S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 54–59 (2018) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2018.15.007 MSC 05C25

НЕБОЛЬШИЕ ВЕРШИННО СИММЕТРИЧНЫЕ ГРАФЫ ХИГМЕНА С $\mu = 6$

Н.Д. ЗЮЛЯРКИНА, А.А. МАХНЕВ

Abstract. Strongly regular graph with $v = \binom{m}{2}$ and $k = 2(m-2)$ is called Higman graph. In Higman graphs the parameter μ takes values 4, 6, 7 and 8. Previously the authors found edge-symmetric Higman graphs.

It is realized the programm classification of vertex-symmetric Higman graphs. In this work we study the vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$ and $m = 9, 17$.

Keywords: graph, automorphism, fixed-point subgraph.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^\perp$ обозначим $\cap_{a \in \Delta} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$. Графом ранга 3 называется сильно регулярный граф с такой вершинно транзитивной группой автоморфизмов, что стабилизатор вершины действует транзитивно на ее окрестности и на ее антиокрестности.

Zyulyarkina, N.D., Makhnev, A.A., Small vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$.

Работа выполнена при финансовой гранта РНФ (проект 14-11-00061-П)..

Поступила 1 декабря 2017 г., опубликована 31 января 2018 г.

Через $K_{m,n}$ обозначим полный двудольный граф с долями порядков m, n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $a \times b$-*решеткой*, если $|X| = a$, $|Y| = b$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф на множестве неупорядоченных пар из X называется *треугольным графом* $T(m)$, если $|X| = m$, а пары $\{x, y\}$ и $\{u, w\}$ смежны тогда и только тогда, когда $|\{x, y\} \cap \{u, w\}| = 1$. Граф $T(m)$ является сильно регулярным с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$. Если Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$, то либо Γ изоморфен $T(m)$, либо $m = 8$ и Γ изоморфен одному из трех графов Чанга.

Графы ранга 3 с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ изучал Д. Хигмен [1]. Он доказал, что сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$ либо изоморфен треугольному графу $T(m)$ или одному из графов Чанга, либо $\mu \in \{6, 7, 8\}$, и в случае $\mu = 6$ $m = 7$ и Γ изоморфен дополнительному графу к $T(7)$ или $m \in \{9, 17, 27, 57\}$.

Графом Хигмена назовем сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$. Ранее [2] авторами были найдены возможные автоморфизмы графов Хигмена с $\mu = 6$ и подграфы неподвижных точек этих автоморфизмов. Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_j(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u, u^g) = j$.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(36, 14, 4, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$ *или* 3 *и* $\alpha_1(g) = 6r$;

(2) Ω *является* 1*-кликой,* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 14$ *или* 3*-кликой,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 6r$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$ *и* $l \in \{4, 6, 8\}$;

(4) $p = 3$, $\Omega \subset a^{\perp}$ *для некоторой вершины* a, $\Omega(a)$ *является* 2×4*-решеткой (и в этом случае* $\alpha_1(g) = 0$*) или* Ω *является объединением двух или трех изолированных треугольников;*

(5) $p = 2$, $|\Omega| \le 18$, *степень вершины в графе* Ω *четна и меньше* 14.

Предложение 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(136, 30, 8, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20r + 4$ *или* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$;

(2) Ω *является* 1*-кликой и* $p = 3, 5$ *или* Ω *является* 3*-кликой,* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 70r + 42$ *или* Ω *является* 4*-кликой,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30r + 12$ *или* Ω *является* 7*-кликой,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30r + 24$;

(3) Ω *является* t*-кокликой,* $p = 3$ *и* $t \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$ *или* $p = 2$ *и* $t \in \{8, 10, 16\}$;

(4) Ω *не является пустым графом, кликой или кокликой, и* $p \in \{2, 3\}$.

В данной работе изучены вершинно симметричные графы Хигмена с $\mu = 6$ и $m = 9, 17$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(36, 14, 4, 6)$ *и неразрешимая группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда* Γ *— граф ранга* 3 *для группы* $U_3(3)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(136, 30, 8, 6)$ *и неразрешимая группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда* $S(G)$ *является* 2*-группой, цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/S(G)$ *изоморфен* $L_2(16)$ *и* $\bar{T}_a$ *— расширения* E_{16} *с помощью* Z_{15} *— подгруппа индекса* 17 *в* $\bar{T}$.

2. Вспомогательные результаты

Доказательство теорем опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-ое собственное подпространство W_i матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления группы G, полученного при проектировании π_i. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g).$$

Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если Γ имеет целочисленные собственные значения, то число $\chi_i(g)$ является целым.

Приведем также две комбинаторные леммы.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* $k, r, -m$. *Если* g *— автоморфизм* Γ, *то* $|\mathrm{Fix}(g)| \le v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k-r)$.

Доказательство. Это теорема 3.2 из [4]. □

Лемма 2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* $r, s,$ $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [5]). □

Лемма 3. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями,* g *— автоморфизм графа* Γ *простого порядка* p *и* χ *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* m *собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l*, не кратного* p *и* p *делит* $m - \chi(g)$*.*

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3 и предложения 2 [6], примененного к циклической группе $\langle g \rangle$. □

3. Доказательсиво теоремы 1

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(36, 14, 4, 6)$ и спектром $14^1, 2^{21}, -4^{14}$. Далее, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 36$. Пусть ψ — мономиальное представление G в $GL(36, \mathbf{C})$, χ_2 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 14 и $g \in G$. Тогда по лемме 2.1 из [2] имеем $\chi_2(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/6 + 1$ и $\chi_2(g) - 14$ делится на p, если g — элемент простого порядка p из G.

Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$.

Лемма 4. *Пусть* f *— элемент из* G *порядка* 7*. Тогда* $C_G(f) = \langle f \rangle$*.*

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 7, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 7$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. По предложению 1 $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф, $\alpha_1(f) = 14$ и $\alpha_2(f) = 21$.

Снова по предложению 1 либо Ω является 3-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 6r$, либо Ω является l-кокликой, $p = 2$ и $l \in \{4, 6, 8\}$, либо $p = 3$, $\Omega \subset a^\perp$, $\Omega(a)$ является 2×4-решеткой (и в этом случае $\alpha_1(g) = 0$) или $\Omega(a)$ является объединением двух или трех изолированных треугольников, либо $p = 2$, $|\Omega| \leq 18$, степень вершины в графе Ω четна и меньше 14.

Если Ω является 3-кликой, то получим противоречие с действием f на Ω. Если Ω является l-кокликой, то $p = 2$ и ввиду действия f на Ω получим $l = 8$. В этом случае число $\chi_2(g) = (22 - \alpha_1(g))/6$ четно и $\alpha_1(g) = 12l - 2$ делится на 7, противоречие.

Если $\Omega \subset a^\perp$, то получим противоречие с действием f на $\Omega(a)$.

Если $p = 2$ и $|\Omega| \leq 18$, то $|\Omega| - 1$ делится на 7 и $|\Omega| \in \{8, 15\}$. Далее, степень a в Ω равна 0 или 14, поэтому $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ является 7-угольником. Противоречие с тем, что для двух вершин b, c на расстоянии 2 в $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ подграф $[b] \cap \Omega(c)$ содержит не менее двух вершин из Ω. □

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $S(G)$ *является* $\{2, 3\}$*-группой и* $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$*;*
(2) *если* $\bar{T} \cong L_2(8)$*, то* $\bar{T}_a$ *— диэдральная группа порядка* 14*;*
(3) *если* $\bar{T} \cong U_3(3)$*, то* $\bar{T} \cong L_2(7)$ *— подгруппа индекса* 36 *из* $\bar{T}$*.*

Доказательство. Напомним, что $v = 36$, поэтому $S(G)$ является $\{2,3\}$-группой.

Так как $\bar{T}$ является $\{2,3,7\}$-группой и $|\bar{T}|$ не делится на 49, то $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$.

Если $\bar{T} \cong L_2(7)$, то индекс $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делится на 8, противоречие. Если $\bar{T} \cong L_2(8)$, то $\bar{T}_a$ — диэдральная группа порядка 14 индекса 36 в $\bar{T}$. Если $\bar{T} \cong U_3(3)$, то $\bar{T}_a \cong L_2(7)$ подгруппа индекса 36 из $\bar{T}$.

Лемма доказана. □

Ввиду леммы 5 имеем $S(G) = 1$ и в случае $T \cong U_3(3)$ по [1] Γ — граф ранга 3 для $U_3(3)$. В случае $T \cong L_2(8)$ по [1] Γ — треугольный граф $T(9)$, противоречие. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(136, 30, 8, 6)$, и спектром $30^1, 6^{51}, -4^{84}$. Далее, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 136$. Ввиду предложения 2 имеем $|G| = 2^\beta 3^\gamma 5^\delta 7^\epsilon 17$, где $\delta, \epsilon \leq 1$. Пусть ψ — мономиальное представление G в $GL(136, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 51 и $g \in G$. Тогда по лемме 3.1 из [2] имеем $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$ и $\chi_1(g) - 51$ делится на p, если g — элемент простого порядка p из G.

Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$.

Лемма 6. *Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 17$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда $p = 2$, $|\Omega| = 34$ и $\alpha_1(g) = 68$.*

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 17$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. По предложению 2 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 34$ и $\alpha_2(f) = 102$.

Снова по предложению 2 либо Ω — пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20r+4$, либо Ω является 7-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30r + 24$, либо Ω является t-кокликой, $p = 3$ и $t \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$ или $p = 2$ и $t \in \{6, 8, 10, 16\}$, либо Ω не является пустым графом, кликой или кокликой, и $p \in \{2, 3\}$. По лемме 1 имеем $|\Omega| \leq 43$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20r+4$ делится на 17, противоречие. Если Ω является 7-кликой, то $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 6(5r + 4)$ делится на 17, поэтому $r = 6$, противоречие.

Если Ω является t-кокликой, то t не делится на 17, противоречие.

Пусть Ω не является пустым графом, кликой или кокликой. Тогда $|\Omega| \in \{17, 34\}$. В случае $|\Omega| = 17$ число $136-17$ взаимно просто с 6. В случае $|\Omega| = 34$ число $136 - 34$ делится на 6. Если $p = 3$, то число $\chi_1(g) = (102 + \alpha_1(g))/10$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 6(5l - 2)$ делится на 17 и $l = 6$, противоречие. Если $p = 2$, то число $\chi_1(g) = (102+\alpha_1(g))/10$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 4(5l+2)$ делится на 17 и $l = 3$. □

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$S(G)$ является 2-группой и $\bar{T} \cong L_2(16), L_2(17), \Omega_8^-(2)$;*

(2) *если $\bar{T} \cong L_2(16)$, то либо $\bar{T}_a$ — расширение Z_{15} с помощью Z_2, либо $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_{15} (подгруппа индекса 17);*

(3) *если* $\bar{T} \cong L_2(17)$, *то* $\bar{T}_a$ *— расширение* Z_9 *с помощью* Z_2*;*
(4) *если* $\bar{T} \cong \Omega_8^-(2)$, *то* $\bar{T}_a \cong Sp_6(2)$ *— подгруппа индекса* 136 *из* $\bar{T}$.

Доказательство. Так как $v = 17{\cdot}8$, то ввиду леммы 6 $S(G)$ является 2-группой.

Далее, 17 делит $|\bar{G}|$ и по теореме 1 из [7] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $\Omega_8^-(2)$. Напомним, что $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делится на 17 и делит $17 \cdot 8$.

В случае $\bar{T} \cong L_2(16)$ либо $\bar{T}_a$ — расширения Z_{15} с помощью Z_2, либо $\bar{T}_a$ — расширения E_{16} с помощью Z_{15} (подгруппа индекса 17 в $\bar{T}$).

В случае $\bar{T} \cong L_2(17)$ группа $\bar{T}_a$ — расширение Z_9 с помощью Z_2.

В случае $\bar{T} \cong \Omega_8^-(2)$ группа $\bar{T}_a$ изоморфна $Sp_6(2)$. □

Лемма 8. *Группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(16)$ *и* $\bar{T}_a$ *— расширение* E_{16} *с помощью* Z_{15}.

Доказательство. В противном случае по лемме 7 имеем $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 136$, поэтому $S(G) = 1$ и цоколь T группы G изоморфен $L_2(16), L_2(17), \Omega_8^-(2)$. С помощью компьютерных вычислений доказано, что сильно регулярный граф с нужными параметрами не возникает. Для $\Omega_8^-(2)$ — это представление ранга 3 на сильно регулярном графе с параметрами (136,63,30,28). Группа $L_2(16)$ для графов степени 30 действует транзитивно только на $T(17)$. У группы $L_2(17)$ длины орбит стабилизатора точки делятся на 9. □

Из лемм 7–8 следует теорема 2.

References

[1] D.G. Higman, *Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees. I*, Arch. Math., **21** (1970), 151–156. MR0268260

[2] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Automorphisms of semitriangular graphs with* $\mu = 6$, Trudy Inst. Mat. i Mech. UrO RAN, **20**:2 (2014), 184–209.

[3] P. Cameron, *Permutation Groups*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999. MR1721031

[4] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311** (2011), 132–144. MR2739917

[5] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra* , Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407. MR1241907

[6] M. Macay, J. Siran, *Search for properties of the missing Moore graph* , Linear Algebra and its Appl., **432** (2009), 2381–2398.

[7] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Natalya Dmitrievna Zyulyarkina
South Ural State University,
pr. Lenina, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: toddeath@yandex.ru

Alexandr Alekseevich Makhnev
Ural Federal University,
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru