + \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n \in \delta[y],\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}]). \tag{5.20}$$

Далее, при $y + \delta \leq t(1-p) + \delta \leq t$ имеем

$$\mathbf{P}(T_n \in \delta[y],\ Z_n \in \Delta[x]) \leq \mathbf{P}\left(T_n \leq t\right) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=2}^{n} \tau_k \leq t\right),$$

и в силу экспоненциального неравенства Чебышева при $n \geq t^2 + 1$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=2}^{n} \tau_k \leq t\right) \leq e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{t}{n-1}\right)} \leq e^{-(n-1)\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{1}{t}\right)},$$

где $\Lambda^{(\tau)}(\frac{1}{t}) \to \Lambda^{(\tau)}(0) = \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n \in \delta[y],\ \mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}]) = -\infty. \tag{5.21}$$

Из соотношений (5.20), (5.21) вытекает (5.15). Лемма 5.2 и соотношение (3.2) доказаны. □

Теорема 3.1 доказана.

□

6. Вспомогательные утверждения. Доказательство леммы 2.1

6.1. **Лемма о невырожденности преобразования Крамера.** Случайный вектор (с.в.) $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_k) \in \mathbb{R}^k$ является *невырожденным в* $\mathbb{R}^k$, если не существуют ненулевого вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ и числа $c_0 \in \mathbb{R}$ таких, что выполняется

$$\mathbf{P}(\mathbf{cY} = c_0) = 1.$$

Если с.в. $\mathbf{Y}$ невырожден в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbf{E}|\mathbf{Y}|^2 < \infty$, то его ковариационная матрица

$$B^2_{\mathbf{Y}} := \mathbf{EY}^T\mathbf{Y} - \mathbf{EY}^T\mathbf{EY} \tag{6.1}$$

положительно определена, т.е. неотрицательно определена (как любая ковариационная матрица), и невырождена. Напомним, что верхний индекс $\cdot^T$ обозначает операцию транспонирования, которая, в частности, переводит вектор-строку $\mathbf{Y}$ в вектор-столбец $\mathbf{Y}^T$.

В соответствии со сказанным выше, случайная величина $Y \in \mathbb{R}$ вырождена в точке $c_0 \in \mathbb{R}$, если $\mathbf{P}(Y = c_0) = 1$.

Лемма 6.1. *Пусть задан случайный вектор* $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ *и при этом* $\mathbf{E}e^X < \infty$. *Обозначим* $(\hat{X}, \hat{Y}) \in \mathbb{R}^2$ *случайный вектор с распределением*

$$\mathbf{P}((\hat{X}, \hat{Y}) \in \cdot) := \frac{1}{\mathbf{E}e^X}\mathbf{E}(e^X;\ (X, Y) \in \cdot)$$

Тогда случайная величина $\hat{Y}$ *вырождена в точке* c_0 *тогда и только тогда, когда случайная величина* Y *вырождена в точке* c_0.

Доказательство. (i). Докажем сначала импликацию

$$\mathbf{P}(Y = c_0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(\hat{Y} = c_0) = 1. \tag{6.2}$$

При $\mathbf{P}(Y \neq c_0) = 0$ имеем

$$\mathbf{P}(\hat{Y} = c_0) = 1 - \mathbf{P}(\hat{Y} \neq c_0) = 1 - \frac{1}{\mathbf{E}e^X}\mathbf{E}(e^X;\ Y \neq c_0) = 1.$$

Мы доказали (6.2).

(ii). Докажем теперь импликацию

$$\mathbf{P}(\hat{Y} = c_0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(Y = c_0) = 1. \tag{6.3}$$

Легко видеть, что распределение с.в. (X, Y) следующим образом выражается через распределение с.в. $(\hat{X}, \hat{Y})$:

$$\mathbf{P}((X,Y) \in \cdot) = \frac{1}{\mathbf{E}e^{-\hat{X}}}\mathbf{E}(e^{-\hat{X}};\ (\hat{X}, \hat{Y}) \in \cdot),$$

где $\mathbf{E}e^{-\hat{X}} = \frac{1}{\mathbf{E}e^X} < \infty$. Поэтому можно применить уже доказанную выше импликацию (6.2). Получаем (6.3). Лемма 6.1 доказна. □

6.2. **Доказательство леммы 2.1.** (i). Фиксируем ненулевой вектор $(c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и число $c_0 \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$X := -A(\boldsymbol{\mu}_0)\tau + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\zeta}, \quad Y := c\tau + \mathbf{c}\boldsymbol{\zeta},$$

так что $\mathbf{E}e^X = 1$. Мы оказались в условия леммы 6.1, в силу которой для случайной величины $\hat{Y}$, определяемой соотношением

$$\mathbf{P}(\hat{Y} \in \cdot) := \mathbf{E}(e^X;\ Y \in \cdot),$$

справедливо

$$\mathbf{P}(Y = c_0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(\hat{Y} = c_0) = 1.$$

Из последнего вытекает: *случайные векторы* $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$, $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$ *вырождены (невырождены) в* $\mathbb{R}^{d+1}$ *одновременно.* Поскольку "по-умолчанию" с.в. $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ невырожден в $\mathbb{R}^{d+1}$, то невырожденность в $\mathbb{R}^{d+1}$ с.в. $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$ установлена.

(ii). Вырожденность с.в. $\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)$ означает: существуют число $c_0 \in \mathbb{R}$ и отличный от $\mathbf{0}$ вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ такие, что

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0) = c_0) = 1. \tag{6.4}$$

Последнее можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathbf{P}(c_1\tau(\boldsymbol{\mu}_0) + \mathbf{c}\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0) = c_0) = 1, \tag{6.5}$$

где $c_1 := -\mathbf{c}\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_0)$. Поскольку вектор $(c_1, \mathbf{c})$ не совпадает с нулевым вектором $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{d+1}$, то (6.5) противоречит невырожденности с.в. $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$, установленной в (i). Соотношение (6.4) невозможно, с.в. $\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)$ невырожден.

(iii). Отправной точкой доказательства является соотношение

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = 0, \tag{6.6}$$

определяющее неявную функцию $A(\boldsymbol{\mu})$. Очевидно, что вектор $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ лежит в области $\mathfrak{M}$. Утверждение (iii) установим сначала для частного случая $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$.

Заметим, что

$$(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} = (0, \mathbf{0}), \quad A'_{(1)}(0, \mathbf{0}) = A'_{(1)}(0, \boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} = \mathbf{E}\tau > 0.$$

Поэтому, обращаясь к (6.6) и используя восходящий к Коши *метод мажорантных рядов* (см.[18], раздел **450**), легко показать, что функция $A(\boldsymbol{\mu})$ аналитична в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Дифференцируя левую и правую части (6.6) по $\boldsymbol{\mu}$, получаем равенство векторов

$$A'_{(1)}(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})A'(\boldsymbol{\mu}) = A'_{(2)}(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}). \tag{6.7}$$

Из (6.7) при $\boldsymbol{\mu} = 0$ выводим $A'(\mathbf{0}) = \frac{A'_{(2)}(0,\mathbf{0})}{A'_{(1)}(0,\mathbf{0})} = \frac{\mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}}{\mathbf{E}\tau} = \mathbf{a}$. Дифференцируя соотношение (6.7) по $\boldsymbol{\mu}$ и подставляя затем $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, получаем равенство матриц

$$A''(\mathbf{0})A'_{(1)}(0,\mathbf{0}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a}A''_{(1)}(0,\mathbf{0}) - 2\mathbf{a}^T A''_{(1,2)}(0,\mathbf{0}) + A''_{(2)}(0,\mathbf{0}). \tag{6.8}$$

Используя очевидные равенства

$$A'_{(1)}(0,\mathbf{0}) = \mathbf{E}\tau, \quad A''_{(1)}(0,\mathbf{0}) = \mathbf{E}\tau^2 - (\mathbf{E}\tau)^2,$$

$$A''_{(1,2)}(0,\mathbf{0}) = \mathbf{E}\tau\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}, \quad A''_{(2)}(0,\mathbf{0}) = \mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}^T\mathbf{E}\boldsymbol{\zeta},$$

матричное равенство (6.8) можно переписать в виде

$$A''(\mathbf{0})\mathbf{E}\tau = \left\| \frac{\mathbf{E}\zeta_i\mathbf{E}\zeta_j\mathbf{E}\tau^2}{(\mathbf{E}\tau)^2} - 2\frac{\mathbf{E}\zeta_i\mathbf{E}\zeta_j\tau}{\mathbf{E}\tau} + \mathbf{E}\zeta_i\zeta_j \right\|_{i,j=1}^{d}. \tag{6.9}$$

Заметим, далее, что правая часть (6.9) совпадает с ковариационной матрицей $B^2_{\overline{\boldsymbol{\zeta}}}$ с.в. $\overline{\boldsymbol{\zeta}}$. Следовательно, формула (6.4) в частном случае $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ доказана.

В общем случае $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathfrak{M}$ рассмотрим невырожденный случайный вектор $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$, распределение которого задается формулой (2.18). Для него имеем $A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau(\boldsymbol{\mu}_0)+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0)} = A(-A(\boldsymbol{\mu}_0)+\lambda, \boldsymbol{\mu}_0+\boldsymbol{\mu})$, так что базовая функция $A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu})$ для с.в. $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$, которая определяется равенством

$$A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(-A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = 0,$$

удовлетворяет соотношению $A(-A(\boldsymbol{\mu}_0) - A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}) = 0$. Из последнего находим

$$A_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu}) = A(\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}) - A(\boldsymbol{\mu}_0). \tag{6.10}$$

В силу $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathfrak{M}$ для с.в. $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$ выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, и в силу уже доказанных утверждений (i), (ii) случайные векторы $(\tau(\boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\mu}_0))$, $\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)$ невырождены в $\mathbb{R}^{d+1}$, $\mathbb{R}^d$, соответственно. Поэтому можно применить уже доказанное утверждение (iii) в частном случае $\boldsymbol{\mu} = 0$:

$$A''_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} = \frac{1}{\mathbf{E}\tau(\boldsymbol{\mu}_0)} B^2_{\overline{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\mu}_0)}.$$

В силу (6.10) из последнего вытекает $A''(\boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0} = A''_{\{\boldsymbol{\mu}_0\}}(\boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}}$, поэтому формула (6.4) в общем случае доказана. Лемма 2.1 доказана.

References

[1] D.P. Cox, W. L. Smith, *Renewal Theory [Russian translation]*, Moscow: Sov. Radio, 1967. Zbl 0168.16106

[2] S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin Probabilities*, Second Edition, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability 14. Hackensack, NJ: Word Scientifics, 2010. Zbl 1247.91080

[3] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514.

[4] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750.

[5] C. Stone, *A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions*, Ann. Math. Statist., **36**, (1965), 546–551. Zbl 0135.19204
[6] C. Stone, *On local and ratio limit theorems*, in Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II(2), ed. Neyman, J. (University of California Press, Berkeley, (1967), 217–1224. Zbl 0236.60021
[7] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. Zbl 1297.60002
[8] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments,* Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003
[9] A. A. Borovkov, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **62**:2 (2017), 217-–240.
[10] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. Zbl 1318.60031
[11] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, In press.
[12] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in phase space*, Siberian Adv. Math., In press.
[13] M. Herve, *Several complex variables. Local Theory*, Bombay: Oxford University Press, 1963. Zbl 0113.29003
[14] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. Zbl 0878.60023
[15] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for compound multidimensional renewal processes, when Cramer's condition holds. II,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 503–527.
[16] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 528–553.
[17] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. IV,* Siberian Electronic Mathematical Reports, In press.
[18] G. M. Fihtengol'tz, *Course of Differential and Integral Calculus*, vol. II, Moskva: Fizmatlit, 2006.

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

Evgenii Igorevich Prokopenko
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com