S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 528–553 (2018) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2018.15.043 MSC 60K05, 60F10

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ МОМЕНТНОМ УСЛОВИИ КРАМЕРА. III.

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. In the work, which consists of 4 papers (the article and [3]—[5]), we obtain integro-local limit theorems in the phase space for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. In the part III (the article) we consider the so-called second renewal process in a regular deviation region.

Keywords: compound multidimensional renewal process, second renewal process, large deviations, integro-local limit theorems, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function.

Настоящая статья состоит из 4-х разделов. Разделы 1 и 2 посвящены одномерному случаю, а разделы 3 и 4—многомерному случаю.

1. Формулировки основных результатов в одномерном случае

Напомним коротко определение второго обобщенного процесса восстановления $Y(t)$ с одномерным фазовым пространством (см. [3]). Обозначим

$$(T_0, Z_0) = (0,0),\ (T_1, Z_1) = (\tau_1, \zeta_1),\ \cdots,\ (T_n, Z_n) = (\tau_1+\cdots+\tau_n, \zeta_1+\cdots+\zeta_n),\ \cdots,$$

где $\{(\tau_i, \zeta_i)\}_{i=1}^{\infty}$—последовательность независимых случайных векторов, имеющих при $i \geq 2$ общее распределение с вектором (τ, ζ); при этом $\mathbf{P}(\tau_1 \geq 0) =$

Mogulskii A.A., Prokopenko E.I., Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00129).

Поступила 5 февраля 2018 г., опубликована 4 мая 2018 г.

$\mathbf{P}(\tau > 0) = 1$. В настоящей работе мы изучаем обобщенный процесс восстановления $Y(t)$, который при $t \geq 0$ определяется как

$$Y(t) := Z_{\eta(t)}, \quad \text{где} \quad \eta(t) := \min\{k \geq 0 : \ T_k > t\}.$$

В настоящем разделе (см. теоремы 1.1, 1.2 ниже) найдена точная асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x)), \quad \Delta[x) := [x, x + \Delta),$$

где $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$, последовательность $x = x_t$ такова, что отношение $\alpha := \frac{x}{t}$ лежит в некотором фиксированном компакте.

Теорема 1.2 дополняет интегро-локальную теорему для $Y(t)$, полученную в [1],[2], поэтому мы для начала приведем формулировку теоремы 3.2 из [1],[2]. Условимся ссылки на разделы частей I, II настоящей работы осуществлять так: § I.1 означает: § 1 из части I (т.е. из [3]); теорема II.2.1 означает: теорема 2.1 из части II (т.е. из [4]); формула (I.1.3) означает: формула (1.3) из части I (т.е. из [3]) и т.д.

Везде, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполнено условие Крамера для случайного вектора (τ, ζ) в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{v\tau + v|\zeta|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор (τ, ζ) является *нерешетчатым*, т.е. *для любого ненулевого вектора* $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ *выполняется* $|\mathbf{E}e^{i(c_1\tau + c_2\zeta)}| < 1$. *Эти два условия во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.*

Положим для $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\psi(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \quad \psi_1(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1},$$

$$A(\lambda, \mu) := \ln \psi(\lambda, \mu), \quad A_1(\lambda, \mu) := \ln \psi_1(\lambda, \mu);$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : \ A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \mu) : \ A_1(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \mu)$.

Положим

$$B_t(u, v) := \{\gamma(t) \geq u, \quad \chi(t) \geq v\},$$

где

$$\gamma(t) := t - T_{\eta(t)-1}, \quad \chi(t) := T_{\eta(t)} - t,$$

— величины *недоскока* $\gamma(t)$ до уровня t и *перескока* $\chi(t)$ через уровень t блужданием $\{T_k\}$, соответственно;

$$I_Y(\alpha; u, v) := \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta}; \ \tau \geq y + v) dy, \tag{1.1}$$

где вектор $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, лежащий на границе $\partial\mathcal{A}^{\leq 0}$ выпуклого множества

$$\mathcal{A}^{\leq 0} = \{(\lambda, \mu) : \ A(\lambda, \mu) \leq 0\},$$

построен в разделе 2 работы [3] (см. (I.2.21), (I.2.24), (I.2.25)).

Обозначим

$$\mu_-^{(\zeta)} := \inf\{\mu : \ \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\}, \quad \mu_+^{(\zeta)} := \sup\{\mu : \ \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\}.$$

В силу условия $[\mathbf{C}_0]$ имеем

$$\mu_-^{(\zeta)} < 0 < \mu_+^{(\zeta)}.$$

Множество

$$\mathfrak{A} := \{\alpha : \ (\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A})\}$$

определено и изучено в [3](см. раздел 2.3 в [3]). Напомним, что функции $A(\mu)$, $D(\alpha) = D(1, \alpha)$ определены и подробно изучены в работе [3] (см. (I.2.14), (I.2.25)). Положительная непрерывная на множестве $\mathfrak{A}$ функция $C(\alpha)$ определена в [3] как $C(\alpha) := C(1, \alpha)$, где функция $C(\theta, \alpha)$, в свою очередь, определена в [3] формулой (I.2.33).

Для того, чтобы сформулировать интегро-локальную теорему для $Y(t)$ из работ [1],[2], нам понадобятся дополнительные обозначения.

Обозначим (α_-, α_+) максимальный интервал, содержащий точку $\alpha = 0$ и целиком лежащий в множестве $\mathfrak{A}$. В частности, если множество $\mathfrak{A}$ односвязно, то в этом случае интервал (α_-, α_+) совпадает с $\mathfrak{A}$.

В работах [1],[2] определено т.н. *запретное* множество $[\beta_-, \beta_+]$, которое пусто, если $\lambda_+ > D(0)$, где $\lambda_+ := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}$; если же $\lambda_+ \le D(0)$, то $[\beta_-, \beta_+]$—максимальный отрезок, на котором выполняется неравенство $\lambda(\alpha) \ge \lambda_+$ (см. лемму 2.2 в [1],[2]). В [1],[2] при изучении т.н. первого обобщенного процесса восстановления $Z(t)$, который определяется как

$$Z(t) := Y(t) - \zeta_{\eta(t)},$$

интегро-локальная теорема для него получена в зоне уклонений (см. теорему 3.1 в [1],[2])

$$\alpha = \frac{x}{t} \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+].$$

Приведем теперь формулировку интегро-локальной теорема для второго обобщенного процесса восстановления, которая установлена в [1],[2] для той же зоны уклоненй (см. теорему 3.2 в [1],[2]):

Теорема 1.1. *Пусть фиксирован компакт K, такой, что*

$$K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]. \tag{1.2}$$

Пусть выполнено условие

$$\mathcal{M}_K := \{\mu(\alpha') : \ \alpha' \in K\} \subset (\mu_-^{(\zeta)}, \mu_+^{(\zeta)}). \tag{1.3}$$

Тогда для $\alpha := \frac{x}{t} \in K$ имеем:

(i). Справедлива формула

$$I_Y(\alpha; 0, 0) = \begin{cases} \frac{1-\psi(0,\mu(\alpha))}{\lambda(\alpha)} < \infty, & \textit{если } \lambda(\alpha) \neq 0; \\ \psi'_{(1)}(0, \mu(\alpha)) < \infty \quad (= \mathbf{E}\tau \quad \textit{при} \quad \alpha = a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}), & \textit{если } \lambda(\alpha) = 0. \end{cases}$$

(ii). Пусть для начального случайного вектора $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ выполнены: 1) условие $[\mathbf{C}_0]$ и 2) условие "допустимой неоднородности"

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1) \quad \textit{где} \quad \mathcal{A}_K := \{(\lambda(\gamma), \mu(\gamma)) : \ \gamma \in K\}. \tag{1.4}$$

Тогда при $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x); \ B_t(u, v)) =$$

$$P_1(v, \Delta[x)) + \frac{\Delta}{\sqrt{t}} \psi_1 C(\alpha) e^{-tD(\alpha)} [I_Y(\alpha; u, v) + o(1)], \tag{1.5}$$

где $\psi_1 := \psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$,

$$P_1(v, \Delta[x)) := \mathbf{P}(\tau_1 > t + v, \ \zeta_1 \in \Delta[x)),$$

остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $\alpha \in K$, $u \in [0, u_0]$, $v \geq 0$ *при любом* $u_0 \in [0, \infty)$. *Если выполнено дополнительное условие*

$$(0, \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A}_1) \quad \text{при всех} \quad \alpha \in K, \tag{1.6}$$

то слагаемое $P_1(v, \Delta[x])$ *в правой части (1.5) можно удалить.*

Приведем теперь формулировку основного утверждения настоящей работы в одномерном случае:

Теорема 1.2. *Пусть фиксирован компакт*

$$K \subset \mathfrak{A}. \tag{1.7}$$

Пусть выполнено условие (1.3), а в части (ii) *теоремы 1.1 исключено условие* $[\mathbf{C}_0]$ *для начального вектора* (τ_1, ζ_1).

Тогда для $\alpha = \frac{x}{t} \in K$ *утверждения* (i), (ii) *теоремы 1.1 полностью сохраняются, и при этом остаточный член* $o(1)$ *в соотношении (1.5) утверждения* (ii) *равномерен по всем* $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Теорема 1.2 дополняет теорему 1.1 "в четырех направлениях". Во-первых, в (1.2) вместо интервала (α_-, α_+) рассматривается более широкое, вообще говоря, множество $\mathfrak{A}$; во-вторых, из множества $\mathfrak{A}$ не удаляется отрезок $[\beta_-, \beta_+]$; в третьих, в теореме 1.2 не требуется, вообще говоря, условие $[\mathbf{C}_0]$ для начального случайного вектора $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$; в четвертых, остаточный член $o(1)$ в соотношении (1.5) утверждения (ii) равномерен по всем $u \geq 0$, $v \geq 0$, а не по всем $u \in [0, u_0]$, $v \geq 0$, как в теореме 1.1.

Поясним, почему в теореме 1.1 компакт K выбирается частью множества $(\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$. Дело в том, что в основе доказательства теоремы 3.2 в [1],[2] лежит интегро-локальная теорема для процесса восстановления $Z(t)$ (теорема 3.1 в [1],[2]), в которой рассматриваются *только уклонения вида* $\alpha = \frac{x}{t} \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$. В доказательстве теоремы 1.2, приведенном ниже, в разделе 2, не используется интегро-локальная теорема для $Z(t)$, что позволяет выбирать компакт K из более широкого, вообще говоря, множества $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим сейчас пример, доказывающий *существенность* условия (1.6), достаточного для того, чтобы пренебречь первым слагаемым в правой части формулы (1.5).

Пример 1.1. Пусть (для упрощения) координаты τ и ζ случайного вектора $\xi = (\tau, \zeta)$ независимы, и при этом $\tau = 1$ с вероятностью 1, а ζ имеет нормальное распределение со средним $-\varepsilon < 0$ и единичной дисперсией. Тогда

$$A(\mu) = \frac{\mu^2}{2} - \mu\varepsilon, \quad D(\alpha) = \frac{(\alpha+\varepsilon)^2}{2}, \quad \lambda(\alpha) = -\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2}{2}, \quad \mu(\alpha) = \alpha + \varepsilon,$$

так что $D(\alpha) = \lambda(\alpha) + \mu(\alpha)\alpha$, $D(0) = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Построим случайный вектор $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1) := (\tau_1, \tau_1 + \gamma)$, где случайные величины τ_1 и γ независимы, τ_1 имеет показательное распределение с параметром $r > 0$, γ—нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда

$$\psi_1(\lambda, \mu) = \psi_{\tau_1}(\lambda + \mu)\psi_\gamma(\mu), \quad \text{где} \quad \psi_{\tau_1}(\lambda) := \frac{r}{r - \lambda}, \quad \lambda < r; \quad \psi_\gamma(\mu) := e^{\frac{\mu^2}{2}}.$$

Выберем следующие значения параметров

$$\alpha := 2, \quad \varepsilon := 1, \quad r := \frac{15}{8};$$

следующие три неравенства проверяются очевидным образом:

$$r - \lambda(\alpha) - \mu(\alpha) > 0; \tag{1.8}$$

$$D(0) < r;$$

$$r\alpha < D(\alpha). \tag{1.9}$$

Из неравенства (1.8) вытекает соотношение $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A}_1)$, т.е. условие (1.4).

Покажем, что из неравенства (1.9) следует, что слагаемое $P_1(0, \Delta[x))$ *не имеет нужный порядок малости*, т.е. не верно соотношение

$$P_1(0, \Delta[x)) = O\left(\frac{\Delta}{\sqrt{t}} e^{-tD(\alpha)}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1.10}$$

Действительно, в силу того, что $\alpha = 2 > 1$, имеем

$$P_1(0, \Delta[x)) = \mathbf{P}(\tau_1 \geq t, \quad \tau_1 + \gamma \in \Delta[t\alpha)) \geq$$

$$\mathbf{P}\left(\tau_1 \in \left(\frac{1}{2}\Delta\right)[t\alpha)\right) \mathbf{P}\left(\gamma \in \left(\frac{1}{2}\Delta\right)[0)\right).$$

Поэтому в силу (1.9)

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{t} \ln P_1(0, \Delta[x)) \geq -r\alpha > -D(\alpha).$$

Последне неравенство и соотношение (1.10) несовместимы. Условие (1.6) не выполнено, и мы не можем пренебречь первым слагаемым в правой части формулы (1.5).

2. Доказательство теоремы 1.2

I. Доказательство части (*i*) теоремы 1.2 полностью совпадает с доказательством части (*i*) теоремы 3.2 в работах [1],[2], поэтому мы его опускаем.

II. При доказательстве части (*ii*) теоремы 1.2 (ср. с доказательствами теорем 3.1 и 3.2 в [1],[2], мы, для упрощения выкладок, будем доказывать эквивалентное утверждение, в котором (ср. с (1.7) и (1.3)):

$$\alpha := \frac{x}{t} \to \alpha^0 \in \mathfrak{A}, \tag{2.1}$$

$$(0, \mu(\alpha^0)) \in (\mathcal{A}); \tag{2.2}$$

условия (1.4), (1.6) заменены на условия

$$(\lambda(\alpha^0), \mu(\alpha^0)) \in (\mathcal{A}_1), \tag{2.3}$$

$$(0, \mu(\alpha^0)) \in (\mathcal{A}_1), \tag{2.4}$$

соответственно.

Будем доказывать часть (*ii*) "упрощенной" версии теоремы 1.2, которую сформулируем в виде отдельного промежуточного утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены соотношения (2.1)–(2.3). Тогда:*

(a). *При* $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x);\ B_t(u,v),\ \eta(t) \geq 2) = \frac{\Delta}{\sqrt{t}} \psi_1 C(\alpha) e^{-tD(\alpha)} [I_Y(\alpha; u,v) + o(1)], \tag{2.5}$$

где $\psi_1 := \psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$, *остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$ *для любых фиксированных* u_0, $v_0 \in [0, \infty)$.

(b) *Если выполнено дополнительное условие (2.4), то для некоторых* $t_0 < \infty$, $c > 0$, $C < \infty$ *при всех* $t \geq t_0$ *и для любого* $\Delta \in (0, 1]$ *выполняется*

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x);\ B_t(u,v),\ \eta(t) = 1) = \mathbf{P}(\tau_1 > t+v,\ \zeta_1 \in \Delta[x)) \leq Ce^{-tD(\alpha)+|\mu(\alpha)|-ct}. \tag{2.6}$$

При этом сначала будет выполнено доказательство (2.5) в частном случае для однородного процесса восстановления $Y(t)$. И только затем, используя уже доказанное в однородном случае равенство (2.5), докажем это равенство в общем случае.

Для доказательства равенства (2.5) в однородном случае нам понадобится

Лемма 2.2. *Пусть для однородного процесса* $Y(t)$ *выполнены условия (2.1), (2.2) "упрощенной" версии теоремы 1.2. Тогда найдутся* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *такие, что при всех* $t \geq t_0$, $0 < \Delta \leq 1$

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x), \tau_{\eta(t)} + |\zeta_{\eta(t)}| \geq \ln^2 t,\ \eta(t) \geq 1) \leq Ct^2 e^{-tD(\alpha) - c\ln^2 t}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (2.7) через P_t. Тогда для события $B_n(t) := \{\tau_n + |\zeta_n| \geq \ln^2 t\}$ имеем

$$P_t = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P}(Z_n \in \Delta[x),\ T_{n-1} \leq t < T_n,\ \ B_n(t)).$$

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда для некоторых* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *при всех* $n \geq 1$, $t \geq t_0$, $0 < \Delta \leq 1$

$$P_n(t) \leq Ce^{-tD(\alpha) - c\ln^2 t}. \tag{2.8}$$

Лемму 2.3 докажем несколько позже, а сейчас продолжим доказательство леммы 2.2. Поскольку

$$\sum_{n \geq t^2} P_n(t) \leq \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(T_{n-1} \leq t),$$

то при $\frac{t}{t^2-1} < \mathbf{E}\tau$, $n \geq t^2$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева имеем

$$\mathbf{P}(T_{n-1} \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{t}{n-1})} \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-1})},$$

где

$$\Lambda_\tau(u) := \sup_\lambda \{\lambda u - \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau}\}$$

—функция уклонений для случайной величины τ. Поскольку $\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-1}) \to \infty$ при $t \to \infty$, то справедливо соотношение

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n \geq t^2} P_n(t) = -\infty. \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.8), (2.9) вытекает утверждение 2.2. □

Выполним теперь

Доказательство леммы 2.3. При $0 < \Delta \le 1$, $n \ge 1$ справедлива следующая последовательность соотношений

$$P_n(t) = \tag{2.10}$$

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)t-\lambda(\alpha)t+\mu(\alpha)Z_n-\mu(\alpha)Z_n};\ Z_n \in \Delta[x),\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_n(t)\right) \le$$

$$e^{-\lambda(\alpha)t-\mu(\alpha)x+|\mu(\alpha)|}\mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)T_n+\mu(\alpha)Z_n-\lambda(\alpha)(T_n-t)};\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_n(t)\right) =$$

$$e^{-tD(\alpha)+|\mu(\alpha)|}\mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)T_n+\mu(\alpha)Z_n-\lambda(\alpha)(T_n-t)};\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_n(t)\right).$$

Для $(\lambda, \mu) := (\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, таких, что $\psi(\lambda, \mu) = 1$ (напомним, что в настоящей части доказательства теоремы 1.2 (леммы 2.1) мы имеем дело с однородным случаем), положим

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}_k, \widehat{\zeta}_k) \in B) := \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_k+\mu\zeta_k};\ \ (\tau_k, \zeta_k) \in B), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных векторов

$$(\widehat{\tau}_k, \widehat{\zeta}_k), \quad k = 1, 2, \cdots ,$$

обозначим их суммы как

$$(\widehat{T}_k, \widehat{Z}_k) := (\widehat{\tau}_1 + \cdots + \widehat{\tau}_k, \widehat{\zeta}_1 + \cdots + \widehat{\zeta}_k).$$

Тогда, продолжая последовательность соотношений с началом в (2.10), имеем для $\widehat{B}_n(t) := \{\widehat{\tau}_n + |\widehat{\zeta}_n| \ge \ln^2 t\}$

$$P_n(t) \le e^{-tD(\alpha)+|\mu(\alpha)|}E_n(t), \tag{2.11}$$

где

$$E_n(t) := \mathbf{E}(e^{-\lambda(\alpha)(\widehat{T}_n-t)};\ \widehat{T}_{n-1} \le t < \widehat{T}_n,\ \ \widehat{B}_n(t)).$$

Оценим теперь $E_n(t)$.

1. Если $\lambda(\alpha) \ge 0$, то для всех $n \ge 1$, $t > 0$ имеем

$$E_n(t) \le \mathbf{P}(\widehat{B}_n(t)).$$

Обозначим далее $(\widehat{\tau}^0_n, \widehat{\zeta}^0_n)$ случайный вектор с распределением

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}^0_n, \widehat{\zeta}^0_n) \in B) := \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha^0)\tau_n+\mu(\alpha^0)\zeta_n};\ (\tau_n, \zeta_n) \in B\right).$$

Тогда в силу неравенства Коши для $\widehat{B}^0_n(t) := \{\widehat{\tau}^0_n + |\widehat{\zeta}^0_n| \ge \ln^2 t\}$ имеем

$$\mathbf{P}(\widehat{B}_n(t)) = \mathbf{E}\left(e^{(\lambda(\alpha)-\lambda(\alpha^0))\widehat{\tau}^0_n+(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\widehat{\zeta}^0_n};\ \widehat{B}^0_n(t)\right) \le$$

$$\mathbf{E}^{1/2}\left(e^{2(\lambda(\alpha)-\lambda(\alpha^0))\widehat{\tau}^0_n+2(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\widehat{\zeta}^0_n}\right)\mathbf{P}^{1/2}(\widehat{B}^0_n(t)).$$

В силу условия (2.1) случайный вектор $(\widehat{\tau}^0_n, \widehat{\zeta}^0_n)$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_0]$, поэтому правая часть последнего неравенства допускает подходящую оценку, и, следовательно, для некоторых $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ при всех $n \ge 1$, $t \ge t_0$,

$$E_n(t) \le Ce^{-c\ln^2 t}. \tag{2.12}$$

2. Пусть $\lambda(\alpha) < 0$. Поскольку $\alpha = \frac{x}{t} \to \alpha^0 \in \mathfrak{A}$, то для всех достаточно больших t выполняется $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A})$ и, следовательно, $\psi(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) = 1$. Поэтому при $\lambda(\alpha) < 0$ для $t \geq t_0$ таких, что $\psi(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) = 1$, справедливо

$$E_n(t) \leq \mathbf{E}\left(e^{-\lambda(\alpha)\widehat{\tau}_n};\ \widehat{T}_{n-1} \leq t < \widehat{T}_n,\ \ \widehat{B}_n(t)\right) \leq \mathbf{E}\left(e^{\mu(\alpha)\zeta_n};\ \ B_n(t)\right).$$

Следовательно, для всех достаточно больших t имеем

$$E_n(t) \leq \mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta_n};\ \ B_n(t)).$$

Для оценки сверху

$$\overline{E}_n(t) := \mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta_n};\ \ B_n(t))$$

определим случайный вектор $(\overline{\tau}_n^0, \overline{\zeta}_n^0)$ с распределением

$$\mathbf{P}\left((\overline{\tau}_n^0, \overline{\zeta}_n^0) \in B\right) := \frac{1}{\psi(0, \mu(\alpha^0))}\mathbf{E}\left(e^{\mu(\alpha^0)\zeta_n};\ (\tau_n, \zeta_n) \in B\right).$$

Тогда в силу неравенства Коши для $\overline{B}_n^0(t) := \{\overline{\tau}_n^0 + |\overline{\zeta}_n^0| \geq \ln^2 t\}$ имеем

$$\overline{E}_n(t) = \psi(0, \mu(\alpha^0))\mathbf{E}\left(e^{(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\overline{\zeta}_n^0};\ \overline{B}_n^0(t)\right) \leq$$

$$\psi(0, \mu(\alpha^0))\mathbf{E}^{1/2}e^{2(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\overline{\zeta}_n^0}\mathbf{P}^{1/2}\left(\overline{B}_n^0(t)\right).$$

В силу условия (2.2) случайный вектор $\left(\overline{\tau}_n^0, \overline{\zeta}_n^0\right)$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_0]$, поэтому правая часть последнего неравенства допускает подходящую оценку: для некоторых $t_0 < \infty$, $C_1 < \infty$, $c > 0$ при всех $n \geq 1$, $t \geq t_0$ справедливо

$$\psi(0, \mu(\alpha^0))\mathbf{E}^{1/2} \leq C_1, \quad \mathbf{E}^{1/2}e^{2(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\overline{\zeta}_n^0} \leq C_1, \quad \mathbf{P}^{1/2}\left(\overline{B}_n^0(t)\right) \leq C_1 e^{-c\ln^2 t}.$$

Поэтому, для некоторых $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ при всех $n \geq 1$, $t \geq t_0$ справедливо неравенство (2.12). Из (2.11) и (2.12) вытекает утверждение (2.8). Лемма 2.3 доказана. □

Для формулирования леммы 2.4, которая тоже понадобится для доказательства "упрощенной" версии теоремы 1.2 (леммы 2.1) в однородном случае, необходимы дополнительные обозначения.

Обозначим для $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A})$; $u, v, w \in \mathbb{R}$

$$G(\Delta) = G(\Delta, w; \lambda, \mu) := \int_{t=w}^{\infty}\int_{z=-\infty}^{\infty} e^{\lambda t + \mu z}\mathbf{P}(\tau \geq t,\ \zeta \in \Delta[z))dtdz;$$

$$I(\lambda, \mu; u, v) := \int_u^{\infty} e^{\lambda y}\mathbf{E}(e^{\mu\zeta};\ \tau \geq y + v)dy.$$

Заметим, что если $(\lambda, \mu) = (\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $(0, \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A})$, то справедливо равенство

$$I(\lambda(\alpha), \mu(\alpha); u, v) = I_Y(\alpha; u, v).$$

где функция $I_Y(\alpha; u, v)$ определена перед формулировкой теоремы 1.1 (см. (1.1)).

Лемма 2.4. *Пусть выполнено условие*

$$(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}), \quad (0, \mu) \in (\mathcal{A}).$$

Тогда справедливо тождество

$$e^{-\lambda v}G(\Delta, u + v; \lambda, \mu) = \Delta c(\Delta, \mu)I(\lambda, \mu; u, v), \tag{2.13}$$

где

$$c(\Delta,\mu)=\begin{cases}\frac{1-e^{-\mu\Delta}}{\mu\Delta}, & \textit{если } \mu\neq 0;\\ 1, & \textit{если } \mu=0.\end{cases} \tag{2.14}$$

Доказательство. Обозначим $\gamma=\gamma_\Delta$ случайную величину с равномерным на полуинтервале $\Delta[0)=[0,\Delta)$ распределением, не зависящую от вектора (τ,ζ). Преобразование Лапласа над распределением $-\gamma$ имеет вид (см. (2.14))

$$\mathbf{E}e^{\mu(-\gamma)}=c(\Delta,\mu). \tag{2.15}$$

Для фиксированного $t\geq 0$ рассмотрим несобственную случайную величину X_t с распределением

$$F_t(y)=\mathbf{P}(X_t<y):=\mathbf{P}(\tau\geq t,\quad \zeta-\gamma<y).$$

Очевидно, что распределение $F_t(y)$ абсолютно непрерывно. Обозначив соответствующую плотность $f_t(z)$ и используя формулу свертки

$$f_t(z)=\mathbf{E}(p_{-\gamma}(z-\zeta);\ \tau\geq t),\quad z\in\mathbb{R},$$

где $p_{-\gamma}(y)$—плотность случайной величины $-\gamma$, получаем формулу

$$f_t(z)=\frac{1}{\Delta}\mathbf{P}(\tau\geq t,\ \zeta\in\Delta[z)),\quad z\in\mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Поэтому, учитывая (2.15) и (2.16), получаем для любого фиксированного $t\geq 0$ равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu z}\mathbf{P}(\tau\geq t,\ \zeta\in\Delta[z))dz=\Delta\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu z}f_t(z)dz=$$

$$\Delta\mathbf{E}(e^{\mu(\zeta-\gamma)};\ \tau\geq t)=\Delta\mathbf{E}e^{-\mu\gamma}\mathbf{E}(e^{\mu\zeta};\ \tau\geq t)=\Delta c(\Delta,\mu)\mathbf{E}(e^{\mu\zeta};\ \tau\geq t).$$

Поэтому левая часть формулы (2.13) представляется интегралом

$$\Delta c(\Delta,\mu)e^{-\lambda v}\int_{t=u+v}^{\infty}e^{\lambda t}\mathbf{E}(e^{\mu\zeta};\ \tau\geq t)dt,$$

в котором замена $t=v+y$ приводит к правой части формулы (2.13). Лемма 2.4 доказана. □

Завершим теперь

Доказательство части (a) *леммы 2.1 в однородном случае.* Обозначим левую часть (2.5)

$$P(\Delta,t):=\mathbf{P}(Y(t)\in\Delta[x);\ B(u,v),\ \eta(t)\geq 2)$$

и воспользуемся очевидным соотношением

$$P(\Delta,t)=P_2(\Delta,t)+P_3(\Delta,t), \tag{2.17}$$

где

$$P_2(\Delta,t):=\mathbf{P}(Y(t)\in\Delta[x);\ B(u,v),\ \eta(t)\geq 2,\quad \max\{\tau_{\eta(t)},\ |\zeta_{\eta(t)}|\}\geq\ln^2 t);$$

$$P_3(\Delta,t):=\mathbf{P}\left(Y(t)\in\Delta[x);\ B(u,v),\ \eta(t)\geq 2,\quad \max\{\tau_{\eta(t)},\ |\zeta_{\eta(t)}|\}<\ln^2 t\right).$$

Найдем прежде всего асимптотику слагаемого $P_3(\Delta,t)$ в правой части (2.17). Воспользуемся следующим представлением

$$P_3(\Delta,t)=\int_{y=u}^{\ln^2 t-v}\int_{|z|\leq\ln^2 t}H(t-dy,\ x-dz)\mathbf{P}(\ln^2 t\geq\tau\geq y+v,\ \zeta\in\Delta[z)),$$

где $H(\cdot,\cdot)$—мера восстановления для однородного блуждания (T_n, Z_n). Воспользуемся далее интегро-локальной теоремой для меры восстановления (см. теорему 4.1 в [1],[2] или теорему 4.1 в [3]):

Теорема 2.1. *Для любого компакта* $K \subset \mathcal{D} := \Big\{(\theta,\beta): \ \frac{\beta}{\theta} \in \mathfrak{A}, \quad \theta > 0\Big\}$, *при* $(\theta,\beta) := \left(\frac{s}{t}, \frac{l}{t}\right) \in K$ *справедливо*

$$H(\delta[s) \times \delta[l)) = \frac{\delta^2}{\sqrt{t}} C(\theta,\beta) e^{-tD(\theta,\beta)}(1+o(1)),$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $(\theta,\beta) \in K$.

В зоне

$$\mathcal{V}_t := \{(y,z): \ 0 \le y, \quad \max\{y, \ |z|\} \le \ln^2 t\}$$

при $t \to \infty$ справедливо

$$-tD\left(1 - \frac{y}{t}, \alpha - \frac{z}{t}\right) = -tD(\alpha) + \lambda y + \mu z,$$

где $(\lambda,\mu) = (\lambda(\alpha)+o(1), \mu(\alpha)+o(1)) = (\lambda(\alpha^0)+o(1), \mu(\alpha^0)+o(1))$, и остаточные члены $o(1)$ равномерны по $(y,z) \in \mathcal{V}_t$. Поэтому можно выбрать векторы

$$\left(\lambda^{\pm}, \ \mu^{\pm}\right) = \left(\lambda(\alpha^0) + o^{\pm}(1), \mu(\alpha^0) + o^{\pm}(1)\right)$$

таким образом, что остаточные члены $o^{\pm}(1)$ не зависят от $(y,z) \in \mathcal{V}_t$ и в зоне $\mathcal{V}_t$ выполняется

$$\lambda^- y + \mu^- z \le \lambda y + \mu z \le \lambda^+ y + \mu^+ z.$$

Поэтому, привлекая теорему 2.1, получаем

$$P_3(\Delta,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} C(\alpha) e^{-tD(\alpha)} \left(P_4(\Delta,t) + o(1)\right), \tag{2.18}$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \in [0,u_0]$, $v \in [0,v_0]$,

$$P_4^-(\Delta,t) \le P_4(\Delta,t) \le P_4^+(\Delta,t), \tag{2.19}$$

$$P_4^{\pm}(\Delta,t) := \int_{y=u}^{\ln^2 t - v} \int_{|z| \le \ln^2 t} e^{\lambda^{\pm} y + \mu^{\pm} z} \mathbf{P}(\ln^2 t \ge \tau \ge y + v, \zeta \in \Delta[z)) dy dz.$$

Сделав замену $y \to y + v$, получаем

$$P_4^{\pm}(\Delta,t) = e^{-\lambda^{\pm} v} \int_{y=u+v}^{\infty} \int_{|z|<\infty} e^{\lambda^{\pm} y + \mu^{\pm} z} \mathbf{P}(\ln^2 t \ge \tau \ge y, \quad \zeta \in \Delta[z)) dy dz + o^{\pm}(1) =$$

$$e^{-\lambda^{\pm} v} G(\Delta, u+v; \lambda^{\pm}, \mu^{\pm}) + o^{\pm}(1),$$

где остаточные члены $o^{\pm}(1)$ равномерны по $u \in [0,u_0]$, $v \in [0,v_0]$. Для всех достаточно больших t для точки $(\lambda^{\pm},\mu^{\pm})$ выполнено условие леммы 2.4. Пусть $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно, так что

$$\frac{o^{\pm}(1)}{\Delta_t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Тогда из леммы 2.4 вытекает

$$P_4^{\pm}(\Delta,t) = \Delta I(\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}; u, v) + o^{\pm}(1) = \Delta \left[I_Y(\alpha^0; u, v) + o_1^{\pm}(1)\right] + o^{\pm}(1),$$

где остаточные члены $o_1^{\pm}(1),\ o^{\pm}(1)$ равномерны по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$. Применяя последнее соотношение к (2.19) и учитывая (2.18), получаем для слагаемого $P_3(\Delta, t)$ в сумме (2.17) представление

$$P_3(\Delta, t) = \frac{\Delta}{\sqrt{t}} C(\alpha) e^{-tD(\alpha)} \Big[I_Y(\alpha^0; u, v) + o(1) \Big], \tag{2.20}$$

в котором остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$.

Поскольку

$$P_2(\Delta, t) \le \mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x);\ \eta(t) \ge 2, \tau_{\eta(t)} + |\zeta_{\eta(t)}| \ge \ln^2 t),$$

то в силу леммы 2.2 слагаемое $P_2(\Delta, t)$ в правой части (2.17) допускает "нужную"оценку сверху. Поэтому из (2.20) вытекает соотношение (2.5) в однородном случае. □

Докажем теперь соотношение (2.5) в неоднородном случае.

Лемма 2.5. *Пусть процесс $Y(t)$ является неоднородным и выполнены следующие условия (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) "упрощенной" версии теоремы 1.2 (леммы 2.1). Тогда найдутся $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ такие, что при всех $t \ge t_0$, $0 < \Delta \le 1$*

$$\mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x), \quad \max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} \ge \ln^2 t,\ \eta(t) \ge 2) \le C t^2 e^{-tD(\alpha) - c \ln^2 t}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (2.21) через P_t. Тогда для $B_1(t) := \{\max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} \ge \ln^2 t\}$ имеем

$$P_t = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P}(Z_n \in \Delta[x),\ T_{n-1} \le t < T_n, \quad B_1(t)).$$

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 2.6. *Пусть выполнены условия леммы 2.5. Тогда для некоторых $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ при всех $n \ge 2$, $t \ge t_0$, $0 < \Delta \le 1$*

$$P_n(t) \le C e^{-tD(\alpha) - c \ln^2 t}. \tag{2.22}$$

Лемму 2.6 докажем несколько позже, а сейчас продолжим доказательство леммы 2.5. Поскольку

$$\sum_{n \ge t^2} P_n(t) \le \sum_{n \ge t^2} \mathbf{P}(T_{n-1} \le t) \le \sum_{n \ge t^2} \mathbf{P}(\tau_2 + \cdots + \tau_{n-1} \le t),$$

и при $\frac{t}{t^2 - 2} < \mathbf{E}\tau$, $n \ge t^2$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\tau_2 + \cdots + \tau_{n-1} \le t) \le e^{-(n-2)\Lambda_\tau(\frac{t}{n-2})} \le e^{-(n-2)\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-2})},$$

то справедливо соотношение (ср. с доказательством соотношения (2.9))

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n \ge t^2} P_n(t) = -\infty. \tag{2.23}$$

Из соотношений (2.22), (2.23) вытекает утверждение леммы 2.5. □

Поэтому нам осталось выполнить

Доказательство леммы 2.6. При $0 < \Delta \le 1$, $n \ge 2$ справедлива следующая цепочка соотношений

$$
\begin{gathered}
P_n(t) = \qquad (2.24)\\
\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)t-\lambda(\alpha)t+\mu(\alpha)Z_n-\mu(\alpha)Z_n};\ Z_n \in \Delta[x),\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_1(t)) \le\\
e^{-\lambda(\alpha)t-\mu(\alpha)x+|\mu(\alpha)|}\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)T_n+\mu(\alpha)Z_n-\lambda(\alpha)(T_n-t)};\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_1(t)) =\\
e^{-tD(\alpha)+|\mu(\alpha)|}\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)T_n+\mu(\alpha)Z_n-\lambda(\alpha)(T_n-t)};\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_1(t)).
\end{gathered}
$$

Для $(\lambda,\mu) := (\lambda(\alpha),\mu(\alpha))$, таких, что $\psi(\lambda,\mu) = 1$, положим

$$
\mathbf{P}((\widehat{\tau}_k,\widehat{\zeta}_k) \in B) := \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_k+\mu\zeta_k};\ \ (\tau_k,\zeta_k) \in B), \quad k = 2,\cdots;
$$

$$
\mathbf{P}((\widehat{\tau}_1,\widehat{\zeta}_1) \in B) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\alpha)),\mu(\alpha)}\mathbf{E}(e^{\lambda\tau_1+\mu\zeta_1};\ \ (\tau_1,\zeta_1) \in B).
$$

Для последовательности независимых случайных векторов

$$
(\widehat{\tau}_k,\widehat{\zeta}_k), \quad k = 1,2,\cdots,
$$

обозначим их суммы как

$$
(\widehat{T}_k,\widehat{Z}_k) := (\widehat{\tau}_1+\cdots+\widehat{\tau}_k,\widehat{\zeta}_1+\cdots+\widehat{\zeta}_k).
$$

Тогда, продолжая цепочку соотношений с началом в (2.24), имеем для $\widehat{B}_1(t) := \{\max\{\widehat{\tau}_1,\ |\widehat{\zeta}_1|\} \ge \ln^2 t\}$

$$
P_n(t) \le e^{-tD(\alpha)+|\mu(\alpha)|}\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))E_n(t),
$$

где

$$
E_n(t) := \mathbf{E}(e^{-\lambda(\alpha)(\widehat{T}_n-t)};\ \widehat{T}_{n-1} \le t < \widehat{T}_n,\ \ \widehat{B}_1(t)).
$$

Оценим теперь $E_n(t)$.

1. Если $\lambda(\alpha) \ge 0$, то для всех $n \ge 2$, $t > 0$ имеем

$$
E_n(t) \le \mathbf{P}(\widehat{B}_1(t)).
$$

2. При $\lambda(\alpha) < 0$ справедливо

$$
\begin{gathered}
E_n(t) \le \mathbf{E}(e^{-\lambda(\alpha)\widehat{\tau}_n};\ \widehat{T}_{n-1} \le t < \widehat{T}_n,\ \ \widehat{B}_1(t)) \le\\
\mathbf{E}(e^{-\lambda(\alpha)\widehat{\tau}_n};\ \ \widehat{B}_1(t)) = \mathbf{E}e^{-\lambda(\alpha)\widehat{\tau}_n}\mathbf{P}(\widehat{B}_1(t)) = \mathbf{E}e^{\mu(\alpha)\zeta_n}\mathbf{P}(\widehat{B}_1(t)).
\end{gathered}
$$

Поэтому в силу (2.2) для некоторого $C_1 < \infty$ и всех достаточно больших t

$$
E_n(t) \le C_1\mathbf{P}(\widehat{B}_1(t)).
$$

Таким образом, всегда (вне зависимости от знака $\lambda(\alpha)$)

$$
E_n(t) \le (1+C_1)\mathbf{P}(\widehat{B}_1(t)).
$$

Для оценки сверху

$$
E(t) := \mathbf{P}(\widehat{B}_1(t))
$$

построим случайный вектор $(\widehat{\tau}_1^0,\widehat{\zeta}_1^0)$ с распределением

$$
\mathbf{P}((\widehat{\tau}_1^0,\widehat{\zeta}_1^0) \in B) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\alpha^0),\mu(\alpha^0))}\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha^0)\tau_1+\mu(\alpha^0)\zeta_1};\ (\tau_1,\zeta_1) \in B).
$$

Тогда

$$
E(t) = \frac{\psi_1(\lambda(\alpha^0),\mu(\alpha^0))}{\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))}\mathbf{E}(e^{(\lambda(\alpha)-\lambda(\alpha^0))\widehat{\tau}_1^0+(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\widehat{\zeta}_1^0};\ \max\{\widehat{\tau}_1^0,\ |\widehat{\zeta}_1^0|\} \ge \ln^2 t),
$$

поэтому, применяя неравенство Коши, получаем для некоторого $C_0 < \infty$ и всех достаточно больших t неравенство

$$E(t) \le C_0 \mathbf{E}^{1/2} e^{2(\lambda(\alpha)-\lambda(\alpha^0))\widehat{\tau}_1^0 + 2(\mu(\alpha)-\mu(\alpha^0))\widehat{\zeta}_1^0} \mathbf{P}^{1/2}(\max\{\widehat{\tau}_1^0,\ |\widehat{\zeta}_1^0|\} \ge \ln^2 t).$$

Поскольку в силу условия (2.3) вектор $(\widehat{\tau}_1^0, \widehat{\zeta}_1^0)$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_0]$, то для всех достаточно больших t правая часть последнего неравенства допускает нужную оценку, т.е. для некоторых $C < \infty$, $c > 0$, $t_0 < \infty$ и всех $t \ge t_0$

$$E(t) \le C e^{-c \ln^2 t}.$$

Лемма 2.6, а вместе с ней, и лемма 2.5, доказаны. □

Покажем теперь, что при выполнении условий (2.3), (2.4) в общем (неоднородном) случае для любого фиксированного $\Delta_0 > 0$ вероятностью

$$P := \mathbf{P}(Y(t) \in \Delta_0[x),\ B_t(u,0),\ \eta(t) = 1) = \mathbf{P}(\tau_1 \ge t,\ \zeta_1 \in \Delta_0[x))$$

можно пренебречь. Иначе говоря, выполним

Доказательство части (*b*) *леммы 2.1.* Определим два случайных вектора $(\widehat{\tau}_1, \widehat{\zeta}_1)$, $(\overline{\tau}_1, \overline{\zeta}_1)$, положив для $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\tau}_1, \widehat{\zeta}_1\right) \in B\right) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))} \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)\tau_1 + \mu(\alpha)\zeta_1};\ (\tau_1, \zeta_1) \in B\right),$$

$$\mathbf{P}((\overline{\tau}_1, \overline{\zeta}_1)) := \frac{1}{\psi_1(0, \mu(\alpha))} \mathbf{E}\left(e^{\mu(\alpha)\zeta_1};\ (\tau_1, \zeta_1) \in B\right).$$

В силу условий (2.3), (2.4) для всех достаточно больших t новые случайные векторы удовлетворяют *равномерному условию* $[\mathbf{C}_0]$: для некоторых $t_0 < \infty$, $\delta > 0$, $C < \infty$ при всех $t \ge t_0$ справедливы оценки

$$\sup_{|\lambda|+|\mu| \le \delta} \mathbf{E} e^{\lambda \widehat{\tau}_1 + \mu \widehat{\zeta}_1} \le C, \qquad \sup_{|\lambda|+|\mu| \le \delta} \mathbf{E} e^{\lambda \overline{\tau}_1 + \mu \overline{\zeta}_1} \le C.$$

Из этого вытекает, что координаты $\widehat{\tau}_1$, $\overline{\tau}_1$ тоже удовлетворяют *равномерному условию* $[\mathbf{C}_0]$: для некоторых $t_0 < \infty$, $\delta > 0$, $C < \infty$ при всех $t \ge t_0$ справедливы оценки

$$\sup_{|\lambda| \le \delta} \mathbf{E} e^{\lambda \widehat{\tau}_1} \le C, \quad \sup_{|\lambda| \le \delta} \mathbf{E} e^{\lambda \overline{\tau}_1} \le C. \tag{2.25}$$

Обратимся теперь непосредственно к оцениванию вероятности P (т.е. левой части неравенства (2.6)). Имеем для фиксированного $\Delta_0 > 0$

$$P = \mathbf{E}\left(e^{\pm\lambda(\alpha)\tau_1 \pm \mu(\alpha)\zeta_1};\ \tau_1 \ge t,\ \zeta_1 \in \Delta_0[x)\right) =$$

$$e^{-t(\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)\alpha)} \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)\tau_1 + \mu(\alpha)\zeta_1 + \lambda(\alpha)(t-\tau_1) + \mu(\alpha)(x-\zeta_1)};\ \tau_1 \ge t,\ \zeta_1 \in \Delta_0[x)\right).$$

Поскольку на событии $\zeta_1 \in \Delta_0[x)$ выполняется

$$e^{\mu(\alpha)(x-\zeta_1)} \le e^{\Delta_0|\mu(\alpha)|},$$

то справедливо

$$P \le e^{-tD(\alpha) + \Delta_0|\mu(\alpha)|} \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)\tau_1 + \mu(\alpha)\zeta_1 + \lambda(\alpha)(t-\tau_1)};\ \tau_1 \ge t\right) =$$

$$e^{-tD(\alpha) + \Delta_0|\mu(\alpha)|} \psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\alpha)(t-\widehat{\tau}_1)};\ \widehat{\tau}_1 \ge t\right).$$

Мы получили неравенство

$$P \le e^{-tD(\alpha)+\Delta_0|\mu(\alpha)|}\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))E(t), \tag{2.26}$$

где

$$E(t) := \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)(t-\widehat{\tau}_1)};\ \widehat{\tau}_1 \ge t),$$

и нам достаточно оценить сверху $E(t)$.

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda(\alpha) \ge 0$. В этом случае

$$E(t) \le \mathbf{P}(\widehat{\tau}_1 \ge t),$$

и в силу равномерного условия $[\mathbf{C}_0]$ для $\widehat{\tau}_1$ (см. (2.25)) получаем для некоторых $t_0 < \infty$, $c > 0$, $C < \infty$ и всех $t \ge t_0$

$$E(t) \le Ce^{-ct}. \tag{2.27}$$

2. В случае $\lambda(\alpha) < 0$ имеем $e^{\lambda(\alpha)t} \le 1$ и

$$E(t) = \frac{\psi_1(0,\mu(\alpha))}{\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))\psi_1(0,\mu(\alpha))}e^{\lambda(\alpha)t}\mathbf{E}(e^{\mu(\alpha)\zeta_1};\ \tau \ge t) \le$$

$$\frac{\psi_1(0,\mu(\alpha))}{\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))}\mathbf{P}(\overline{\tau}_1 \ge t).$$

Поэтому, в силу равномерного условия $[\mathbf{C}_0]$ для $\overline{\tau}_1$ (см. (2.25)) получаем и в этом случае неравенство (2.27). Поскольку из (2.26) и (2.27) следует (2.6), утверждение (b) леммы 2.1 доказано. □

Осуществим теперь вывод формулы (2.5) в общем (неоднородном) случае с помощью утверждения леммы 2.5 и уже доказанной формулы (2.5) в однородном случае. Обозначим левую часть формулы (2.5) в общем (неоднородном) случае через $P(t,\Delta[x))$ и воспользуемся следующим очевидным соотношением

$$P(t,\Delta[x)) = P_2(t,\Delta[x)) + P_3(t,\Delta[x)), \tag{2.28}$$

где

$$P_2(t,\Delta[x)) := \mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x),\ B_t(u,v),\ \eta(t) \ge 2,\ \ \max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} \ge \ln^2 t),$$

$$P_3(t,\Delta[x)) := \mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x),\ B_t(u,v),\ \eta(t) \ge 2,\ \ \max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} < \ln^2 t).$$

Положим далее для однородного случая

$$R(t,\Delta[x);\ u,v) := \mathbf{P}(Y(t) \in \Delta[x),\ B_t(u,v)).$$

Из частей (a) и (b) леммы 2.1 вытекает, что в однородном случае имеет место соотношение

$$R(t,\Delta[x);\ u,v) = \frac{\Delta}{\sqrt{t}}C(\alpha)e^{-tD(\alpha)}[I_Y(\alpha;u,v) + o(1)], \tag{2.29}$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \in [0,u_0]$, $v \in [0,v_0]$. Представим теперь слагаемое $P_3(t,\Delta[x))$ из правой части формулы (2.28) в виде

$$P_3(t,\Delta[x)) = \mathbf{E}(R(t-\tau_1,\Delta[x-\zeta_1);\ u,v);\ \ \max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} < \ln^2 t), \tag{2.30}$$

и воспользуемся соотношением (2.29), в котором (t,x) заменено на $(t',x') := (t-\tau_1, x-\zeta_1)$, α заменено на $\alpha' := \frac{x'}{t'}$ в зоне $(\tau_1,\zeta_1) \in W_t$, где $W_t := \big\{\max\{\tau_1,\ |\zeta_1|\} < \ln^2 t\big\}$. При $(\tau_1,\zeta_1) \in W_t$ имеем

$$t'D(\alpha') = (t-\tau_1)D\left(\frac{x-\zeta_1}{t-\tau_1}\right) = (t-\tau_1)D\left(1,\frac{x-\zeta_1}{t-\tau_1}\right) =$$

$$D\left(t-\tau_1, x-\zeta_1\right)=tD\left(1-\frac{\tau_1}{t},\alpha-\frac{\zeta_1}{t}\right).$$

В условиях доказываемого утверждения функция $D(\theta,\beta)=\theta D\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$ аналитична в некоторой окрестности точки $(\theta_0,\beta_0)=(1,\alpha)$, поэтому в силу формулы Тейлора

$$D\left(1-\frac{\tau_1}{t},\alpha-\frac{\zeta_1}{t}\right)=D(1,\alpha)+(\lambda(1,\alpha)+o_1(1))\left(-\frac{\tau_1}{t}\right)+(\mu(1,\alpha)+o_2(1))\left(-\frac{\zeta_1}{t}\right),$$

где (см. формулы (2.26), (2.27), (2.30) в [3])

$$\lambda(1,\alpha):=\frac{\partial}{\partial\theta}D(\theta,\alpha)|_{\theta=1}=\lambda(\alpha),\quad \mu(1,\alpha):=\frac{\partial}{\partial\beta}D(\theta,\beta)|_{\beta=\alpha}=\mu(\alpha),$$

случайные функции $o_1(1)$, $o_2(1)$ равномерны на событии W_t. Поэтому

$$-\,t'D(\alpha')=-tD(\alpha)+\lambda(\alpha)(\tau_1+o_1(1))+\mu(\alpha)(\zeta_1+o_2(1)),\tag{2.31}$$

где случайные функции $o_1(1)$, $o_2(1)$ равномерны на событии W_t. Применяя соотношение (2.29) к формуле (2.30), получаем в силу (2.31)

$$P_3(t,\Delta[x])=\frac{\Delta}{\sqrt{t}}C(\alpha)e^{-tD(\alpha)}[I_Y(\alpha;u,v)+o(1)]\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)(\tau_1+o_1(1))+\mu(\alpha)(\zeta_1+o_2(1))};\,W_t)=$$

$$\frac{\Delta}{\sqrt{t}}\psi_1C(\alpha)e^{-tD(\alpha)}[I_Y(\alpha;u,v)+o(1)],$$

где $\psi_1=\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))$, случайные функции $o_1(1)$, $o_2(1)$ на событии W_t равномерно малы, функция $o(1)$ равномерна по $u\in[0,u_0]$, $v\in[0,v_0]$. Остается заметить, что слагаемое $P_2(t,\Delta[x])$ в силу леммы 2.5 мало в нужной степени и этим слагаемым можно пренебречь. Формула (2.5) в общем случае доказана. Лемма 2.1 доказана.

□

Из утверждения (*a*) леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия части* (*a*) *леммы 2.1. Тогда в формуле (2.5) остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $u\geq 0$, $v\geq 0$.

Доказательство. Обозначим левую часть формулы (2.5) через $P(t,\Delta,u,v)$. Обозначим далее

$$R(t):=\frac{1}{\sqrt{t}}\psi_1(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))C(\alpha)e^{-tD(\alpha)}.$$

Тогда утверждение (2.5) леммы 2.1 можно в "подробном виде" записать так: имеет место соотношение

$$P(t,\Delta,u,v)=\Delta R(t)\left[I_Y(\alpha^0,u,v)+f(t;\Delta,u,v)\right],$$

где для любой достаточно медленно стремящейся к нулю функции Δ_t^- и любой функции $\Delta_t^+\geq\Delta_t^-$, тоже стремящейся к нулю при $t\to\infty$, для любых чисел $u_0,\ v_0\in[0,\infty)$, выполняется при $t\to\infty$

$$\phi(t):=\sup\{|f(t;\Delta,u,v)|;\ \Delta_t^-\leq\Delta\leq\Delta_t^+,\ \ 0\leq u\leq u_0,\ \ 0\leq v\leq v_0\}=o(1).$$

Очевидно, далее, что можно выбрать функцию v_t, неограниченно возрастающую при $t\to\infty$, такую, что выполняется при $t\to\infty$

$$\phi_1(t):=\sup\{|f(t;\Delta,u,v)|;\ \Delta_t^-\leq\Delta\leq\Delta_t^+,\ \ 0\leq u\leq u_0,\ \ 0\leq v\leq v_t\}=o(1).$$

Заметим далее, что функция $P(t,\Delta,u,v)$ не убывает по аргументу v. Поэтому для некоторой функции $\theta=\theta(t,\Delta,u,v)\in(0,1]$ при всех $v\ge v_t$ справедливо

$$P(t,\Delta,u,v)=\theta P(t,\Delta,u,v_t)=\Delta R(t)\left[I_Y(\alpha^0,u,v)+f_1(t;\Delta,u,v)\right],$$

где

$$f_1(t;\Delta,u,v)=-I_Y(\alpha^0,u,v)+\theta(t,\Delta,u,v)\left(I_Y(\alpha^0,u,v_t)+f(t;\Delta,u,v_t)\right),$$

так что при $t\to\infty$

$$\phi_2(t):=\sup\{|f_1(t;\Delta,u,v)|;\ \Delta_t^-\le\Delta\le\Delta_t^+,\ \ 0\le u\le u_0,\ \ v_t\le v<\infty\}=o(1).$$

Мы доказали, таким образом, что *в формуле (2.5) остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $u\in[0,u_0]$, $v\ge 0$ *для любого* $u_0\in[0,\infty)$. Используя далее очевидное свойство монотонности функции $P(t,\Delta,u,v)$ по аргументу u, и повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что для некоторой функции $f_2(t;\Delta,u,v)$, удовлетворяющей соотношению

$$\phi_3(t):=\sup\{|f_2(t;\Delta,u,v)|;\ \Delta_t^-\le\Delta\le\Delta_t^+,\ \ u\ge 0,\ \ v\ge 0\}=o(1)\quad\text{при}\quad t\to\infty,$$

справедливо соотношение

$$P(t,\Delta,u,v)=\theta P(t,\Delta,u,v_t)=\Delta R(t)\left[I_Y(\alpha^0,u,v)+f_2(t;\Delta,u,v)\right].$$

Следствие 2.1 доказано. □

Поскольку теорема 1.2 следует из утверждений леммы 2.1 и следствия 2.1, то теорема 1.2 доказана.

□

3. Формулировки основных результатов в многомерном случае

Напомним, что элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ мы условились обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x}=(x_{(1)},\cdots,x_{(d)})$, $\mathbf{0}=(0,\cdots,0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y}:=x_{(1)}y_{(1)}+\cdots+x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}|:=\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_{(1)},\cdots,\zeta_{(d)})$. Через

$$(\tau,\boldsymbol{\zeta})=(\tau,\zeta_{(1)},\cdots,\zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Напомним коротко определение второго обобщенного процесса восстановления $\mathbf{Y}(t)$ с многомерным фазовым пространством $\mathbb{R}^d$, $d\ge 2$.

Обозначим

$$(T_0,\mathbf{Z}_0)=(0,\mathbf{0}),\ (T_1,\mathbf{Z}_1)=(\tau_1,\zeta_1),\ \cdots,\ (T_n,\mathbf{Z}_n)=(\tau_1+\cdots+\tau_n,\boldsymbol{\zeta}_1+\cdots+\boldsymbol{\zeta}_n),\ \cdots$$

где $\{(\tau_i,\boldsymbol{\zeta}_i)\}_{i=1}^\infty$—последовательность независимых случайных векторов, имеющих при $i\ge 2$ общее распределение с вектором $(\tau,\boldsymbol{\zeta})$; при этом $\mathbf{P}(\tau_1\ge 0)=\mathbf{P}(\tau>0)=1$. В настоящем разделе работы мы изучаем многомерный обобщенный процесс восстановления $\mathbf{Y}(t)$, который при $t\ge 0$ определяется как

$$\mathbf{Y}(t):=\mathbf{Z}_{\eta(t)},\quad\text{где}\quad\eta(t):=\min\{k\ge 0:\ T_k>t\}.$$

В теореме 3.1 (см. ниже) предложена точная асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}]), \quad \Delta[\mathbf{x}] := \prod_{i=1}^{d}[x_{(i)}, x_{(i)} + \Delta),$$

где $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно при $t \to \infty$, последовательность $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ такова, что отношение $\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t}$ лежит в некотором фиксированном компакте. Теорема 3.1 распространяет результат теоремы 1.2 на многомерный случай.

Везде ниже, если не оговорено противное, будем предпологать, что выполнено условие Крамера для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{v\tau+v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ является *нерешетчатым*, т.е. *для любого ненулевого вектора* $(c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *выполняется* $|\mathbf{E}e^{i(c\tau+\mathbf{c}\boldsymbol{\zeta})}| < 1$. *Эти два условия во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.*

Положим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu});$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}.$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Положим

$$B_t(u, v) := \{\gamma(t) \geq u, \quad \chi(t) \geq v\},$$

где

$$\gamma(t) := t - T_{\eta(t)-1}, \quad \chi(t) := T_{\eta(t)} - t,$$

— величины *недоскока* $\gamma(t)$ до уровня t и *перескока* $\chi(t)$ через уровень t блужданием $\{T_k\}$, соответственно;

$$I_Y(\boldsymbol{\alpha}; u, v) := \int_u^\infty e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y}\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}}; \ \tau \geq y + v)dy, \tag{3.1}$$

где вектор $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$, лежащий на границе $\partial\mathcal{A}^{\leq 0}$ выпуклого множества

$$\mathcal{A}^{\leq 0} = \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leq 0\},$$

построен и изучен в разделе 2 работы [3] (см. (I.2.24), (I.2.25)).

Обозначим

$$\mathcal{M} := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}} < \infty\}.$$

В силу условия $[\mathbf{C}_0]$ имеем: внутренность $(\mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$ не пуста и содержит точку $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{0} \in (\mathcal{M}).$$

Напомним, что функции $D(\boldsymbol{\alpha}) = D(1, \boldsymbol{\alpha})$ определена и подробно изучена в работе [3] (см. (I.2.14), (I.2.25)). Положительная непрерывная на множестве $\mathfrak{A}$ функция $C(\boldsymbol{\alpha})$ определена в [3] как $C(\boldsymbol{\alpha}) := C(1, \boldsymbol{\alpha})$, где функция $C(\theta, \alpha)$, в свою очередь, определена в [3] формулой (I.2.33). Множество

$$\mathfrak{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A})\}$$

определено и изучено в [3].

Следующее утверждение распространяет на многомерный случай теорему 1.2:

Теорема 3.1. *Пусть фиксирован компакт K, такой, что*

$$K \subset \mathfrak{A}.$$

Пусть выполнено условие

$$\mathcal{M}_K := \{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}') : \ \boldsymbol{\alpha}' \in K\} \subset \mathcal{M}.$$

Тогда для $\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t} \in K$ *имеем:*

(i). *Справедлива формула*

$$I_Y(\boldsymbol{\alpha}; 0, 0) = \begin{cases} \frac{1-\psi(0,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))}{\lambda(\boldsymbol{\alpha})} < \infty, & \text{\textit{если} } \lambda(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0; \\ \psi'_{(1)}(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) < \infty \quad (= \mathbf{E}\tau \quad \text{\textit{при}} \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a} := \frac{\mathbf{E}\boldsymbol{\zeta}}{\mathbf{E}\tau}), & \text{\textit{если} } \lambda(\boldsymbol{\alpha}) = 0. \end{cases}$$

(ii). *Пусть для начального случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ *выполнено условие "допустимой неоднородности"*

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1) \quad \text{\textit{где}} \quad \mathcal{A}_K := \{(\lambda(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) : \ \boldsymbol{\beta} \in K\}. \tag{3.2}$$

Тогда при $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}); \ B_t(u, v)) =$$

$$P_1(v, \Delta[\mathbf{x})) + \frac{\Delta^d}{t^{d/2}} \psi_1 C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} [I_Y(\boldsymbol{\alpha}; u, v) + o(1)], \tag{3.3}$$

где $\psi_1 := \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$,

$$P_1(v, \Delta[\mathbf{x})) := \mathbf{P}(\tau_1 > t + v, \ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta[\mathbf{x})),$$

остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $\boldsymbol{\alpha} \in K$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. *Если выполнено дополнительное условие*

$$(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})) \in (\mathcal{A}_1) \quad \text{\textit{при всех}} \quad \boldsymbol{\beta} \in K, \tag{3.4}$$

то слагаемое $P_1(v, \Delta[\mathbf{x}))$ *в правой части (3.3) можно удалить.*

4. Доказательство теоремы 3.1

I. Доказательство части (i) теоремы 3.1 полностью совпадает с доказательством части (i) теоремы 3.2 в работах [1],[2]. Поэтому мы опускаем это доказательство.

II. При доказательстве части (ii) теоремы 3.1 (ср. с доказательством теоремы 1.2), мы, для упрощения выкладок, будем доказывать эквивалентное утверждение, в котором:

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{\mathbf{x}}{t} \to \boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathfrak{A}, \tag{4.1}$$

$$(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)) \in (\mathcal{A}); \tag{4.2}$$

условия (3.2), (3.4) заменены на условия

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)) \in (\mathcal{A}_1), \tag{4.3}$$

$$(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0)) \in (\mathcal{A}_1), \tag{4.4}$$

соответственно.

Будем доказывать часть (ii) "упрощенной" версии теоремы 3.1, которую сформулируем в виде отдельного утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены соотношения (4.1)–(4.3). Тогда:*

(a). *При* $t \to \infty$

(4.5)
$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}];\ B_t(u,v),\ \eta(t) \geq 2) = \frac{\Delta^d}{t^{d/2}} \psi_1 C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} [I_Y(\boldsymbol{\alpha}; u, v) + o(1)],$$

где $\psi_1 := \psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$, *остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$ *для любых фиксированных* $u_0,\ v_0 \in [0, \infty)$.

(b) *Если выполнено дополнительное условие (4.4), то для некоторых* $t_0 < \infty$, $c > 0$, $C < \infty$ *при всех* $t \geq t_0$ *и для любого* $\Delta \in (0, 1]$ *выполняется*

(4.6)
$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}];\ B_t(u,v),\ \eta(t) = 1) = \mathbf{P}(\tau_1 > t+v,\ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta[\mathbf{x}]) \leq C e^{-tD(\boldsymbol{\alpha}) + |\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})| - ct}.$$

Из утверждения (a) леммы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия части* (a) *леммы 4.1. Тогда в формуле (4.5) остаточный член* $o(1)$ *равномерен по* $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Доказательство следствия 4.1 дословно повторяет доказательство следствия 2.1, поэтому мы его опускаем.

Поскольку теорема 3.1 (ее упрощенная версия) следует из утверждений леммы 4.1 и следствия 4.1, то теорема 3.1 доказана.

Обратимся теперь к доказательству леммы 4.1. При этом сначала будет выполнено доказательство (4.5) в частном случае однородного процесса восстановления $\mathbf{Y}(t)$. И только затем, используя уже доказанное в однородном случае равенство (4.5), докажем это равенство в общем случае.

Для доказательства равенства (4.5) в однородном случае нам понадобится

Лемма 4.2. *Пусть для однородного процесса* $\mathbf{Y}(t)$ *выполнены условия (4.1), (4.2) "упрощенной" версии теоремы 3.1. Тогда найдутся* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *такие, что при всех* $t \geq t_0$, $0 < \Delta \leq 1$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}], \tau_{\eta(t)} + |\boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)}| \geq \ln^2 t,\ \eta(t) \geq 1) \leq C t^2 e^{-tD(\boldsymbol{\alpha}) - c \ln^2 t}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (4.7) через P_t. Тогда для события $B_n(t) := \{\tau_n + |\boldsymbol{\zeta}_n| \geq \ln^2 t\}$ имеем

$$P_t = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P}(\mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}],\ T_{n-1} \leq t < T_n,\ \ B_n(t)).$$

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда для некоторых* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *при всех* $n \geq 1$, $t \geq t_0$, $0 < \Delta \leq 1$

$$P_n(t) \leq C e^{-tD(\boldsymbol{\alpha}) - c \ln^2 t}. \tag{4.8}$$

Доказательство леммы 4.3 дословно повторяет доказательство леммы 2.3, поэтому мы его опускаем.

Продолжим доказательство леммы 4.2. Поскольку

$$\sum_{n \geq t^2} P_n(t) \leq \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(T_{n-1} \leq t),$$

то при $\frac{t}{t^2-1} < \mathbf{E}\tau$, $n \geq t^2$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева имеем

$$\mathbf{P}(T_{n-1} \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{t}{n-1})} \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-1})},$$

где

$$\Lambda_\tau(u) := \sup_\lambda \{\lambda u - \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau}\}$$

—функция уклонений для случайной величины τ. Поскольку $\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-1}) \to \infty$ при $t \to \infty$, то справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \sum_{n \geq t^2} P_n(t) = -\infty. \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.8), (4.9) вытекает утверждение леммы 4.2. □

Для формулирования леммы 4.4, которая тоже понадобится для доказательства "упрощенной"версии теоремы 3.1 (леммы 4.1) в однородном случае, необходимы дополнительные обозначения.

Обозначим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A})$; $u, v, w \in \mathbb{R}$

$$G(\Delta) = G(\Delta, w; \lambda, \boldsymbol{\mu}) := \int_{t=w}^{\infty} \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d} e^{\lambda t + \boldsymbol{\mu}\mathbf{z}} \mathbf{P}(\tau \geq t,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}]) dt d\mathbf{z};$$

$$I(\lambda, \boldsymbol{\mu}; u, v) := \int_u^\infty e^{\lambda y} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ \tau \geq y + v) dy.$$

Заметим, что если $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$, $(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A})$, то справедливо равенство

$$I(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}); u, v) = I_Y(\boldsymbol{\alpha}; u, v).$$

где функция $I_Y(\boldsymbol{\alpha}; u, v)$ определена перед формулировкой теоремы 3.1 (см. (3.1)).

Лемма 4.4. *Пусть выполнено условие*

$$(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}), \quad (0, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}).$$

Тогда справедливо тождество

$$e^{-\lambda v} G(\Delta, u + v; \lambda, \boldsymbol{\mu}) = \Delta^d C(\Delta, \boldsymbol{\mu}) I(\lambda, \boldsymbol{\mu}; u, v), \tag{4.10}$$

где для $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{(1)}, \cdots, \mu_{(d)})$

$$C(\Delta, \boldsymbol{\mu}) := \prod_{i=1}^d c(\Delta, \mu_{(i)}), \qquad c(\Delta, \mu_{(i)}) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\mu_{(i)}\Delta}}{\mu_{(i)}\Delta}, & \text{если } \mu_{(i)} \neq 0; \\ 1, & \text{если } \mu_{(i)} = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Доказательство. Обозначим $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_\Delta$ случайный вектор с равномерным в кубе

$$\Delta[\mathbf{0}) = [0, \Delta) \times \cdots \times [0, \Delta)$$

распределением, не зависящий от вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Преобразование Лапласа над распределением $-\boldsymbol{\gamma}$ имеет вид (см. (4.11))

$$\mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}(-\boldsymbol{\gamma})} = C(\Delta, \boldsymbol{\mu}). \tag{4.12}$$

Для фиксированного $t \geq 0$ рассмотрим несобственный случайный вектор $\mathbf{x}_t$ с распределением

$$F_t(B) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_t \in B) := \mathbf{P}(\tau \geq t, \ \ \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\gamma} \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^d.$$

Очевидно, что распределение $F_t(B)$ абсолютно непрерывно (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^d$). Обозначив соответствующую плотность $f_t(\mathbf{z})$ и используя формулу свертки

$$f_t(\mathbf{z}) = \mathbf{E}(p_{-\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\zeta});\ \tau \ge t), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d,$$

где $p_{-\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y})$—плотность случайной величины $-\boldsymbol{\gamma}$, получаем формулу

$$f_t(\mathbf{z}) = \frac{1}{\Delta^d}\mathbf{P}(\tau \ge t,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}]), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.13}$$

Поэтому, учитывая (4.12) и (4.13), получаем для любого фиксированного $t \ge 0$ равенства

$$\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d} e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{z}}\mathbf{P}(\tau \ge t,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}])d\mathbf{z} = \Delta^d \int_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d} e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{z}} f_t(\mathbf{z})d\mathbf{z} =$$

$$\Delta^d\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\gamma})};\ \tau \ge t) = \Delta^d\mathbf{E}e^{-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ \tau \ge t) = \Delta^d C(\Delta,\boldsymbol{\mu})\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ \tau \ge t).$$

Поэтому левая часть формулы (4.10) представляется интегралом

$$\Delta^d C(\Delta,\boldsymbol{\mu})e^{-\lambda v}\int_{t=u+v}^{\infty} e^{\lambda t}\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}};\ \tau \ge t)dt,$$

в котором замена $t = v+y$ приводит к правой части формулы (4.10). Лемма 4.4 доказана. $\square$

Завершим теперь

Доказательство части (*a*) *леммы 4.1 в однородном случае.* Обозначим левую часть (4.5)

$$P(\Delta,t) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}];\ B(u,v),\ \eta(t) \ge 2)$$

и воспользуемся очевидным соотношением

$$P(\Delta,t) = P_2(\Delta,t) + P_3(\Delta,t), \tag{4.14}$$

где

$$P_2(\Delta,t) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}];\ B(u,v),\ \eta(t) \ge 2, \quad \max\{\tau_{\eta(t)},\ |\boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)}|\} \ge \ln^2 t\});$$

$$P_3(\Delta,t) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}];\ B(u,v),\ \eta(t) \ge 2, \quad \max\{\tau_{\eta(t)},\ |\boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)}|\} < \ln^2 t\}).$$

Найдем прежде всего асимптотику слагаемого $P_3(\Delta,t)$ в правой части (4.14). Воспользуемся следующим представлением

$$P_3(\Delta,t) = \int_{y=u}^{\ln^2 t - v}\int_{|\mathbf{z}|\le\ln^2 t} H(t-dy,\ \mathbf{x}-d\mathbf{z})\mathbf{P}(\ln^2 t \ge \tau \ge y+v,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}]),$$

где $H(\cdot,\cdot)$—мера восстановления для однородного блуждания $(T_n,\mathbf{Z}_n)$. Воспользуемся далее интегро-локальной теоремой для меры восстановления (см. теорему 4.1 в [1],[2] или теорему 4.1 в [3]):

Теорема 4.1. *Для любого компакта* $K \subset \mathcal{D} := \left\{(\theta,\boldsymbol{\beta}) :\ \frac{\boldsymbol{\beta}}{\theta} \in \mathfrak{A},\quad \theta > 0\right\}$, *при* $(\theta,\boldsymbol{\beta}) := \left(\frac{s}{t},\frac{\mathbf{l}}{t}\right) \in K$ *справедливо*

$$H(\delta[s]\times\Delta[\mathbf{l}]) = \frac{\delta\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}C(\theta,\boldsymbol{\beta})e^{-tD(\theta,\boldsymbol{\beta})}(1+o(1)),$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен по* $(\theta,\boldsymbol{\beta}) \in K$.

В зоне
$$\mathcal{V}_t := \{(y, \mathbf{z}) :\ 0 \le y, \quad \max\{y,\ |\mathbf{z}|\} \le \ln^2 t\}$$
при $t \to \infty$ справедливо
$$-tD(1 - \frac{y}{t}, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{z}}{t}) = -tD(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda y + \boldsymbol{\mu}\mathbf{z},$$
где $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda(\boldsymbol{\alpha}) + o(1), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{o}(1)) = (\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0) + o(1), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0) + \mathbf{o}(1))$, и остаточные члены $o(1)$, $\mathbf{o}(1)$ равномерны по $(y, \mathbf{z}) \in \mathcal{V}_t$. Поэтому можно выбрать векторы
$$(\lambda^{\pm},\ \boldsymbol{\mu}^{\pm}) = (\lambda(\boldsymbol{\alpha}^0) + o^{\pm}(1), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}^0) + \mathbf{o}^{\pm}(1))$$
таким образом, что остаточные члены $o^{\pm}(1)$, $\mathbf{o}^{\pm}(1)$ не зависят от $(y, \mathbf{z}) \in \mathcal{V}_t$ и в зоне $\mathcal{V}_t$ выполняется
$$\lambda^- y + \boldsymbol{\mu}^- \mathbf{z} \le \lambda y + \boldsymbol{\mu}\mathbf{z} \le \lambda^+ y + \boldsymbol{\mu}^+ \mathbf{z}.$$
Поэтому, привлекая теорему 4.1, получаем
$$P_3(\Delta, t) = \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} \Big[P_4(\Delta, t) + o(1) \Big], \tag{4.15}$$
где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$,
$$P_4^-(\Delta, t) \le P_4(\Delta, t) \le P_4^+(\Delta, t), \tag{4.16}$$
$$P_4^{\pm}(\Delta, t) := \int_{y=u}^{\ln^2 t - v} \int_{|\mathbf{z}| \le \ln^2 t} e^{\lambda^{\pm} y + \boldsymbol{\mu}^{\pm}\mathbf{z}} \mathbf{P}(\ln^2 t \ge \tau \ge y + v, \quad \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}]) dy d\mathbf{z}.$$
Сделав замену $y \to y + v$, получаем
$$\begin{aligned} P_4^{\pm}(\Delta, t) &= e^{-\lambda^{\pm} v} \int_{y=u+v}^{\infty} \int_{|\mathbf{z}| < \infty} e^{\lambda^{\pm} y + \boldsymbol{\mu}^{\pm}\mathbf{z}} \mathbf{P}(\ln^2 t \ge \tau \ge y, \quad \boldsymbol{\zeta} \in \Delta[\mathbf{z}]) dy d\mathbf{z} + o^{\pm}(1) \\ &= e^{-\lambda^{\pm} v} G(\Delta, u + v; \lambda^{\pm}, \boldsymbol{\mu}^{\pm}) + o^{\pm}(1), \end{aligned}$$
где остаточные члены $o^{\pm}(1)$ равномерны по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$. Для всех достаточно больших t для точки $(\lambda^{\pm}, \boldsymbol{\mu}^{\pm})$ выполнено условие леммы 4.4. Пусть $\Delta = \Delta_t \to 0$ достаточно медленно, так что
$$\frac{o^{\pm}(1)}{\Delta_t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$
Тогда из леммы 4.4 вытекает
$$P_4^{\pm}(\Delta, t) = \Delta I(\lambda^{\pm}, \boldsymbol{\mu}^{\pm}) + o^{\pm}(1) = \Delta \left[I_Y(\alpha^0; u, v) + o_1^{\pm}(1) \right] + o^{\pm}(1),$$
где остаточные члены $o_1^{\pm}(1),\ o^{\pm}(1)$ равномерны по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$. Применяя последнее соотношение к (4.16) и учитывая (4.15), получаем для слагаемого $P_3(\Delta, t)$ в сумме (4.14) представление
$$P_3(\Delta, t) = \frac{\Delta^d}{t^{d/2}} C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} \Big[I_Y(\boldsymbol{\alpha}^0; u, v) + o(1) \Big], \tag{4.17}$$
в котором остаточный член $o(1)$ равномерен по $u \in [0, u_0]$, $v \in [0, v_0]$.

Поскольку
$$P_2(\Delta, t) \le \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x});\ \eta(t) \ge 2, \tau_{\eta(t)} + |\boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)}| \ge \ln^2 t),$$
то в силу леммы 4.2 слагаемое $P_2(\Delta, t)$ в правой части (4.14) допускает "нужную" оценку сверху. Поэтому из (4.17) вытекает соотношение (4.5) в однородном случае. □

Докажем теперь соотношение (4.5) в неоднородном случае.

Лемма 4.5. *Пусть процесс* $\mathbf{Y}(t)$ *является неоднородным и выполнены следующие условия (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) "упрощенной" версии теоремы 3.1 (леммы 4.1). Тогда найдутся* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *такие, что при всех* $t \ge t_0$, $0 < \Delta \le 1$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}), \quad \max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\} \ge \ln^2 t,\ \eta(t) \ge 2) \le Ct^2 e^{-tD(\boldsymbol{\alpha}) - c\ln^2 t}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (4.18) через P_t. Тогда для $B_1(t) := \{\max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\} \ge \ln^2 t\}$ имеем

$$P_t = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P}(\mathbf{Z}_n \in \Delta[\mathbf{x}),\ T_{n-1} \le t < T_n,\ \ B_1(t)).$$

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 4.6. *Пусть выполнены условия леммы 4.5. Тогда для некоторых* $t_0 < \infty$, $C < \infty$, $c > 0$ *при всех* $n \ge 2$, $t \ge t_0$, $0 < \Delta \le 1$

$$P_n(t) \le Ce^{-tD(\boldsymbol{\alpha}) - c\ln^2 t}. \tag{4.19}$$

Доказательство леммы 4.6 повторяет доказательство леммы 2.6, поэтому мы его опускаем.

Продолжим доказательство леммы 4.5. Поскольку

$$\sum_{n \ge t^2} P_n(t) \le \sum_{n \ge t^2} \mathbf{P}(T_{n-1} \le t) \le \sum_{n \ge t^2} \mathbf{P}(\tau_2 + \cdots + \tau_{n-1} \le t),$$

и при $\frac{t}{t^2-2} < \mathbf{E}\tau$, $n \ge t^2$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\tau_2 + \cdots + \tau_{n-1} \le t) \le e^{-(n-2)\Lambda_\tau(\frac{t}{n-2})} \le e^{-(n-2)\Lambda_\tau(\frac{t}{t^2-2})},$$

то справедливо соотношение (ср. с доказательством соотношения (4.9))

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{n \ge t^2} P_n(t) = -\infty. \tag{4.20}$$

Из соотношений (4.19), (4.20) вытекает утверждение леммы 4.5. □

Покажем теперь, что при выполнении условий (4.3), (4.4) в общем (неоднородном) случае для любого фиксированного $\Delta_0 > 0$ вероятностью

$$P := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta_0[\mathbf{x}),\ B_t(u,0),\ \eta(t) = 1) = \mathbf{P}(\tau_1 \ge t,\ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta_0[\mathbf{x}))$$

можно можно пренебречь. Иначе говоря, выполним

Доказательство части (*b*) *леммы 4.1.* Определим два случайных вектора $\left(\widehat{\tau}_1, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1\right)$, $(\overline{\tau}_1, \overline{\boldsymbol{\zeta}}_1)$, положив для $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}_1, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1) \in B) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))} \mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})\tau_1 + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}_1};\ (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \in B),$$

$$\mathbf{P}((\overline{\tau}_1, \overline{\boldsymbol{\zeta}}_1)) := \frac{1}{\psi_1(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}_1};\ (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \in B).$$

В силу условий (4.3), (4.4) для всех достаточно больших t новые случайные векторы удовлетворяют *равномерному условию* $[\mathbf{C}_0]$: для некоторых $t_0 < \infty$, $\delta > 0$, $C < \infty$ при всех $t \ge t_0$ справедливы оценки

$$\sup_{|\lambda| + |\boldsymbol{\mu}| \le \delta} \mathbf{E}e^{\lambda\widehat{\tau}_1 + \boldsymbol{\mu}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_1} \le C, \qquad \sup_{|\lambda| + |\boldsymbol{\mu}| \le \delta} \mathbf{E}e^{\lambda\overline{\tau}_1 + \boldsymbol{\mu}\overline{\boldsymbol{\zeta}}_1} \le C.$$

Из этого вытекает, что координаты $\widehat{\tau}_1$, $\overline{\tau}_1$ тоже удовлетворяют *равномерному условию* $[\mathbf{C}_0]$: для некоторых $t_0 < \infty$, $\delta > 0$, $C < \infty$ при всех $t \geq t_0$ справедливы оценки

$$\sup_{|\lambda|\leq\delta} \mathbf{E}e^{\lambda\widehat{\tau}_1} \leq C, \quad \sup_{|\lambda|\leq\delta} \mathbf{E}e^{\lambda\overline{\tau}_1} \leq C. \tag{4.21}$$

Обратимся теперь непосредственно к оцениванию вероятности P (т.е. левой части неравенства (4.6)). Имеем

$$P = \mathbf{E}(e^{\pm\lambda(\boldsymbol{\alpha})\tau_1 \pm \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\zeta_1};\ \tau_1 \geq t,\ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta_0[\mathbf{x}])$$
$$= e^{-t(\lambda(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha})}\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau_1+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}_1+\lambda(\boldsymbol{\alpha})(t-\tau_1)+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1)};\ \tau_1 \geq t,\ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta_0[\mathbf{x}]).$$

Поскольку на событии $\boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta_0[\mathbf{x}]$ выполняется

$$e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1)} \leq e^{\sqrt{d}\Delta_0|\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})|},$$

то справедливо

$$P \leq e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})+\sqrt{d}\Delta_0|\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})|}\mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})\tau_1+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}_1+\lambda(\boldsymbol{\alpha})(t-\tau_1)};\ \tau_1 \geq t)$$
$$= e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})+\sqrt{d}\Delta_0|\mu(\boldsymbol{\alpha})|}\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))\mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})(t-\widehat{\tau}_1)};\ \widehat{\tau}_1 \geq t).$$

Мы получили неравенство

$$P \leq e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})+\sqrt{d}\Delta_0|\mu(\boldsymbol{\alpha})|}\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))E(t), \tag{4.22}$$

где

$$E(t) := \mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})(t-\widehat{\tau}_1)};\ \widehat{\tau}_1 \geq t),$$

и нам достаточно оценить сверху $E(t)$.

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda(\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$. В этом случае

$$E(t) \leq \mathbf{P}(\widehat{\tau}_1 \geq t),$$

и в силу равномерного условия $[\mathbf{C}_0]$ для $\widehat{\tau}_1$ (см. (4.21)) получаем для некоторых $t_0 < \infty$, $c > 0$, $C < \infty$ и всех $t \geq t_0$

$$E(t) \leq Ce^{-ct}. \tag{4.23}$$

2. В случае $\lambda(\boldsymbol{\alpha}) < 0$ имеем $e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})t} \leq 1$ и

$$E(t) = \frac{\psi_1(0,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))}{\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))\psi_1(0,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))}e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})t}\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}_1};\ \tau \geq t)$$
$$\leq \frac{\psi_1(0,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))}{\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))}\mathbf{P}(\overline{\tau}_1 \geq t).$$

Поэтому, в силу равномерного условия $[\mathbf{C}_0]$ для $\overline{\tau}_1$ (см. (4.21)) получаем и в этом случае неравенство (4.23). Поскольку из (4.22) и (4.23) следует (4.6), то утверждение (*b*) леммы 4.1 доказано. □

Осуществим теперь вывод формулы (4.5) в общем (неоднородном) случае с помощью утверждения леммы 4.5 и уже доказанной формулы (4.5) в однородном случае. Обозначим левую часть формулы (4.5) в общем (неоднородном) случае через $P(t,\Delta[\mathbf{x}))$ и воспользуемся следующим очевидным соотношением

$$P(t,\Delta[\mathbf{x})) = P_2(t,\Delta[\mathbf{x})) + P_3(t,\Delta[\mathbf{x})), \tag{4.24}$$

где

$$P_2(t,\Delta[\mathbf{x})) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}),\ B_t(u,v),\ \eta(t) \geq 2,\ \ \max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\} \geq \ln^2 t),$$
$$P_3(t,\Delta[\mathbf{x})) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\mathbf{x}),\ B_t(u,v),\ \eta(t) \geq 2,\ \ \max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\} \ln^2 t).$$

Положим далее для однородного случая

$$R(t,\Delta[\mathbf{x}];\ u,v) := \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t)\in\Delta[\mathbf{x}),\ B_t(u,v)).$$

Из частей (a) и (b) леммы 4.1 вытекает, что в однородном случае имеет место соотношение

$$R(t,\Delta[\mathbf{x}];\ u,v) = \frac{\Delta^d}{t^{d/2}}C(\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}[I_Y(\boldsymbol{\alpha};u,v)+o(1)], \tag{4.25}$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $u\in[0,u_0]$, $v\in[0,v_0]$. Представим теперь слагаемое $P_3(t,\Delta[\mathbf{x}))$ из правой части формулы (4.24) в виде

$$P_3(t,\Delta[\mathbf{x})) = \mathbf{E}(R(t-\tau_1,\Delta[\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1);\ u,v);\quad \max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\}<\ln^2 t), \tag{4.26}$$

и воспользуемся соотношением (4.25), в котором (t,x) заменено на $(t',\mathbf{x}') := (t-\tau_1,\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1)$, $\boldsymbol{\alpha}$ заменено на $\boldsymbol{\alpha}' := \frac{\mathbf{x}'}{t'}$ в зоне $(\tau_1,\boldsymbol{\zeta}_1)\in W_t$, где $W_t := \left\{\max\{\tau_1,\ |\boldsymbol{\zeta}_1|\}<\ln^2 t\right\}$. При $(\tau_1,\boldsymbol{\zeta}_1)\in W_t$ имеем

$$\begin{aligned} t'D(\boldsymbol{\alpha}') &= (t-\tau_1)D\left(\frac{\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1}{t-\tau_1}\right) = (t-\tau_1)D\left(1,\frac{\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1}{t-\tau_1}\right)\\ &= D\left((t-\tau_1),\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}_1\right) = tD\left(1-\frac{\tau_1}{t},\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right). \end{aligned}$$

В условиях доказываемого утверждения функция $D(\theta,\boldsymbol{\beta})=\theta D\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\theta}\right)$ аналитична в некоторой окрестности точки $(\theta_0,\boldsymbol{\beta}_0)=(1,\boldsymbol{\alpha})$, поэтому в силу формулы тейлора

$$D\left(1-\frac{\tau_1}{t},\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right) = D(1,\boldsymbol{\alpha})+(\lambda(1,\boldsymbol{\alpha})+o_1(1))\left(-\frac{\tau_1}{t}\right)+(\boldsymbol{\mu}(1,\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{o}_2(1))\left(-\frac{\boldsymbol{\zeta}_1}{t}\right),$$

где (см. формулу (2.30) в [3])

$$\lambda(1,\boldsymbol{\alpha}) := \frac{\partial}{\partial\theta}D(\theta,\boldsymbol{\alpha})|_{\theta=1}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\quad \boldsymbol{\mu}(1,\boldsymbol{\alpha}) := \frac{\partial^d}{\partial\beta_{(1)}\cdots\partial\beta_{(d)}}D(\theta,\boldsymbol{\beta})|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}),$$

случайные функции $o_1(1)$, $\mathbf{o}_2(1)$ равномерны на событии W_t. Поэтому

$$-t'D(\boldsymbol{\alpha}') = -tD(\boldsymbol{\alpha})+\lambda(\boldsymbol{\alpha})(\tau_1+o_1(1))+\boldsymbol{\mu}(\alpha)(\boldsymbol{\zeta}_1+\mathbf{o}_2(1)), \tag{4.27}$$

где случайные функции $o_1(1)$, $\mathbf{o}_2(1)$ равномерны на событии W_t. Применяя соотношение (4.25) к формуле (4.26), получаем в силу (4.27)

$$\begin{aligned} &P_3(t,\Delta[\mathbf{x}))\\ &\quad=\frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}C(\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}[I_Y(\boldsymbol{\alpha};u,v)+o(1)]\mathbf{E}(e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})(\tau_1+o_1(1))+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\zeta}_1+\mathbf{o}_2(1))};\ W_t)\\ &\quad=\frac{\Delta^d}{t^{\frac{d}{2}}}\psi_1C(\boldsymbol{\alpha})e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})}[I_Y(\boldsymbol{\alpha};u,v)+o(1)], \end{aligned}$$

где $\psi_1=\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$, случайные функции $o_1(1)$, $\mathbf{o}_2(1)$ на событии W_t равномерно малы, функция $o(1)$ равномерна по $u\in[0,u_0]$, $v\in[0,v_0]$. Остается заметить, что слагаемое $P_2(t,\Delta[\mathbf{x}))$ в силу леммы 4.5 мало в нужной степени и этим слагаемым можно пренебречь. Формула (4.5) в общем случае доказана. Лемма 4.1 доказана.

□

References

[1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514.

[2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750.

[3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502.

[4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 503–527.

[5] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. IV,* Siberian Electronic Mathematical Reports, In press.

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

Evgenii Igorevich Prokopenko
Novosibirsk State University,
1 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com