S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 503–527 (2018) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2018.15.042 MSC 60K05, 60F10

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ МОМЕНТНОМ УСЛОВИИ КРАМЕРА. II.

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. In the work, which consists of 4 papers (the article and [1] — [3]), we obtain integro-local limit theorems in the phase space for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds.

In the part II (the article) we consider the so-called first renewal process $\mathbf{Z}(t)$ in an irregular region.

Keywords: compound multidimensional renewal process, first renewal process, large deviations, integro-local limit theorems, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function.

1. Введение

1.1. **Основные обозначения. Постановка задачи.** Напомним, что элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ обозначаем

$$\mathbf{xy} := x_{(1)}y_{(1)} + \cdots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначаем $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$.

Mogulskii A.A., Prokopenko E.I., Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 17-11-01173).

Поступила 5 февраля 2018 г., опубликована 4 мая 2018 г.

Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Повторим кратко определение первого обобщенного процесса восстановления $\mathbf{Z}(t)$. Пусть заданы "начальный" случайный вектор $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных $(d+1)$-мерных векторов $(\tau, \boldsymbol{\zeta}), (\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2), (\tau_3, \boldsymbol{\zeta}_3), ...,$ где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_0 := 0, \quad \mathbf{Z}_0 := \mathbf{0}, \quad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j \quad \text{при} \quad n \geq 1.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\nu(t) := \max\{k \geq 0 : \ T_k \leq t\}$$

последний случайный номер $k \geq 0$, когда случайное блуждание $\{T_k\}$ еще не превысило уровень $t \geq 0$. *Первый обобщенный процесс восстановления* (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенством

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

В настоящей работе получены интегро-локальные теоремы для вероятностей

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]), \tag{1.1}$$

где $\Delta[\mathbf{x})$ есть куб

$$\Delta[\mathbf{x}) := [x_{(1)}, \ x_{(1)} + \Delta) \times \cdots \times [x_{(d)}, \ x_{(d)} + \Delta)$$

в пространстве $\mathbb{R}^d$ с вершиной $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и стороной Δ, причем $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$, $\frac{\mathbf{x}}{t}$ принадлежит некоторому компактному множеству K, лежащему в т.н. *нерегулярной* зоне уклонений $\mathfrak{B}$ (см. (1.15)). В регулярной зоне уклонений $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ асимптотика (1.1) изучена в части I (см. [1]).

В настоящей работе всегда предполагается, что случайный вектор $\boldsymbol{\xi} := (\tau, \boldsymbol{\zeta})$ является *нерешетчатым* и для него выполнено моментное условие Крамера в следующей форме:

$[\mathbf{C}_0]$.

$$\mathbf{E}e^{v\tau + v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty \qquad \text{для некоторого} \quad v > 0.$$

Эти условия во избежание повторений в формулировках утверждений повторяться не будут.

Кроме того, в основных утверждениях настоящей работы будет предполагаться условие

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\} < \infty. \tag{1.2}$$

Если условие (1.2) не выполнено, т.е. $\lambda_+ = \infty$, то нерегулярная зона $\mathfrak{B}$ пуста и, следовательно, отсутствует основная задача исследования.

1.2. **Основные определения. Функция уклонений, базовая функция и их свойства.** Подробное изложение свойств нижеприведенных функций содержится в части I([1]); в настоящей работе мы лишь коротко повторим необходимые определения. Положим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$
$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln\psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}. \tag{1.3}$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Для функции $G = G(\boldsymbol{\alpha}) : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, через G' и G'' мы будем обозначать, соответственно, вектор $G' = G'(\boldsymbol{\alpha})$ первых производных (т.е. градиент) и матрицу $G'' = G''(\boldsymbol{\alpha})$ вторых производных этой функции.

Обозначим

$$\mathcal{A}^{\le 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \le 0\}.$$

Определяющую роль в дальнейшем играют следующие функции аргумента $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$:

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : \ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\le 0}\}, \tag{1.4}$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda : \ \lambda \in \emptyset\} = -\infty$;

$$A_Z(\boldsymbol{\mu}) := \max\{A(\boldsymbol{\mu}), \ -\lambda_+\}. \tag{1.5}$$

Как установлено в [4] (см. теорему 1.2 ниже или теорему 1.2 в [4]), функция $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ определяет (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t \to \infty$ преобразования Лапласа над распределением $\mathbf{Z}(t)$. Следуя [7],[8], мы назвали в [4] функцию $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ *базовой функцией* для процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Для функции $G = G(\boldsymbol{\mu})$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty, \infty]$ определим преобразование Лежандра $G^{\mathfrak{Le}} = G^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha})$, положив:

$$G^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - G(\boldsymbol{\mu})\}, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d.$$

Обозначим далее

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := A^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}), \quad D_Z(\boldsymbol{\alpha}) := A_Z^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

Будем говорить, что функция $G = G(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ *компактна*, если для любого $c \ge 0$ множество $\{\boldsymbol{\alpha} : \ G(\boldsymbol{\alpha}) \le c\}$ компактно в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция полунепрерывна снизу.

Как установлено в [4] (см. теорему 1.1 ниже или теорему 1.1 в [4]), функция $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$ играет роль (при некоторых дополнительных условиях) функции уклонений при $t \to \infty$ для процесса $\mathbf{Z}(t)$. Свойства функций $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$ изучены в [4] (см. леммы 1.1 и 3.1 в [4]):

Лемма 1.1. (i). *Функции $A(\boldsymbol{\mu})$, $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*

(ii). *Функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*

(iii). *Справедливы следующие формулы*

$$A(\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}), \quad A_Z(\boldsymbol{\mu}) = D_Z^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}), \tag{1.7}$$

так что пары $A(\mu), D(\alpha)$; $A_Z(\mu), D_Z(\alpha)$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv). Функции A_Z, A совпадают (и, следовательно, $D_Z = D$), тогда и только тогда, когда выпонено условие

$$\lambda_+ \geq D(\mathbf{0}). \tag{1.8}$$

(v). Для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = D(1, \boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}; \tag{1.9}$$

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta \in [0,1]} \{D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1 - \theta)\}, \tag{1.10}$$

где

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}. \tag{1.11}$$

В следующем разделе мы процитируем результаты, полученные в [4].

1.3. **Грубые предельные теоремы для о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$.** Будем говорить, что *семейство $\left\{\frac{\mathbf{x}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.) $G(\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, если функция $G(\boldsymbol{\alpha})$ компактна и для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$ справедливы неравенства*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{x}(t)}{t} \in B\right) \leq -G([B]),$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{x}(t)}{t} \in B\right) \geq -G((B)),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in B} G(\boldsymbol{\alpha}), \quad G(\emptyset) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) обозначены замыкание и внутренность множества B, соответственно.

Теорема 1.1. *([4]) Пусть выполнено условие допустимой неоднородности*

$$(\mathcal{A}_Z^{\leq 0}) \subset \mathcal{A}_1, \quad \lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geq \min\{\lambda_+, \ D(\mathbf{0})\}. \tag{1.12}$$

Пусть, кроме того, выполнено дополнительное условие

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq t) \geq -\lambda_+. \tag{1.13}$$

Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Z}(\mathbf{t})}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$. Если дополнительно выполнено условие $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$, то $D_Z = D$, и условие (1.13) является лишним.

Ранее в одномерном случае $d = 1$ результат теоремы 1.1 для о.п.в. $Z(t)$, построенного по случайным векторам $\{(\tau_k, F(\tau_k))\}_{k \geq 1}$, где $F : (0, \infty) \to [0, \infty)$ — ограниченная, непрерывная неслучайная функция, был получен в [5] .

Обозначим

$$\mathcal{M}_Z := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ A_Z(\boldsymbol{\mu}) < \infty\}$$

множество в пространстве $\mathbb{R}^d$, во всех точках которых конечна функция $A_Z(\boldsymbol{\mu})$.

Теорема 1.2. *([4]) Пусть выполнены условие допустимой неоднородности (1.12) и дополнительное условие (1.13). Тогда для любого $\boldsymbol{\mu} \notin \partial\mathcal{M}_Z$ имеет место сходимость*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}(t)} = A_Z(\boldsymbol{\mu}). \tag{1.14}$$

При этом в случае $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$ правая часть (1.14) равна $A(\boldsymbol{\mu})$ и условие (1.13) является лишним.

Ранее в одномерном случае $d = 1$ в [6], асимптотика преобразования Лапласа над распределением о.п.в. $Z(t)$ изучалась при условиях: (i) $\mathbf{E}\zeta = 0$, (ii) $\{(\lambda,\mu):\ \lambda < 0\} \subset \mathcal{A}$.

Как уже говорилось ранее, настоящая работа посвящена интегро-локальным теоремам (точным) для о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ в т.н. нерегулярной зоне уклонений этого процесса.

1.4. **Нерегулярная зона уклонений для о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$.** Для описания нерегулярной зоны уклонений заметим прежде всего, что в силу (1.10), (1.9), для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ имеет место неравенство $D_Z(\boldsymbol{\alpha}) \leq D(1,\boldsymbol{\alpha}) = D(\boldsymbol{\alpha})$. *Нерегулярную зону уклонений* $\mathfrak{B}$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{B} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d :\ D_Z(\boldsymbol{\alpha}) < D(\boldsymbol{\alpha})\}. \tag{1.15}$$

Таким образом, в силу п.(iv) леммы 1.1 нерегулярная зона уклонений появляется в том и только том случае, когда

$$\lambda_+ < D(\mathbf{0}). \tag{1.16}$$

На протяжении всей оставшейся статьи мы будем предполагать условие (1.16) выполненым.

Лемма 1.2. (i). *Множество $\mathfrak{B}$ звездчато относительно точки $\boldsymbol{\alpha} = 0$, т.е. для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}$ отрезок*

$$[0,\boldsymbol{\alpha}] := \{t\boldsymbol{\alpha} : t \in [0,1]\} \text{ содержится в } \mathfrak{B}.$$

(ii). *На каждом отрезке $[0,\boldsymbol{\alpha}] \subset \mathfrak{B}$ функция $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$ линейна: для любого $p \in [0,1]$ справедливо*

$$D_Z(p\boldsymbol{\alpha}) = pD_Z(\boldsymbol{\alpha}) + (1-p)D_Z(\mathbf{0}), \tag{1.17}$$

где $D_Z(\mathbf{0}) = \lambda_+$.

Доказательство. (i), (ii). Обозначим

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) := D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1-\theta).$$

Это выпуклая полунепрерывная снизу функция аргумента θ, поэтому найдется точка $\theta_{\boldsymbol{\alpha}} \in [0,1]$, такая, что в этой точке достигается точная нижняя грань в соотношении (1.10):

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta\in[0,1]} \{D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1-\theta)\} = D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1-\theta_{\boldsymbol{\alpha}}),$$

причем, в случае, когда точка $\theta_{\boldsymbol{\alpha}}$ на отрезке $[0,1]$ не единственна, в качестве $\theta_{\boldsymbol{\alpha}}$ выберем наибольшую. Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}$, то $\theta_{\boldsymbol{\alpha}} < 1$, так что выполнены два соотношения:

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) \geq f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \text{при всех} \quad \theta \in [0,1], \quad \text{и} \quad f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) > f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \text{при всех} \quad \theta \in (\theta_{\boldsymbol{\alpha}},1]. \tag{1.18}$$

Для произвольного $p \in [0,1]$ имеем

$$f_{p\boldsymbol{\alpha}}(p\theta) = pf_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) + \lambda_+(1-p),$$

поэтому из (1.18) вытекают следующие два соотношения

$$f_{p\boldsymbol{\alpha}}(p\theta) = pf_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) + \lambda_+(1-p) \geq pf_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) + \lambda_+(1-p) \quad \text{при всех} \quad p\theta \in [0,p],$$

$$f_{p\boldsymbol{\alpha}}(p\theta) > f_{p\boldsymbol{\alpha}}(p\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) + \lambda_+(1-p) \quad \text{при всех} \quad p\theta \in (p\theta_{\boldsymbol{\alpha}}, p].$$

Из этих соотношений следует, что точная нижняя грань на отрезке $[0,1]$ выпуклой полунепрерывной снизу функции $f_{p\boldsymbol{\alpha}}(\theta)$ достигается в точке $\theta_{p\boldsymbol{\alpha}} = p\theta_{\boldsymbol{\alpha}}$ и равна значению этой функции в этой точке:

$$D_Z(p\boldsymbol{\alpha}) = pf_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) + \lambda_+(1-p) = pD_Z(\boldsymbol{\alpha}) + (1-p)D_Z(\mathbf{0}). \tag{1.19}$$

В последнем равенстве мы воспользовались очевидным свойством

$$D_Z(\mathbf{0}) = \inf_{\theta\in[0,1]}\{D(\theta,\mathbf{0}) + \lambda_+(1-\theta)\} = \inf_{\theta\in[0,1]}\{\theta D(1,\mathbf{0}) + \lambda_+(1-\theta)\} = \lambda_+ < D(\mathbf{0}),$$

так что всегда $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathfrak{B}$. Осталось заметить, что

$$D(p\boldsymbol{\alpha}) = f_{p\boldsymbol{\alpha}}(1) > f_{p\boldsymbol{\alpha}}(p\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) = D_Z(p\boldsymbol{\alpha}),$$

так что $p\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}$. Лемма 1.2 доказана. □

Обозначим

$$\mathfrak{M} := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ (-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A})\}.$$

Это открытое (но не обязательно односвязное) подмножество $\mathbb{R}^d$, содержащее точку $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Для любого $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ выполняется

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = 0.$$

В части I (см. [1]) доказано, что в множестве $\mathfrak{M}$ функция $A(\boldsymbol{\mu})$ аналитична и строго выпукла (последнее означает, что матрица $A''(\boldsymbol{\mu})$ для любого $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ положительно определена (и найдена в явном виде)). Далее, для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ через $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ обозначим точку $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, в которой достигается точная верхняя грань в соотношении (1.6), если такая точка найдется:

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu})\} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})).$$

Если $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{M}$, то функция $A(\boldsymbol{\mu})$ аналитична в точке $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$, и значение $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ является единственным решением системы уравнений

$$A'(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha}. \tag{1.20}$$

Это означает, что если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$, где

$$\mathfrak{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{M}\},$$

то вектор-функция

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) = (A')^{(-1)}(\boldsymbol{\alpha})$$

является обратной к вектор-функции $A'(\boldsymbol{\mu})$, и, следовательно, аналитична. Аналитична в множестве $\mathfrak{A}$ будет и функция

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{1.21}$$

Дифференцируя (1.21) и используя (1.20), получаем

$$D'(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}. \tag{1.22}$$

Если обозначить

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}) := -A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})), \tag{1.23}$$

то из (1.21), (1.23) получаем, что при $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}, \quad A(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) = 0, \quad (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A}), \tag{1.24}$$

т.е. точка $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ при движении $\boldsymbol{\alpha}$ по открытому множеству $\mathfrak{A}$ движется по "регулярной" части $\partial\mathcal{A}^{\leq 0} \cap (\mathcal{A})$ границы $\partial\mathcal{A}^{\leq 0}$ множества $\mathcal{A}^{\leq 0}$, проходя при этом точку $(0, \mathbf{0})$ при $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}$. Пара $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ определяет наряду с $(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ еще одно параметрическое задание регулярной части границы множества $\mathcal{A}^{\leq 0}$.

2. Нерегулярные уклонения для о.п.в. $Z(t)$ в одномерном случае

Напомним, что в одномерном случае $d = 1$ первый о.п.в. $Z(t)$ мы обозначаем "обычной"(не полужирной) буквой Z. Для описания нерегулярной зоны $\mathfrak{B}$ в одномерном случае нам понадобится условие

$[\mathbf{B}_1]$. *Пусть* $\lambda_+ < D(0)$ *и уравнение*

$$A(\mu) = -\lambda_+$$

имеет ровно два решения $\mu^{(-)} < \mu^{(+)}$, *таких, что*

$$\left(-A(\mu^{(\pm)}), \mu^{(\pm)}\right) = \left(\lambda_+, \mu^{(\pm)}\right) \in (\mathcal{A}). \tag{2.1}$$

Ниже в настоящем разделе будем считать выполненным условие $[\mathbf{B}_1]$. Обозначим

$$\beta_- := A'\left(\mu^{(-)}\right), \quad \beta_+ := A'\left(\mu^{(+)}\right), \tag{2.2}$$

так что всегда $\beta_- < 0 < \beta_+$. При этом всегда выполняется

$$\lambda(\beta_\pm) = -A(\mu(\beta_\pm)) = -A\left(\mu^{(\pm)}\right) = \lambda_+. \tag{2.3}$$

Как установлено в лемме 2.1 (см. ниже), множество $\mathfrak{B}$ совпадает с интервалом (β_-, β_+):

$$\mathfrak{B} = (\beta_-, \beta_+). \tag{2.4}$$

В настоящем разделе мы приведем интегро-локальную предельную теорему (см. теорему 2.1 ниже) для вероятностей

$$\mathbf{P}(Z(t) \in \Delta[x)) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{2.5}$$

где $\Delta[x) := [x, x + \Delta)$; функция $x = x(t) \in \mathbb{R}$ такова, что $\frac{x}{t} \in K$; $K \subset (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ − фиксированный компакт и $\Delta > 0$ либо фиксировано, либо стремится к нулю достаточно медленно при $t \to \infty$.

2.1. Основные обозначения. Технические леммы.

Обозначим $\theta_\alpha \in [0, 1]$ точку, в которой достигается нижняя грань в соотношении (1.10)

$$D_Z(\alpha) = \inf_{0 \leq \theta \leq 1} f_\alpha(\theta) = f_\alpha(\theta_\alpha), \quad f_\alpha(\theta) := D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta).$$

Поскольку функция $f_\alpha(\theta)$ выпукла и полунепрерывна снизу, то точка θ_a при любом фиксированном α определена (в случае, когда таких точек несколько, через θ_α обозначим максимальную на отрезке $[0, 1]$) (см. доказательство леммы 1.2). Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* $[\mathbf{B}_1]$. *Тогда* $\mathfrak{B} = (\beta_-, \beta_+)$ *(см. (2.2)), и для* $\alpha \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ *выполняется*

$$\theta_\alpha = \frac{|\alpha|}{|\beta_\alpha|}, \quad D_Z(\alpha) = \lambda_+ + \alpha\mu(\beta_\alpha), \tag{2.6}$$

где

$$\beta_\alpha := \begin{cases} \beta_+, & \text{если } \alpha > 0; \\ \beta_-, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

При этом в некоторой окрестности точки $y = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y} D(\theta_\alpha + y, \alpha) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\theta_\alpha + y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D(\theta_\alpha + y, \alpha)|_{y=0} = \frac{-\beta_\alpha \lambda'(\beta_\alpha)}{\theta_\alpha} > 0.$$

Лемма 2.1 будет доказана в разделе 2.3. Точная асимптотика вероятностей (2.5) в нерегулярной зоне уклонений $(\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ будет найдена при выполнении условия $[\mathbf{B}_1]$ и следующего условия (ср. с условием (1.13), при котором в теореме 1.1 доказан п.б.у. в фазовом пространстве для $Z(t)$):

$[\mathbf{F}_\tau]$. *При* $t > 0$ *справедливо представление*

$$\mathbf{P}(\tau \geq t) = l(t) e^{-\lambda_+ t + ct^\gamma}, \qquad l(t) = t^\kappa L(t),$$

где $\gamma \in [0, 1)$; κ*—произвольная вещественная константа;* c*—произвольная не равная 0 константа, если* $\gamma \in (0, 1)$ *и* $c = 0$, *если* $\gamma = 0$; $L(t)$ *— произвольная медленно меняющаяся при* $t \to \infty$ *функция.*

Для $y, u \in [-1, 1]$, $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ обозначим

$$G(y, u, \alpha) := D(\theta_\alpha + y, \alpha) - D(\theta_\alpha, \alpha) - \lambda_+ y - c(\theta_\alpha - y)^\gamma u,$$

где константы $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [0, 1)$ взяты из условия $[\mathbf{F}_\tau]$, которое предполагается выполненым. В случае $\gamma = 0$ имеем $c = 0$ (см. условие $[\mathbf{F}_\tau]$), и тогда функция $G(y, u, \alpha) = G(y, \alpha)$ не зависит от параметра u.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* $[\mathbf{B}_1]$, $[\mathbf{F}_\tau]$, $\alpha_0 \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$. *Тогда найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, $|u| < \varepsilon$

$$\inf_{y \in [-\varepsilon, \varepsilon]} G(y, u, \alpha) = G(y_\alpha(u), u, \alpha),$$

где $y_a(u)$ *является единственным решением уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y, u, \alpha) = 0, \tag{2.8}$$

причем $\frac{\partial^2}{\partial y^2} G(y, u, \alpha) > 0$ *для всех* $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

При этом верны следующие соотношения

$$y_\alpha(u) \to 0 \quad \text{при} \quad u \to 0, \quad G(y_\alpha(u), u, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\alpha) u^k, \tag{2.9}$$

где для аналитических в некоторой окрестности точки $\alpha = \alpha_0$ *функций* $g_k(\alpha)$ *известен алгоритм их построения, в частности: если* $\gamma \in (0, 1)$, *то*

$$g_1(\alpha) = -c(1 - \theta_\alpha)^\gamma, \quad g_2(\alpha) = \frac{(\gamma c)^2 \theta_\alpha (1 - \theta_\alpha)^{2(\gamma - 1)}}{\lambda'(\beta_\alpha)\beta_\alpha};$$

если $\gamma = 0$, то для всех $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$

$$y_\alpha = 0, \quad G(y_\alpha, \alpha) = 0.$$

Доказательство леммы 2.2 является весьма техническим и основывается только на лемме 2.1 и определении функции $G(y, u, \alpha)$. Мы приведем его в разделе 4.2, причем, сразу в многомерном случае (см. лемму 3.2 в разделе 3.1).

Асимптотику вероятностей (2.5) будет определять полином

$$\Pi(u, \alpha) := \sum_{k=0}^{k_0} g_k(\alpha) u^k, \ \ \alpha \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+), \tag{2.10}$$

где $k_0 := \left[\frac{1}{1-\gamma}\right]$, $g_0(\alpha) := D_Z(\alpha)$, функции $g_k(\alpha)$ для $k = 1, \cdots, k_0$ определены в лемме 2.2. В случае $\gamma = 0$ полином $\Pi(u, \alpha)$ вырождается в единственное слагаемое $g_0(\alpha) = D_Z(\alpha)$.

Для $u = t^{\gamma-1}$, $\alpha = \alpha_t \to \alpha_0 \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ при $t \to \infty$, в силу леммы 2.2 справедливо

$$D_Z(\alpha) + G(y_\alpha(t^{\gamma-1}), t^{\gamma-1}, \alpha) = \Pi(t^{\gamma-1}, \alpha) + o\Big(\frac{1}{t}\Big). \tag{2.11}$$

Наконец, для формулирования основного результата настоящего раздела нам необходима константа $C = C(\alpha)$, зависящая от параметра $\alpha \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$:

$$C = C(\alpha) := C_1(\beta_\alpha)(1 - \theta_\alpha)^\gamma,$$

где β_α определяется в (2.7),

$$C_1(\beta_\alpha) := \sqrt{\frac{-1}{\widehat{\theta}\beta_\alpha \lambda'(\beta_\alpha)} \frac{\Big|\Lambda''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})\Big|}{(1, \beta_\alpha)\Lambda''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})(1, \beta_\alpha)^T}}, \ \ (\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) = A'(\lambda_+, \mu(\beta_\alpha)).$$

2.2. **Формулировка основного результата в одномерном случае.**

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия $[\mathbf{B}_1]$, $[\mathbf{F}_\tau]$. Пусть для фиксированного компакта*

$$K \subset (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+),$$

и для всех $\alpha \in K$ выполнено условие допустимой неоднородности

$$(\lambda_+, \mu(\beta_\alpha)) \in (\mathcal{A}_1). \tag{2.12}$$

Тогда для функции $x = x(t) \in \mathbb{R}$ такой, что $\alpha := \frac{x}{t} \in K$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(Z(t) \in \Delta[x)) = \Delta l(t) \psi_1(\lambda_+, \mu(\beta_\alpha)) C(\alpha) e^{-t\Pi(t^{\gamma-1}, \alpha)}(1 + o(1)), \tag{2.13}$$

где $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$, остаточный член $o(1) = o_{\alpha,t}(1)$ стремится к 0 при $t \to \infty$ равномерно по $\alpha \in K$.

Теорема 2.1 будет доказана в разделе 2.4.

Замечание 2.1. *Если компакт K лежит в отрицательной части нерегулярной зоны, т.е. $K \subset (\beta_-, 0)$, то утверждение теоремы 2.1 сохранится, если условие $[\mathbf{B}_1]$ заменить на более слабое условие*

$[\mathbf{B}_1^{(-)}]$. *Пусть $\lambda_+ < D(0)$ и уравнение*

$$A(\mu) = -\lambda_+$$

имеет решение $\mu^{(-)}$ *такое, что*

$$\Big(-A(\mu^{(-)}), \mu^{(-)}\Big) = \Big(\lambda_+, \mu^{(-)}\Big) \in (\mathcal{A})$$

и $\beta_- := A'\left(\mu^{(-)}\right) < 0$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $K \subset (0, \beta_+)$.

Вывод следующего утверждения из теорем 2.1 полностью повторяет доказательство следствия 3.1 в [7],[8].

Следствие 2.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Если* $\Delta > 0$ *фиксировано, то справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(Z(t) \in \Delta[x)) = \Delta \mathbf{p}(\Delta\mu(\beta_\alpha)) l(t) \psi_1(\lambda_+, \beta_\alpha) C(\alpha) e^{-t\Pi(t^{\gamma-1}, \alpha)}(1 + o(1)), \tag{2.14}$$

где

$$\mathbf{p}(y) := \begin{cases} \frac{1-e^{-y}}{y}, & \text{если } y \neq 0; \\ 1, & \text{если } y = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

остаточный член $o(1)$ *стремится к* 0 *при* $t \to \infty$ *равномерно по* $\alpha \in K$.

Легко видеть, что из соотношения (2.14) вытекает соотношение (2.13). Поэтому соотношение (2.14) является другой формой (эквивалентной) интегро-локальной теоремы для о.п.в. $Z(t)$.

2.3. **Доказательство леммы 2.1.** Докажем сначала, что справедливо неравенство

$$\alpha\lambda'(\alpha) < 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathfrak{A}. \tag{2.16}$$

Заметим прежде, что дифференцируя равенство (1.23) и используя при этом (1.20), получаем для $\alpha \in \mathfrak{A}$ равенство

$$\lambda'(\alpha) = -\mu'(\alpha)\alpha.$$

Поэтому нам достаточно убедиться, что $\mu'(\alpha) > 0$. В свою очередь, в силу (1.20) функция $\mu(\alpha)$ при $\alpha \in \mathfrak{A}$ является единственным решением уравнения

$$A'(\mu) = \alpha,$$

поэтому

$$\mu'(\alpha) = \frac{1}{A''(\mu(\alpha))},$$

и нам достаточно убедиться, что для $\mu \in \mathfrak{M}$ выполняется

$$A''(\mu) > 0 \tag{2.17}$$

При $\mu \in \mathfrak{M}$ функция $A(\mu)$ определяется как решение уравнения

$$A(-A(\mu), \mu) = 0.$$

Дифференцируя это уравнение дважды по $\mu \in \mathfrak{M}$, получаем соотношение

$$A'_{(1)}(\lambda_\mu, \mu) A''(\mu) = (-A'(\mu), 1) A''(\lambda_\mu, \mu)(-A'(\mu), 1)^T,$$

где $\lambda_\mu := -A(\mu)$. Поскольку в области $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A})$ матрица $A''(\lambda, \mu)$ положительно определена, а

$$A'_{(1)}(\lambda_\mu, \mu) = \frac{\mathbf{E} e^{\lambda_\mu \tau + \mu\zeta} \tau}{\mathbf{E} e^{\lambda_\mu \tau + \mu\zeta}} > 0,$$

то получаем (2.17). Тем самым неравенство (2.16) доказано.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству леммы 2.1. Пусть выполнено условие $[\mathbf{B}_1]$ и $\beta \in \{\beta_-,\ \beta_+\}$. Тогда функции $D(\alpha)$, $\mu(\alpha) = D'(\alpha)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $\alpha_0 = \beta$. Для

$$\alpha \neq 0, \quad \theta(\alpha) := \frac{|\alpha|}{|\beta_\alpha|} > 0,$$

где точка β_α определена в (2.7), вычислим первые две производные по y в окрестности точки $y = 0$ выпуклой функции

$$f_\alpha(y) := D(\theta(\alpha)+y, \alpha)+\lambda_+(1-\theta(\alpha)-y) = (\theta(\alpha)+y)D\left(\frac{\alpha}{\theta(\alpha)+y}\right)+\lambda_+(1-\theta(\alpha)-y).$$

Получим

$$\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(y) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\theta(\alpha)+y}\right) - \lambda_+; \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(y) = -\alpha\lambda'\left(\frac{\alpha}{\theta(\alpha)+y}\right)(\theta(\alpha)+y)^{-2}. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.16), (2.18), (2.19), (2.3) следует, что выпуклая функция $f_\alpha(y)$ достигает своего минимума в единственной точке $y = 0$, так что при $\alpha \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ имеем $\theta(\alpha) \in (0, 1)$ и, следовательно $\theta_\alpha = \theta(\alpha)$. При этом, из (1.24) следует

$$f_\alpha(0) = \theta(\alpha)D(\beta_\alpha)+\lambda_+(1-\theta(\alpha)) = \theta_\alpha(\beta_\alpha\mu(\beta_\alpha)+\lambda_+)+\lambda_+(1-\theta_\alpha) = \lambda_+ + \alpha\mu(\beta_\alpha).$$

Поэтому при $\alpha \in (\beta_-, 0)\cup(0, \beta_+)$ соотношения (2.6) имеют место. Нам осталось доказать, что

$$\mathfrak{B} = (\beta_-, \beta_+). \tag{2.20}$$

Пусть $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$. Тогда, в силу доказанного, $\theta_\alpha < 1$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(0) > 0$ и, следовательно,

$$D_Z(\alpha) < D(\alpha).$$

Пусть теперь $\alpha \notin (\beta_-, \beta_+)$. Тогда $\theta(\alpha) \geq 1$ и, следовательно,

$$\theta_\alpha = 1,\ D_Z(\alpha) = D(\alpha).$$

Таким образом, равенство (2.20) доказано. Лемма 2.1 доказана.

□

2.4. **Доказательство теоремы 2.1.** Мы будем доказывать (для упрощения выкладок) эквивалентное теореме 2.1 утверждение, в котором для фиксированного $\alpha_0 \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ предполагается сходимость $\alpha := \frac{x}{t} \to \alpha_0$ при $t \to \infty$. Заменив условие (2.12) условием

$$(\lambda_+, \mu(\beta_{\alpha_0})) \in (\mathcal{A}_1)$$

и сохранив остальные условия теоремы 2.1, докажем соотношение (2.13).

Имеем

$$P_Z := \mathbf{P}(Z(t) \in \Delta[x)) = \mathbf{I}_{\{0\in\Delta[x)\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geq t) + J, \tag{2.21}$$

$$J := \int_0^t H_1(dy, \Delta[x))\mathbf{P}(\tau \geq t-y),$$

где для $\delta[y) := [y,\ y+\delta)$

$$H_1(\delta[y),\Delta[x)) := \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(T_n\in\delta[y),\ Z_n\in\Delta[x))$$

—функция (мера) восстановления для множества $B=\delta[y)\times\Delta[x)$ (см. [1], раздел 4), соответствующая блужданию (вообще говоря, неоднородному)

$$(T_0,Z_0),(T_1,Z_1),(T_1,Z_1),(T_2,Z_2),\cdots$$

Поскольку $\alpha_0\neq 0$, то для всех достаточно больших t и $\Delta\leq 1$ первое слагаемое в правой части (2.21) равно 0. Поэтому нам достаточно изучить асимптотику интеграла J. Оценим сначала часть J_1 интеграла J, взятую по области $(t(\theta_\alpha-\varepsilon),t(\theta_\alpha+\varepsilon))$, где число $\varepsilon>0$ мы выберем достаточно малым. Для удобства изложения оценку для J_1 сформулируем в виде леммы 2.3.

Лемма 2.3. *При достаточно малом $\varepsilon>0$, при $t\to\infty$ выполнено*
(2.22)

$$J_1 := \int\limits_{t(\theta_\alpha-\varepsilon)}^{t(\theta_\alpha+\varepsilon)} H_1(dy,\Delta[x))\mathbf{P}(\tau\geq t-y) = \Delta l(t)\psi_1(\lambda_+,\mu(\beta_\alpha))C(\alpha)e^{-t\Pi(t^{\gamma-1},\alpha)}(1+o(1)).$$

Доказательство. Для последовательности $\delta=\delta_t$ положительных чисел, стремящейся к 0 при $t\to\infty$ достаточно медленно, положим $y_k=k\delta$ для $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ и обозначим

$$g(v) := \mathbf{P}(\tau\geq t(1-\theta_\alpha-v)).$$

В силу монотонности функции $g(v)$ имеем
(2.23)

$$\sum_{|y_k|\leq\varepsilon t} H_1(\delta[t\theta_\alpha+y_k),\Delta[x))g\left(\frac{y_k-\delta}{t}\right)\leq J_1\leq\sum_{|y_k|\leq\varepsilon t} H_1(\delta[t\theta_\alpha+y_k),\Delta[x))g\left(\frac{y_k+\delta}{t}\right).$$

Далее нам понадобится интегро-локальная теорема для меры восстановления $H_1(\delta[t),\Delta[x))$ (см. теорему 4.1 в [1]). Сформулируем эту теоремы сразу в многомерном случае $d\geq 1$.

Теорема 2.2. *([1]) Пусть функции $u=u(t),\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ такие, что $(\theta,\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{u}{t},\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\in K_{\mathfrak{A}}\subset\left\{(\theta,\boldsymbol{\alpha})\,:\,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\in\mathfrak{A},\theta>0\right\}$ – фиксированный компакт. Пусть выполнено условие "допустимой неоднородности":*

$$\mathcal{A}_K\subset\mathcal{A}_1,\ \text{где}\ \mathcal{A}_K := \left\{\left(\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right),\boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right)\right)\,:\,(\theta,\boldsymbol{\alpha})\in K_{\mathfrak{A}}\right\}.$$

Тогда для $\delta=\delta_t\to 0,\Delta=\Delta_t\to 0$ достаточно медленно при $t\to\infty$ имеет место соотношение

$$H_1(\delta[u),\Delta[\mathbf{x})) = \frac{\delta\Delta^d}{t^{d/2}}C_2e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\alpha})}(1+o(1)),$$

где

$$C_2 := \psi_1\left(\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right),\boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right)\right)C(\theta,\boldsymbol{\alpha}),$$

$$C(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \sqrt{\frac{\widehat{\theta}^d}{(2\pi\theta)^d}\frac{\left|\Lambda''(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})\right|}{(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})\Lambda''(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})^T}},\quad(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})=A'\left(\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right),\boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right)\right),$$

остаточный член $o(1)$ равномерен по $(\theta,\boldsymbol{\alpha})\in K_{\mathfrak{A}}$.

Вернемся к одномерному случаю $d = 1$. В силу условия $[\mathbf{B_1}]$ имеем

$$(\lambda_+, \mu(\beta_{\alpha_0})) \in (\mathcal{A})$$

и, следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших t для точек (u, x), где $u \in (t(\theta_\alpha - \varepsilon),\ t(\theta_\alpha + \varepsilon))$ применима интегро-локальная теорема для меры восстановления $H_1(\delta[t), \Delta[x))$. В силу этой теоремы получаем при $t \to \infty$

$$H_1(\delta[t\theta_\alpha + y_k), \Delta[x)) = \frac{\delta\Delta}{t^{1/2}} C_2 f\left(\frac{y_k}{t}\right)(1 + o(1)),$$

где

$$f(v) := e^{-tD(\theta_\alpha + v, \alpha)},\ C_2 = C_2(\beta_{\alpha_0}) = \psi_1(\lambda_+, \mu(\beta_{\alpha_0}))C_3(\beta_{\alpha_0}),$$

$$C_3(\beta_{\alpha_0}) := \sqrt{\frac{1}{2\pi\theta_{\alpha_0}\widehat{\theta}} \frac{\left|\Lambda''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})\right|}{(1, \beta_{\alpha_0})\Lambda''(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})(1, \beta_{\alpha_0})^T}},\quad (\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) = A'(\lambda_+, \mu(\beta_{\alpha_0})),$$

остаточный член $o(1) = o_{k,t}(1)$ равномерен по k таким, что $|y_k| \le \varepsilon t$. Поэтому в силу (2.23) имеем

$$\frac{\delta\Delta}{t^{1/2}} C_2 \sum_{|y_k| \le \varepsilon t} f\left(\frac{y_k}{t}\right) g\left(\frac{y_{k-1}}{t}\right)(1+o(1)) \le J_1 \le \frac{\delta\Delta}{t^{1/2}} C_2 \sum_{|y_k| \le \varepsilon t} f\left(\frac{y_k}{t}\right) g\left(\frac{y_{k+1}}{t}\right)(1+o(1)).$$

Заметим, что для $y_{k-2} \le y' < y_{k-1}$, $y_{k+1} \le y'' < y_{k+2}$ справедливо

$$g\left(\frac{y'}{t}\right) \le g\left(\frac{y_{k-1}}{t}\right) \le g\left(\frac{y_{k+1}}{t}\right) \le g\left(\frac{y''}{t}\right).$$

При этом для $|z| \le \delta \to 0$ при $t \to \infty$ справедливо

$$f\left(\frac{y_k + z}{t}\right) = f\left(\frac{y_k}{t}\right)(1 + o(1)),$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по k, таким, что $|y_k| \le \varepsilon t$. Поэтому для $h(v) := f(v)g(v)$ при $t \to \infty$

$$\Delta C_2 I_1\left(-\frac{2\delta}{t}\right)(1 + o(1)) \le J_1 \le \Delta C_2 I_1\left(\frac{2\delta}{t}\right)(1 + o(1)), \tag{2.24}$$

где

$$I_1(v) := \sqrt{t}\int_{|y| \le \varepsilon + v} h(y)dy,$$

и нам достаточно изучить асимптотическое поведение интеграла $I_1 := I_1(0)$. Для $|y| \le \varepsilon$ при $t \to \infty$ имеем, в силу условия $[F_\tau]$,

$$g(y) = \mathbf{P}(\tau \ge t(1 - \theta_\alpha - y)) = (1 - \theta_\alpha)^\kappa l(t) e^{-t[\lambda_+(1-\theta_\alpha-y) - c(1-\theta_\alpha-y)^\gamma t^{\gamma-1}]}(1 + o(1)),$$

поэтому

$$I_1 = (1 - \theta_{\alpha_0})^\kappa l(t) I_2 (1 + o(1)), \tag{2.25}$$

где

$$I_2 := \sqrt{t}\int_{|y| \le \varepsilon} e^{-tD(\theta_\alpha + y, \alpha)} e^{-t[\lambda_+(1-\theta_\alpha-y) - c(1-\theta_\alpha-y)^\gamma t^{\gamma-1}]} dy.$$

Используя обозначения леммы 2.2 и соотношение (2.11), имеем

$$D(\theta_\alpha + y, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta_\alpha - y) - c(1 - \theta_\alpha - y)^\gamma t^{\gamma-1} =$$

$$D_Z(\alpha)+G(y,t^{\gamma-1},\alpha)=\Pi(t^{\gamma-1},\alpha)+G(y,t^{\gamma-1},\alpha)-G(y_\alpha(t^{\gamma-1}),t^{\gamma-1},\alpha)+o\left(\frac{1}{t}\right),$$

поэтому

$$I_2=e^{-t\Pi(t^{\gamma-1},\alpha)}I_3(1+o(1)), \tag{2.26}$$

где

$$I_3:=\sqrt{t}\int_{|y|\le\varepsilon}e^{-tM(y,t^{\gamma-1},\alpha)}dy,\quad M(y,u,\alpha):=G(y,u,\alpha)-G(y_\alpha(u),u,\alpha).$$

В силу леммы 2.2 для всех достаточно больших t функция $M(y,u,\alpha)$ при $|y|\le\varepsilon$ имеет единственный минимум в точке $y_\alpha=y_\alpha(u)\to 0$ при $u\to 0$ и при этом в окрестности точки минимума ведет себя как парабола. Вторая производная $M''(y,u,\alpha)$ по аргументу y непрерывна по аргументам (y,u,α) в некоторой окрестности точки $(0,0,\alpha_0)$. Поэтому при $|u|\le\varepsilon$, $t\to\infty$

$$M(y,t^{\gamma-1},\alpha)=\frac{1}{2}b^2(\alpha_0)(y-y_\alpha)^2(1+o(1)),\quad y_\alpha=y_a(t^{\gamma-1})=o(1),$$

где (см. лемму 2.1)

$$b^2(\alpha_0):=\frac{\partial^2}{\partial y^2}D(\theta_{\alpha_0}+y,\alpha_0)|_{y=0}=-\frac{\beta_{\alpha_0}\lambda'(\beta_{\alpha_0})}{\theta_{\alpha_0}}>0.$$

Это позволяет отыскать асимптотику интеграла I_3:

$$I_3=\int_{|y-y_\alpha|\le\varepsilon}e^{-\frac{1}{2}b^2(\alpha_0)t(y-y_\alpha)^2(1+o(1))}d\sqrt{t}(y-y_\alpha)(1+o(1))=\frac{\sqrt{2\pi}}{b(\alpha_0)}(1+o(1)). \tag{2.27}$$

Собирая формулы (2.24)—(2.27), получаем утверждение леммы 2.3. □

Сейчас, используя эту лемму, продолжим доказательство теоремы 2.1. Оценим сверху два интеграла

$$J_2:=\int_0^{t(\theta_\alpha-\varepsilon)}H_1(dy,\Delta[x])\mathbf{P}(\tau\ge t-y),$$

$$J_3:=\int_{t(\theta_\alpha+\varepsilon)}^{t}H_1(dy,\Delta[x])\mathbf{P}(\tau\ge t-y).$$

Оценим сначала первый. Для $y_k=\delta k$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$:

$$J_2\le\sum_{k=0}^{[t(\theta_\alpha-\varepsilon)/\delta]}H_1(\delta[y_k),\Delta[x))\mathbf{P}(\tau\ge t-y_k). \tag{2.28}$$

Воспользуемся далее следующим утверждением (лемма 5.2 в [1]):

Лемма 2.4. *Для некоторых $C<\infty$, $t_0<\infty$ и всех*

$$t\ge t_0,\quad 0\le y\le t,\quad \delta\in(0,1],\quad \Delta\in(0,1],$$

для $\theta:=\frac{y}{t}$, $\alpha:=\frac{x}{t}$ справедливо неравенство

$$H_1(\delta[y),\Delta[x))\le Ct^2e^{-\lambda(\alpha)y-\mu(\alpha)x}=Ct^2e^{-tD(\theta,\alpha)}. \tag{2.29}$$

Из экспоненциального неравенства Чебышева получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \ge t(1-\theta)) \le -\lambda_+(1-\theta). \tag{2.30}$$

Из соотношений (2.28)—(2.30) вытекает оценка сверху для $\ln J_2$:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln J_2 \le - \inf_{0\le\theta\le\theta_\alpha-\varepsilon} \{D(\theta,\alpha) + \lambda_+(1-\theta)\}. \tag{2.31}$$

Функция

$$f_\alpha(\theta) := D(\theta,\alpha) + \lambda_+(1-\theta)$$

в пределах $\theta \in [0,1]$ при $\alpha \in (\beta_-,0)\cup(0,\beta_+)$ выпукла, достигает единственного минимума (равного $D_Z(\alpha)$) в точке $\theta = \theta_\alpha$ и в некоторой окрестности точки θ_α ведет себя как парабола. Поэтому для некоторого $c = c(\alpha,\varepsilon) > 0$ правая часть (2.31) не превосходит $-(D_Z(\alpha)+c)$. Из последнего и из оценки для J_1, полученной в лемме 2.3, вытекает, что при $t\to\infty$ выполняется

$$J_2 = o(e^{-t(D_Z(\alpha)+c/2)}) = o(J_1). \tag{2.32}$$

Аналогично (2.31) получаем неравенство

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln J_3 \le - \inf_{\theta_\alpha+\varepsilon\le\theta\le 1} \left\{D(\theta,\alpha) + \lambda_+(1-\theta)\right\},$$

из которого получаем

$$J_3 = o(J_1). \tag{2.33}$$

Из соотношений (2.32), (2.33) получаем

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = J_1(1+o(1)).$$

Остается воспользоваться леммой 2.3 и заметить, что правая часть (2.22) совпадает с правой частью (2.13). Теорема 2.1 доказана.

□

3. Нерегулярные уклонения для о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ в многомерном случае

Утверждения в многомерном случае выглядят довольно схожим образом с аналогичными утверждениями для одномерного случая. Это же можно сказать и про доказательства в многомерном и одномерном случаях. Однако, для удобства читателя мы приведем их в полном объеме.

Как и в одномерном случае, мы приведем интегро-локальную предельную теорему для вероятности

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x})\right) \text{ при } t\to\infty, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) : \frac{\mathbf{x}}{t} \in K \subset \mathfrak{B}\setminus\{\mathbf{0}\}$ – фиксированный компакт и $\Delta[\mathbf{x}) = \Delta[x_{(1)}) \times \ldots \times \Delta[x_{(d)})$ — куб со стороной $\Delta > 0$ и вершиной $\mathbf{x}$.

3.1. **Основные обозначения. Технические леммы.** Обозначим

$$\mathfrak{E} := \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d : \quad |\mathbf{e}| = 1\}$$

единичную сферу в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим условие

$[\mathbf{B}_d]$. *Выполнено условие* $\lambda_+ < D(\mathbf{0})$ *и существует точка* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^d$*, такая, что*

$$D(\mathbf{0}) = -A(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0})) = -\inf_{\boldsymbol{\mu}} A(\boldsymbol{\mu}).$$

Для любого $\mathbf{e} \in \mathfrak{E}$ *уравнение*

$$A(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) + y\mathbf{e}) = -\lambda_+, \quad y > 0,$$

имеет ровно одно решение $y_\mathbf{e} > 0$*, и при этом для*

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{e} := \boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) + y_\mathbf{e}\mathbf{e}$$

выполнено

$$(-A(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{e}), \boldsymbol{\mu}_\mathbf{e}) = (\lambda_+, \boldsymbol{\mu}_\mathbf{e}) \in (\mathcal{A}).$$

Везде ниже в настоящем разделе будем считать, что выполнено условие $[\mathbf{B}_d]$. В этом случае множество

$$\mathfrak{M}_0 := \{\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in \mathfrak{E}\}$$

состоит из всех решений уравнения

$$A(\boldsymbol{\mu}) = -\lambda_+.$$

При этом выполнено включение $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, где, напомним,

$$\mathfrak{M} := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ (A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A})\},$$

и множество $\mathfrak{M}_0$ является границей выпуклого замкнутого телесного множества

$$\mathfrak{M}_- := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ A(\boldsymbol{\mu}) \leq -\lambda_+\},$$

т.е.

$$\mathfrak{M}_0 = \partial\mathfrak{M}_-.$$

Обозначим

$$\mathfrak{B}_0 := \{\boldsymbol{\beta} = A'(\boldsymbol{\mu}) : \ \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}_0\}.$$

Тогда, как установлено в лемме 3.1 (см. ниже), звездчатое множество (см. лемму 1.2)

$$\mathfrak{B} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ D_Z(\boldsymbol{\alpha}) < D(\boldsymbol{\alpha})\}$$

имеет вид

$$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{\alpha} = \theta\boldsymbol{\beta} : \ \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_0, \quad \theta \in [0, 1)\}. \tag{3.2}$$

При этом для любого $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_0$ существует единственное решение $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})$ уравнения

$$A'(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\beta},$$

и при этом выполняется

$$D_Z(\boldsymbol{\beta}) = D(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - A(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \lambda_+.$$

Более того, для всех $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ найдется $c_{\boldsymbol{\alpha}} > 0$ такое, что

$$c_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}_0. \tag{3.3}$$

Действительно, в силу условия $[\mathbf{B_d}]$ множество $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, и в силу того, что для всех $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ выполняется $A''(\boldsymbol{\mu}) > 0$, множество $\mathfrak{M}_-$ является замкнутым, выпуклым и ограниченным множеством с гладкой границей, не имеющей прямолинейных участков. Тогда для каждого $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ найдутся две гиперплоскости $l_\pm$ с нормалью $\boldsymbol{\alpha}$, пересекающих множество

$$\mathfrak{M}_-(0) := \{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \,:\, \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}_-\}$$

только в одной точке $\mu_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\pm)}$. Тогда для некоторых $c_{\boldsymbol{\alpha}}^{\pm} > 0$ выполнено

$$A(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\pm)}) = -\lambda_+, \; A'(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\pm)}) = \pm c_{\boldsymbol{\alpha}}^{\pm} \boldsymbol{\alpha}.$$

Следовательно, $c_{\boldsymbol{\alpha}}^{+} \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}_0$. Соотношение (3.3) доказано.

Обозначим $\theta_{\boldsymbol{\alpha}} \in [0,1]$ точку, в которой достигается нижняя грань в соотношении (1.10):

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{0 \le \theta \le 1} f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) = f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}), \quad f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta) := D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1-\theta).$$

Поскольку функция $f_{\boldsymbol{\alpha}}(\theta)$ выпукла и полунепрерывна снизу, то точка $\theta_{\boldsymbol{\alpha}} \in [0,1]$ при любом фиксированном $\boldsymbol{\alpha}$ определена (в случае, когда таких точек несколько, через $\theta_{\boldsymbol{\alpha}}$ обозначим максимальную на отрезке $[0,1]$). Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие* $[\mathbf{B}_d]$. *Тогда множество* $\mathfrak{B}_0$ *является границей открытого звездчатого множества* $\mathfrak{B}$, *т.е. (см. (3.2)) для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}$ *имеет место представление*

$$\boldsymbol{\alpha} = \theta(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{где} \quad \theta(\alpha) \in [0,1), \quad \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{B}_0,$$

и выполняется

$$\theta_{\boldsymbol{\alpha}} = \theta(\boldsymbol{\alpha}), \quad D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_+ + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}). \tag{3.4}$$

При этом, для любого $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathfrak{B}]$ *в некоторой окрестности точки* $y = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y} D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y, \boldsymbol{\alpha})|_{y=0} = \frac{-\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}}} > 0.$$

Как и в одномерном случае, точная асимптотика вероятностей (3.1) будет найдена при выполнении условия $[\mathbf{F}_\tau]$. (см. раздел 2.1)

Для $y, u \in [-1,1], \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}$ обозначим

$$G(y,u,\boldsymbol{\alpha}) = D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y, \boldsymbol{\alpha}) - D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) - \lambda_+ y - c(1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y)^\gamma u,$$

где константы $c \in \mathbb{R}, \gamma \in [0,1)$ взяты из условия $[\mathbf{F}_\tau]$,

В случае $\gamma = 0$ имеем $c = 0$ (см. условие $[\mathbf{F}_\tau]$), поэтому $G(y,u,\boldsymbol{\alpha})$ не зависит от параметра u. Следовательно, в этом случае мы будем опускать параметр u.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* $[\mathbf{B}_d]$, $[\mathbf{F}_\tau]$, $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathfrak{B}$. *Тогда найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| < \varepsilon, |u| < \varepsilon$

$$\inf_{y \in [-\varepsilon, \varepsilon]} G(y,u,\boldsymbol{\alpha}) = G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha}),$$

где $y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$ *является единственным решением уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y,u,\boldsymbol{\alpha}) = 0, \tag{3.5}$$

причем $\frac{\partial^2}{\partial y^2}G(y,u,\boldsymbol{\alpha})>0$ *для всех* $y\in[-\varepsilon,\varepsilon]$.

При этом, верны следующие соотношения

$$y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)\to 0 \text{ при } u\to 0;\quad G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u),u,\boldsymbol{\alpha})=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\boldsymbol{\alpha})u^k, \tag{3.6}$$

где для аналитических в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0$ *функций* $g_k(\boldsymbol{\alpha})$ *существует конечный алгоритм их нахождения, в частности: если* $\gamma\in(0,1)$, *то*

$$g_1(\boldsymbol{\alpha})=-c(1-\theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma},\qquad g_2(\boldsymbol{\alpha})=\frac{(\gamma c)^2\theta_{\boldsymbol{\alpha}}(1-\theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{2(\gamma-1)}}{\lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}};$$

если $\gamma=0$, *то для всех* $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0|<\varepsilon$

$$y_{\boldsymbol{\alpha}}=0,\quad G(y_{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\alpha})=0.$$

Доказательство леммы 3.2 является весьма техническим и основывается только на лемме 3.1 и определении функции $G(y,u,\boldsymbol{\alpha})$, поэтому мы его приведем в разделе 4.2.

Асимптотику вероятности (3.1) в случае $\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{B}$ будет описывать полином

$$\Pi(u,\boldsymbol{\alpha})=\sum_{k=0}^{k_0} g_k(\boldsymbol{\alpha})u^k,$$

где $k_0:=\left[\frac{1}{1-\gamma}\right]$, $g_0(\boldsymbol{\alpha})=D_Z(\boldsymbol{\alpha})$, а функции $g_k(\boldsymbol{\alpha})$ для $k=1,\dots,k_0$ определяются в лемме 3.2. В случае $\gamma=0$ полином $\Pi(u,\boldsymbol{\alpha})$ вырождается в единственное слагаемое $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$.

Для $u=t^{\gamma-1},\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_t\to\boldsymbol{\alpha}_0\in\mathfrak{B}$ при $t\to\infty$, в силу леммы 3.2, справедливо

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha})+G(y_{\boldsymbol{\alpha}}t^{\gamma-1},t^{\gamma-1},\boldsymbol{\alpha})=\Pi(t^{\gamma-1},\boldsymbol{\alpha})+o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Наконец, для формулировки основной теоремы настоящего раздела нам необходима константа

$$C(\boldsymbol{\alpha}):=C_1(\boldsymbol{\alpha})(1-\theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma},\quad \boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{B}$$

$$C_1(\boldsymbol{\alpha}):=\sqrt{\frac{-\widehat{\theta}^{d-2}}{(2\pi\theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{d-1}\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})}\frac{\left|\Lambda''(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})\right|}{(1,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})\Lambda''(\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})(1,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})^T}},\ \ (\widehat{\theta},\widehat{\boldsymbol{\alpha}})=\mathbf{A}'(\lambda_+,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})).$$

3.2. **Формулировка основного результата в многомерном случае.**

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* $[\mathbf{B}_d]$, $[\mathbf{F}_\tau]$. *Пусть фиксирован компакт*

$$K\subset\mathfrak{B}\setminus\{\mathbf{0}\},$$

и для всех $\boldsymbol{\alpha}\in K$ *выполнено условие*

$$(\lambda_+,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}))\in(\mathcal{A}_1).$$

Тогда для функции $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^d$ *такой, что* $\alpha:=\frac{\mathbf{x}}{t}\in K$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t)\in\Delta[\mathbf{x}])=\frac{\Delta^d}{t^{(d-1)/2}}l(t)\psi_1(\lambda_+,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}))C(\boldsymbol{\alpha})e^{-t\Pi(t^{\gamma-1},\boldsymbol{\alpha})}(1+o(1)), \tag{3.7}$$

где $\Delta = \Delta(t) \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$*, остаточный член* $o(1) = o_{\boldsymbol{\alpha},t}(1)$ *стремится к 0 при* $t \to \infty$ *равномерно по* $\boldsymbol{\alpha} \in K$.

Доказательство теоремы 3.1 слово в слово повторяет доказательство теоремы 2.1 с очевидной заменой множества $(\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ на $\mathfrak{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ и заменой лемм 2.1, 2.2 на леммы 3.1, 3.2.

Доказательство следующего утверждения полностью повторяет доказательство следствия 3.1 в [7],[8].

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Если* $\Delta > 0$ *фиксировано, то справедливо соотношение*

(3.8)
$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\mathbf{x})) = \prod_{i=1}^{d} \mathbf{p}(\Delta\mu_{(i)}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})) \frac{\Delta^d}{t^{(d-1)/2}} l(t)\psi_1(\lambda_+, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}))C(\boldsymbol{\alpha})e^{-t\Pi(t^{\gamma-1},\boldsymbol{\alpha})}(1+o(1)),$$

где функция $\mathbf{p}(y)$ *определена в (2.15), остаточный член* $o(1)$ *стремится к 0 при* $t \to \infty$ *равномерно по* $\boldsymbol{\alpha} \in K$.

Легко видеть, что из соотношения (3.8) вытекает утверждение интегро-локальной теоремы (3.7). Поэтому соотношение (3.8) является "другой формой" (эквивалентной) интегро-локальной теоремы для $Z(t)$.

3.3. **Доказательство леммы 3.1.** Докажем сначала, что для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}\setminus\{\mathbf{0}\}$ справедливо

$$\lambda'(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T < 0. \tag{3.9}$$

Заметим прежде, что дифференцируя (1.23) и используя (1.20), получаем для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$ соотношение

$$\lambda'(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\alpha}),$$

поэтому нам достаточно убедиться, что матрица $\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\alpha})$ положительно определена. В свою очередь (см. (1.20)), функция $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$ при $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$ является единственным решением векторного уравнения

$$A'(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\alpha},$$

поэтому

$$\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{\alpha}) = \left(A''(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))\right)^{(-1)},$$

и нам достаточно доказать, что для $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}$ матрица $A''(\boldsymbol{\mu})$ положительно определена. Этот факт установлен в лемме 2.1 из [1], но для автономности изложения приведем его доказательство. Функция $A(\boldsymbol{\mu})$ определяется как решение уравнения

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = 0. \tag{3.10}$$

Дифференцируя уравнение (3.10) по $\boldsymbol{\mu}$, получаем векторное уравнение

$$A'_{(\lambda)}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu})A'(\boldsymbol{\mu}) = A'_{(\boldsymbol{\mu})}(\lambda_{\mu}, \boldsymbol{\mu}), \tag{3.11}$$

где $\lambda_{\boldsymbol{\mu}} := -A(\boldsymbol{\mu})$. Продифференцировав уравнение (3.11) по $\boldsymbol{\mu}$, получим матричное уравнение

$$A'_{(\lambda)}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu})A''(\boldsymbol{\mu}) =$$
$$(A'(\boldsymbol{\mu}))^T A''_{(\lambda,\lambda)}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}})A'(\boldsymbol{\mu}) - 2(A'(\boldsymbol{\mu}))^T A''_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu}) + A''_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu})}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu}).$$

Поэтому для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ получаем равенство квадратичных форм

$$A'_{(\lambda)}(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu})\mathbf{x}A''(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x}^T = (-A'(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x}, \mathbf{x})A''(\lambda_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu})(-A'(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x}, \mathbf{x})^T.$$

Поскольку в области $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A})$ матрица $A''(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ положительно определена, а

$$A'_{(\lambda)}(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \frac{\mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}\tau}{\mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}} > 0,$$

то для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \neq 0$ имеем

$$\mathbf{x}A''(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x}^T > 0.$$

Таким образом матрица $A''(\boldsymbol{\mu})$ положительно определена. Тем самым неравенство (3.9) доказано.

Вернемся, наконец, к доказательству леммы 3.1. Зафиксируем $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_0$. Из $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{A}$ следует, что функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) = D'(\boldsymbol{\alpha})$ аналитичны в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. Для $\boldsymbol{\alpha} \in [0, \boldsymbol{\beta}), \theta(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\beta}|} \in [0, 1)$, вычисляя первые две производные в окрестности $y = 0$ для выпуклой функции

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(y) := D(\theta(\boldsymbol{\alpha})+y, \boldsymbol{\alpha})+\lambda_+(1-\theta(\boldsymbol{\alpha})-y) = (\theta(\boldsymbol{\alpha})+y)D\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta(\boldsymbol{\alpha})+y}\right)+\lambda_+(1-\theta(\boldsymbol{\alpha})-y),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} f_{\boldsymbol{\alpha}}(y) = \lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta(\boldsymbol{\alpha})+y}\right) - \lambda_+; \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{\boldsymbol{\alpha}}(y) = \frac{-1}{(\theta(\boldsymbol{\alpha})+y)^2}\boldsymbol{\alpha}\lambda'\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta(\boldsymbol{\alpha})+y}\right). \tag{3.13}$$

В силу выпуклости функции $f_{\boldsymbol{\alpha}}(y)$ и соотношений (3.9), (3.12), (3.13), эта функция достигает минимума в единственной точке $y = 0$, и при этом

$$\theta_{\boldsymbol{\alpha}} = \theta(\boldsymbol{\alpha});$$

при этом, из (1.24) следует

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \theta(\boldsymbol{\alpha})D(\boldsymbol{\beta})+\lambda_+(1-\theta(\boldsymbol{\alpha})) = \theta_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})+\lambda_+)+\lambda_+(1-\theta_{\boldsymbol{\alpha}}) = \lambda_+ + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Поэтому при $\boldsymbol{\alpha} \in [0, \boldsymbol{\beta})$ соотношения (3.4) имеют место. Нам осталось доказать равенство (3.2). Обозначим правую часть (3.2) через

$$\mathfrak{B}_1 := \{\boldsymbol{\alpha} = \theta\boldsymbol{\beta} : \ \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_0, \quad \theta \in [0, 1)\}.$$

Пусть $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{B}_1$. Тогда, в силу доказанного, $\theta_{\boldsymbol{\alpha}} = \theta(\boldsymbol{\alpha}) < 1, \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{\boldsymbol{\alpha}}(0) > 0$ и, следовательно,

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) < D(\boldsymbol{\alpha}).$$

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha} \notin \mathfrak{B}_1$. Тогда $\theta(\boldsymbol{\alpha}) \geq 1$ и, следовательно,

$$\theta_{\boldsymbol{\alpha}} = 1, \ D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = D(\boldsymbol{\alpha}).$$

Таким образом, (3.2) установлено. Лемма 3.1 доказана.

□

4. Доказательство вспомогательных лемм 2.2, 3.2

Данный раздел мы приведем сразу в многомерном случае.

4.1. **Лемма об обратной функции.** Для функции $\phi(z) = \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)$ рассмотрим следующее условие

$[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$. *Функция $\phi(z)$ представляется в виде степенного ряда*

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\boldsymbol{\alpha}) z^k,$$

где для некоторых $M < \infty$, $\varepsilon > 0$ и всех $k = 0, 1, \cdots$

$$\sup_{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0|\le\varepsilon} |b_k(\boldsymbol{\alpha})| \le M^{k+1}$$

и коэффициенты $b_k(\boldsymbol{\alpha})$ аналитичны в точке $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$.
Нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 4.1. *I. Пусть степенной ряд*

$$\phi(z) = \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\boldsymbol{\alpha}) z^k$$

удовлетворяет условию $[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$ и, кроме того, для некоторых $\delta > 0$, $\gamma > 0$

$$\inf_{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0|\le\gamma} |b_1(\boldsymbol{\alpha})| \ge \delta > 0.$$

Тогда существует единственный степенной ряд

$$\psi(z) = \psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\boldsymbol{\alpha}) z^k,$$

такой, что

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)) = z; \tag{4.1}$$

при этом ряд $\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)$ удовлетворяет условию $[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$.

II. Пусть

$$\phi(z) = \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z), \quad \psi(z) = \psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)$$

—две функции, удовлетворяющие условию $[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$.

Тогда каждая из функций

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(z) := \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)), \quad f_{\boldsymbol{\alpha}}(z) := \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z) + \psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z), \quad f_{\boldsymbol{\alpha}}(z) := \phi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z)$$

удовлетворяет условию $[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$.

Доказательство. I. Существование и единственность ряда

$$\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\boldsymbol{\alpha}) z^k,$$

удовлетворяющего уравнению (4.1) и такого, что для некоторых $\varepsilon > 0$ и $M < \infty$ выполняется

$$\sup_{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0|\le\varepsilon} |c_k(\boldsymbol{\alpha})| \le M^{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

является следствием из теоремы 7.1 в [9], Гл. IV, § 6, с. 179 и интегральной формулы Коши (см.,например, теорему 3.2* в [9], Гл.II,§ 3, с. 73). Представляя тождество (4.1) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right)^k = z,$$

мы можем рекурентным образом отыскать все коэффициенты $c_k = c_k(\boldsymbol{\alpha})$ для $k = 1, 2, \cdots$:

$$c_1 = \frac{1}{b_1}, \quad c_2 = -\frac{b_1 c_1^2}{b_1}, \quad \cdots, \quad c_k = \frac{f_k(c_1, \cdots, c_{k-1}; b_1, \cdots, b_k)}{b_1},$$

где функция f_k получается с помощью конечного числа арифметических операций сложения и умножения, примененных к аргументам этой функции. Из этих формул (с привлечением математической индукции) вытекает аналитичность функций $c_k = c_k(\boldsymbol{\alpha})$ при всех $k \geq 1$. Утверждения I доказано.

II. Утверждения части II достаточно очевидны, поэтому мы опускаем их доказательства. $\square$

4.2. **Доказательство леммы 3.2 (леммы 2.2).** Обозначим

$$G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) := D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y, \boldsymbol{\alpha}) - D(\theta_{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) - \lambda_+ y,$$

$$G_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y) := -c(1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y)^\gamma,$$

так что

$$G(y, u, \boldsymbol{\alpha}) = G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) + G_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y)u.$$

В силу выпуклости второй функции уклонений $D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ функция $G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y)$ аргумента $y \in \mathbb{R}$ выпукла. При этом (см. лемму 3.1)

$$(4.2)\quad G'_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) = \lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y}\right) - \lambda_+, \quad G''_{1,\boldsymbol{\alpha}}(0) := G''_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y)|_{y=0} = -\frac{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}) > 0,$$

так что выпуклая функция $G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y)$ аргумента $y \in \mathbb{R}$ достигает минимума в единственной точке $y = 0$ и в некоторой окрестности точки минимума ведет себя как парабола

$$G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) = \frac{y^2}{2}G''_{1,\boldsymbol{\alpha}}(0)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

Далее, найдутся $\delta > 0$, $N < \infty$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что при всех $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| \leq \varepsilon_1$, $|y| \leq \varepsilon_1$ выполняются неравенства $G''_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) \geq \delta$, $G''_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y) \geq -N$. Поэтому найдется $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что

$$G''(y) \geq \delta/2$$

для всех $|y| \leq \varepsilon_1$, $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| \leq \varepsilon$, $|u| \leq \varepsilon$. Из последнего следует: *минимум функции*

$$G(y) := G(y, u, \boldsymbol{\alpha})$$

аргумента y на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ при $|\boldsymbol{\alpha} - a_0| \leq \varepsilon$, $|u| \leq \varepsilon$ достигается в единственной точке $y = y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$, которая является единственным решением уравнения (3.5):

$$(4.3)\qquad G'(y) = \lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y}\right) - \lambda_+ + c\gamma(1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y)^{\gamma-1}u = 0.$$

Если $\gamma = 0$, то $= 0$ (см. условие $[\mathbf{F}_\tau]$) и в силу того, что

$$\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) - \lambda_+ = \lambda(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}) - \lambda_+ = 0,$$

единственным решением уравнения (4.3) является $y_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ при всех значениях $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

Пусть теперь $\gamma \in (0,1)$, и тогда $c \neq 0$ (см. [$\mathbf{F}_\tau$]). Докажем в этом случае соотношения (3.6). Задача отыскания решения уравнения (4.3) эквивалентна задаче построения обратной функции к аналитической функции

$$u(y) = u_{\boldsymbol{\alpha}}(y) := \frac{1}{\gamma c}\left[\lambda_+ - \lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y}\right)\right](1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y)^{1-\gamma}, \quad |y| \leq \varepsilon. \tag{4.4}$$

Функция $u(y)$ удовлетворяет равенству $u(0) = 0$, поэтому она представляется в виде степенного ряда

$$u(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\boldsymbol{\alpha}) y^k,$$

и для того, чтобы воспользоваться утверждением части I леммы 4.1 достаточно убедиться, что для некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $M < \infty$ и при всех $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| \leq \varepsilon$, выполняются соотношения

$$|b_1(\boldsymbol{\alpha})| \geq \delta, \tag{4.5}$$

$$|b_k(\boldsymbol{\alpha})| \leq M^k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{4.6}$$

Представим функцию $u(y) = u_{\boldsymbol{\alpha}}(y)$ в виде

$$u(y) = u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y),$$

где (см. (4.2))

$$u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) := G'_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) = \lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y}\right) - \lambda_+, \quad u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) := -\frac{1}{\gamma c}(1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y)^{1-\gamma}.$$

В силу второго соотношения в (4.2) имеем для всех $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})$

$$|b_1(\boldsymbol{\alpha})| = |u'(0)| = |u'_{1,\boldsymbol{\alpha}}(0)| u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(0)| = |G''_{1,\boldsymbol{\alpha}}(0)||u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(0)| > 0,$$

так что соотношение (4.5) выполнено.

Для проверки (4.6) достаточно заметить, что аналитические функции

$$u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y), \quad u_{3,\boldsymbol{\alpha}}(y) := u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y) - u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(0)$$

представляются степенными рядами, удовлетворяющими условию [$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}$], и при этом

$$u_{\boldsymbol{\alpha}}(y) = u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) u_{3,\boldsymbol{\alpha}}(y) + u_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) u_{2,\boldsymbol{\alpha}}(0).$$

Остается воспользоваться утверждениями части II леммы 4.1. Соотношение (4.6) установлено.

Применяя далее утверждение части I леммы 4.1, в силу соотношений (4.5), (4.6) получаем, что функция $y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$ (решение уравнения(3.5)) удовлетворяет условию [$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}$] и $y_{\boldsymbol{\alpha}}(0) = 0$. Следовательно,

$$y_{\boldsymbol{\alpha}}(u) \to 0 \text{ при } u \to 0.$$

Далее, очевидным образом (применяя утверждения части II леммы 4.1) можно установить, что функции $G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y)$, $G_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y)$ представляются в виде степенных рядов

$$G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\boldsymbol{\alpha}) y^k, \quad G_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\boldsymbol{\alpha}) y^k,$$

и при этом для некоторых $\varepsilon > 0$, $M < \infty$ при всех $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| \leq \varepsilon$ выполняется

$$|a_k(\boldsymbol{\alpha})| \leq M^{k+1}, \quad |b_k(\boldsymbol{\alpha})| \leq M^{k+1}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

Поэтому, используя утверждение II леммы 4.1, функция

$$G_{\boldsymbol{\alpha}}(u) := G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha}) = G_{1,\boldsymbol{\alpha}}(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)) + uG_{2,\boldsymbol{\alpha}}(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u))$$

удовлетворяет условию $[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}_0}]$.

Таким образом, нам осталось привести алгоритм нахождения коэффициентов $g_k(\boldsymbol{\alpha})$, где

$$G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\boldsymbol{\alpha}) u^k.$$

Из $y_{\boldsymbol{\alpha}}(0) = 0$ следует, что $g_0(\boldsymbol{\alpha}) = G(0, 0, \boldsymbol{\alpha}) = 0$. Далее, используя лемму 3.1, легко вычислить

$$g_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{d}{du} G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{u=0} =$$

$$y'(0) \frac{\partial}{\partial y} G(y, u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{(y,u)=(0,0)} + \frac{\partial}{\partial u} G(y, u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{(y,u)=(0,0)} = -c(1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma}.$$

Аналогично,

$$g_2(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{d^2}{du^2} G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{u=0} =$$

$$(y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0))^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(y, u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{(y,u)=(0,0)} + 2y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0) \frac{\partial^2}{\partial y \partial u} G(y, u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{(y,u)=(0,0)} +$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} G(y, u, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{(y,u)=(0,0)} = -(y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0))^2 \frac{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}}} + 2y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0) c\gamma (1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma - 1}.$$

Таким образом, получили

$$g_2(\boldsymbol{\alpha}) = -(y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0))^2 \frac{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}}} + 2y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0) c\gamma (1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma - 1}. \tag{4.7}$$

Производную $y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0)$ мы найдем из уравнения (4.4): для некоторого $\delta > 0$, для всех $u \in (-\delta, \delta)$ выполнено

$$u = \frac{1}{\gamma c} \left(\lambda_+ - \lambda \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_{\boldsymbol{\alpha}} + y_{\boldsymbol{\alpha}}(u)} \right) \right) (1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}} - y_{\boldsymbol{\alpha}}(u))^{1-\gamma}. \tag{4.8}$$

Следовательно,

$$y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \frac{\gamma c \theta_{\boldsymbol{\alpha}} (1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{\gamma - 1}}{\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}) \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Подставляя эту формулу для производной $y'_{\boldsymbol{\alpha}}(0)$ в (4.7), получаем

$$g_2(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{(\gamma c)^2 \theta_{\boldsymbol{\alpha}} (1 - \theta_{\boldsymbol{\alpha}})^{2(\gamma - 1)}}{\lambda'(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}) \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Аналогичным образом, дифференцируя нужное число раз функцию $G(y_{\boldsymbol{\alpha}}(u), u, \boldsymbol{\alpha})$ и уравнение (4.8), находим другие коэффициенты $g_k(\boldsymbol{\alpha})$. Лемма 3.2 доказана.

$\square$

References

[1] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502.

[2] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 528–553.

[3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. IV,* Siberian Electronic Mathematical Reports, In press.

[4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, In press.

[5] R. Lefevere, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes and their Applications, **121**:10 (2011), 2243–2271. Zbl 1228.60035

[6] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18** (2013), paper 52, 1–13. Zbl 1300.60039

[7] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514.

[8] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750.

[9] M.A. Evgrafov, *Analytic functions,* Second Edition, Moscow: Nauka, 1968. Zbl 0157.39302

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

Evgenii Igorevich Prokopenko
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com