S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 585–602 (2018) УДК 512.812.4
DOI 10.17377/semi.2018.15.047 MSC 17B81

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С РАВНОВЕСИЕМ ФАЗ ПО ДАВЛЕНИЮ

Г.С. ВАСИЛЬЕВ, ЖИАН-ГАН ТАН, Б.Ж. МАМАСОЛИЕВ

Abstract. We found the main core of Lie groups of transformations for a one-dimensional system of two-velocity hydrodynamic equations with equilibrium of pressure phases, using the theory of Lie groups and Lie algebra. Also, all systems of differential equations for invariant and partially invariant solutions for all non-subgroups, algebras that are included in optimal systems are written out. In some cases, solutions have been found.

Keywords: two-velocity hydrodynamic, Lie algebra, invariant solution.

1. Введение

Хорошо известно, что нелинейные эволюционные уравнения связаны с нелинейными явлениями в различных областях науки и техники. Понимание этих явлений имеет первостепенное значение для построения точных решений, задача отыскания которых весьма трудноразрешима. К тому же построение точных решений возможно только для особых случаев. Тем не менее, в последние годы были предложены различные способы решения этих типов нелинейных эволюционных уравнений, включая: билинейный метод Хироты [1], метод обратной задачи рассеяния [2], использование преобразования Бэклунда [3] или преобразования Дарбу [4], усеченное разложение Пенлеве [5], метод группового анализа [6−12], метод баланса [13], вариационный метод итераций [14] и полуобратный метод [15]. Метод группового анализа имеет ряд особенностей

Vasiliev, G.S., Jian-Gang Tang, Mamasoliev, B.Zh., Invariant submodels of system equations of two-velocity hydrodynamics with equilibrium of pressure phases.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00729, грант 18-41-540010, грант 18-51-41002).
Поступила 17 июня 2016 г., опубликована 17 мая 2018 г.

при поиске решений для нелинейных дифференциальных уравнений. Он основан на изучении инвариантности дифференциальных уравнений при одном из параметров групп Ли точечных преобразований [6–12], и систематически унифицирует и расширяет хорошо известные специальные методы для построения явных решений для дифференциальных уравнений, особенно для нелинейных уравнений с частными производными. В [16] исследована на основе метода группового анализа нелинейная система уравнений в частных производных, описывающая механику двухфазной среды без учёта температурных эффектов и с учетом диссипации энергии, обусловленной с силой вязкого трения между фазами.

В данной работе на основе метода группового анализа найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению. Также для всех неподобных подгрупп, алгебры которых входят в оптимальные системы подалгебр данного ядра выписаны все системы дифференциальных уравнений для инвариантных и частично инвариантных решений. В отличие от [16], в рассматриваемой системе отсутствует диссипация энергии и уравнение состояния является более общим. Оно не только является функцией плотностей подсистем, но также является функцией относительной скорости.

2. Уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением

Уравнение движения двухскоростной среды в диссипативном случае с одним давлением в системе, в изотермическом случае имеет вид [17]

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho_s u)=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho_l v)=0, \tag{2.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u,\nabla)\,u\right)=-\nabla P+\tilde{\vartheta}\Delta u+\left(\frac{\tilde{\vartheta}}{3}+\tilde{\mu}\right)\nabla \mathrm{div}u-\frac{\rho_l}{2}\nabla\,(u-v)^2+\rho f, \tag{2.3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(v,\nabla)\,v\right)=-\nabla P+\vartheta\Delta v+\left(\frac{\vartheta}{3}+\mu\right)\nabla \mathrm{div}v+\frac{\rho_s}{2}\nabla\,(u-v)^2+\rho f, \tag{2.4}$$

где u и v – векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ_s и ρ_l, $\vartheta\,(\mu)$ и $\tilde{\vartheta}\,(\tilde{\mu})$ – соответствующие сдвиговые (объемные) вязкости, $\rho=\rho_s+\rho_l$ – общая плотность двухскоростного континуума, f – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы. Данная система замыкается уравнением состояния:

$$P=P\left(\rho,(u-v)^2\right).$$

Рассмотрим одномерный случай системы (2.1)–(2.4), в обратимом приближении и отсутствии вектора массовой силы

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_s u)}{\partial x}=0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_l v)}{\partial x}=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\rho_l}{2\rho}\frac{\partial}{\partial x}\,(u-v)^2, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho_s}{2\rho}\frac{\partial}{\partial x}\,(u-v)^2. \tag{2.8}$$

3. Ядро основных алгебр системы

Для сокращения записи введем обозначения

$$\bar{\rho}=\rho=\rho_s+\rho_l,\ \rho=\rho_s,\ \sigma=\rho_l,\ \bar{w}=w^2,\ w=(u-v).$$

Выразим производную функции P по x через функции ее аргументов:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=P_{\bar{\rho}}\,(\rho_x+\sigma_x)+2P_{\bar{w}}w\,(u_x-v_x).$$

Тогда система (2.5)−(2.8) примет вид

$$\rho_t+\rho_x u+u_x\rho=0, \tag{3.1}$$

$$\sigma_t+\sigma_x v+v_x\sigma=0, \tag{3.2}$$

$$u_t+uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+w\left(u_x-v_x\right)\left(2P_{\bar w}+\sigma\right)\right)=0, \tag{3.3}$$

$$v_t+vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+w\left(u_x-v_x\right)\left(2P_{\bar w}-\rho\right)\right)=0, \tag{3.4}$$

Зададим вид допускаемого системой (3.1)−(3.4) инфинитезимального оператора

$$X=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\frac{\partial}{\partial \rho}+\beta\frac{\partial}{\partial \sigma}+\delta\frac{\partial}{\partial u}+\gamma\frac{\partial}{\partial v},$$

где функции τ, ξ, α, β, δ, γ зависят от переменных t, x, ρ, σ, u, v. Построим первое продолжение оператора X

$$X^1=X+\varphi^t\frac{\partial}{\partial \rho_t}+\varphi^x\frac{\partial}{\partial \rho_x}+\psi^t\frac{\partial}{\partial \sigma_t}+\psi^x\frac{\partial}{\partial \sigma_x}+U^t\frac{\partial}{\partial u_t}+U^x\frac{\partial}{\partial u_x}+V^t\frac{\partial}{\partial v_t}+V^x\frac{\partial}{\partial v_x},$$

где коэффициенты φ^t, φ^x, ψ^t, ψ^x, U^t, U^x, V^t, V^x зависят от t, x, ρ, σ, u, v, ρ_t, ρ_x, σ_t, σ_x, u_t, u_x, v_t, v_x. Данные коэффициенты вычисляются по формулам продолжения [10] следующим образом

$$\varphi^t=\alpha_t+\rho_t\alpha_\rho+\sigma_t\alpha_\sigma+u_t\alpha_u+v_t\alpha_v-\rho_t\left(\tau_t-\rho_t\tau_\rho-\sigma_t\tau_\sigma-u_t\tau_u-v_t\tau_v\right)-$$
$$-\rho_x\left(\xi_t-\rho_t\xi_\rho-\sigma_t\xi_\sigma-u_t\xi_u-v_t\xi_v\right),$$
$$\varphi^x=\alpha_x+\rho_x\alpha_\rho+\sigma_x\alpha_\sigma+u_x\alpha_u+v_x\alpha_v-\rho_t\left(\tau_x-\rho_x\tau_\rho-\sigma_x\tau_\sigma-u_x\tau_u-v_x\tau_v\right)-$$
$$-\rho_x\left(\xi_x-\rho_x\xi_\rho-\sigma_x\xi_\sigma-u_x\xi_u-v_x\xi_v\right),$$
$$\psi^t=\beta_t+\rho_t\beta_\rho+\sigma_t\beta_\sigma+u_t\beta_u+v_t\beta_v-\sigma_t\left(\tau_t-\rho_t\tau_\rho-\sigma_t\tau_\sigma-u_t\tau_u-v_t\tau_v\right)-$$
$$-\sigma_x\left(\xi_t-\rho_t\xi_\rho-\sigma_t\xi_\sigma-u_t\xi_u-v_t\xi_v\right),$$
$$\psi^x=\beta_x+\rho_x\beta_\rho+\sigma_x\beta_\sigma+u_x\beta_u+v_x\beta_v-\sigma_t\left(\tau_x-\rho_x\tau_\rho-\sigma_x\tau_\sigma-u_x\tau_u-v_x\tau_v\right)-$$
$$-\sigma_x\left(\xi_x-\rho_x\xi_\rho-\sigma_x\xi_\sigma-u_x\xi_u-v_x\xi_v\right),$$
$$U^t=\delta_t+\rho_t\delta_\rho+\sigma_t\delta_\sigma+u_t\delta_u+v_t\delta_v-u_t\left(\tau_t-\rho_t\tau_\rho-\sigma_t\tau_\sigma-u_t\tau_u-v_t\tau_v\right)-$$
$$-u_x\left(\xi_t-\rho_t\xi_\rho-\sigma_t\xi_\sigma-u_t\xi_u-v_t\xi_v\right),$$
$$U^x=\delta_x+\rho_x\delta_\rho+\sigma_x\delta_\sigma+u_x\delta_u+v_x\delta_v-u_t\left(\tau_x-\rho_x\tau_\rho-\sigma_x\tau_\sigma-u_x\tau_u-v_x\tau_v\right)-$$
$$-u_x\left(\xi_x-\rho_x\xi_\rho-\sigma_x\xi_\sigma-u_x\xi_u-v_x\xi_v\right),$$
$$V^t=\gamma_t+\rho_t\gamma_\rho+\sigma_t\gamma_\sigma+u_t\gamma_u+v_t\gamma_v-v_t\left(\tau_t-\rho_t\tau_\rho-\sigma_t\tau_\sigma-u_t\tau_u-v_t\tau_v\right)-$$
$$-v_x\left(\xi_t-\rho_t\xi_\rho-\sigma_t\xi_\sigma-u_t\xi_u-v_t\xi_v\right),$$
$$V^x=\gamma_x+\rho_x\gamma_\rho+\sigma_x\gamma_\sigma+u_x\gamma_u+v_x\gamma_v-v_t\left(\tau_x-\rho_x\tau_\rho-\sigma_x\tau_\sigma-u_x\tau_u-v_x\tau_v\right)-$$
$$-v_x\left(\xi_x-\rho_x\xi_\rho-\sigma_x\xi_\sigma-u_x\xi_u-v_x\xi_v\right).$$

Подействуем оператором X^1 на каждое уравнение системы (3.1)−(3.4), что приведет к уравнениям

$$\varphi^t+\delta\rho_x+\varphi^x u+\alpha u_x+U^x\rho=0, \tag{3.5}$$

$$\psi^t+\gamma\sigma_x+\psi^x v+\beta v_x+V^x\sigma=0, \tag{3.6}$$

$$U^t+\delta u_x+U^x u-\bar\rho^{-2}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\alpha+\beta\right)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w\bar\rho}w\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\alpha+\beta\right)+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}\left(u_x-v_x\right)\left(\delta-\gamma\right)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(2P_{\bar\rho\bar w}w\left(\rho_x+\sigma_x\right)+4P_{\bar w\bar w}w^2\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\delta-\gamma\right)+\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\left(\varphi^x+\psi^x\right)+$$
$$+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(U^x-V^x\right)-\bar\rho^{-2}\sigma w\left(u_x-v_x\right)\left(\alpha+\beta\right)+\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\beta+$$
$$+\bar\rho^{-1}\sigma\left(u_x-v_x\right)\left(\delta-\gamma\right)+\rho^{-1}\sigma w\left(U^x-V^x\right)=0, \tag{3.7}$$

$$V^t+\gamma v_x+V^x v-\bar\rho^{-2}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\alpha+\beta\right)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w\bar\rho}w\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\alpha+\beta\right)+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}\left(u_x-v_x\right)\left(\delta-\gamma\right)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(2P_{\bar\rho\bar w}w\left(\rho_x+\sigma_x\right)+4P_{\bar w\bar w}w^2\left(u_x-v_x\right)\right)\left(\delta-\gamma\right)+\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\left(\varphi^x+\psi^x\right)+$$
$$+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(U^x-V^x\right)+\bar\rho^{-2}\rho w\left(u_x-v_x\right)\left(\alpha+\beta\right)-\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\alpha-$$
$$-\bar\rho^{-1}\rho\left(u_x-v_x\right)\left(\delta-\gamma\right)-\bar\rho^{-1}\rho w\left(U^x-V^x\right)=0. \tag{3.8}$$

Подставив формулы продолжения в уравнения (3.5), (3.6), перейдем на многообразие (3.1)−(3.4), заменой производных по t через остальные величины

$$\rho_t=-\rho_x u-u_x\rho,$$

$$\sigma_t = -\sigma_x v - v_x\sigma,$$
$$u_t = -uu_x - \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right),$$
$$v_t = -vv_x - \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right).$$

Получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&\alpha_t - \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\alpha_\rho - \left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\alpha_\sigma -\\
&-\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\alpha_u -\\
&-\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\alpha_v +\\
&+\left(\rho_x u + u_x\rho\right)[\tau_t - \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\tau_\rho - \left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\tau_\sigma -\\
&-\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\tau_u -\\
&-\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\tau_v] -\\
&-\rho_x\xi_t + \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\rho_x\xi_\rho + \rho_x\left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\xi_\sigma +\\
&+\rho_x\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\xi_u +\\
&+\rho_x\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\xi_v +\\
&+\delta\rho_x + \{\alpha_x + \rho_x\alpha_\rho + \sigma_x\alpha_\sigma + u_x\alpha_u + v_x\alpha_v +\\
&+\left(\rho_x u + u_x\rho\right)[\tau_x + \rho_x\tau_\rho + \sigma_x\tau_\sigma + u_x\tau_u + v_x\tau_v] -\\
&-\rho_x\xi_x - \rho_x^2\xi_\rho - \rho_x\sigma_x\xi_\sigma - \rho_x u_x\xi_u - \rho_x v_x\xi_v\}u + \alpha u_x +\\
&+\{\delta_x + \rho_x\delta_\rho + \sigma_x\delta_\sigma + u_x\delta_u + v_x\delta_v +\\
&+\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)[\tau_x +\\
&+\rho_x\tau_\rho + \sigma_x\tau_\sigma + u_x\tau_u + v_x\tau_v] -\\
&-u_x\xi_x - u_x\rho_x\xi_\rho - u_x\sigma_x\xi_\sigma - u_x^2\xi_u - u_x v_x\xi_v\}\rho = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_t - \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\beta_\rho - \left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\beta_\sigma -\\
&-\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\beta_u -\\
&-\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\beta_v +\\
&+\left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)[\tau_t - \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\tau_\rho - \left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\tau_\sigma -\\
&-\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\tau_u -\\
&-\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\tau_v] -\\
&-\sigma_x\xi_t + \left(\rho_x u + u_x\rho\right)\sigma_x\xi_\rho + \sigma_x\left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)\xi_\sigma +\\
&+\sigma_x\big(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\xi_u +\\
&+\sigma_x\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)\xi_v +\\
&+\gamma\sigma_x + \{\beta_x + \rho_x\beta_\rho + \sigma_x\beta_\sigma + u_x\beta_u + v_x\beta_v +\\
&+\left(\sigma_x v + v_x\sigma\right)[\tau_x + \rho_x\tau_\rho + \sigma_x\tau_\sigma + u_x\tau_u + v_x\tau_v] -\\
&-\sigma_x\xi_x - \rho_x\sigma_x\xi_\rho - \sigma_x^2\xi_\sigma - \sigma_x u_x\xi_u - \sigma_x v_x\xi_v\}v + \beta v_x +\\
&+\{\gamma_x + \rho_x\gamma_\rho + \sigma_x\gamma_\sigma + u_x\gamma_u + v_x\gamma_v +\\
&+\big(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\big)[\tau_x +\\
&+\rho_x\tau_\rho + \sigma_x\tau_\sigma + u_x\tau_u + v_x\tau_v] -\\
&-v_x\xi_x - v_x\rho_x\xi_\rho - v_x\sigma_x\xi_\sigma - u_x v_x\xi_u - v_x^2\xi_v\}\sigma = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Обозначим левые части уравнений (3.9), (3.10) через Q_1 и Q_2, соответственно. Они являются неоднородными квадратичными формами от свободных переменных ρ_x, σ_x, u_x, v_x. Выполним расщепление условий инвариантности, т.е. приравняем нулю коэффициенты при переменных ρ_x, σ_x, u_x, v_x, получим систему уравнений. Предположим, что $P_{\bar{\rho}} \neq 0$, тогда получим, последовательно используя равенство нулю коэффициентов при степенях σ_x^2 в Q_1, $v_x\sigma_x$ в Q_1, ρ_x^2 в Q_2, $u_x\rho_x$ в Q_2, $\rho_x v_x$ в Q_2, v_x^2 в Q_2, $u_x v_x$ в Q_2, $\rho_x v_x$ в Q_1, что $\tau = \tau\left(t, x\right)$, $\xi = \xi\left(t, x\right)$.

Оставшиеся из полученных нетривиальные уравнения:

$$\alpha_t + \alpha_x u + \delta_x\rho = 0, \tag{3.11}$$
$$\delta + u\tau_t - \xi_t + u^2\tau_x - \xi_x u + \delta_\rho\rho - \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_u + \alpha_v - \tau_x\rho\right) = 0, \tag{3.12}$$
$$\alpha_\sigma w + \delta_\sigma\rho - \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_u + \alpha_v - \tau_x\rho\right) = 0, \tag{3.13}$$

$$\alpha-\rho\alpha_\rho-\sigma\bar\rho^{-1}w\alpha_u+\rho\bar\rho^{-1}w\alpha_v+\rho\tau_t+2\rho\tau_x u+\delta_u\rho+$$
$$+\sigma\bar\rho^{-1}w\tau_x\rho-\xi_x\rho-2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(\alpha_u+\alpha_v-\tau_x\rho\right)=0, \quad (3.14)$$
$$-\sigma\alpha_\sigma+\sigma\bar\rho^{-1}w\alpha_u-v\alpha_v-\rho\bar\rho^{-1}w\alpha_v+\alpha_v u-\sigma\bar\rho^{-1}w\tau_x\rho+\delta_v\rho+$$
$$+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(\alpha_u+\alpha_v-\tau_x\rho\right)=0, \quad (3.15)$$
$$\beta_t+\beta_x v+\gamma_x\sigma=0, \quad (3.16)$$
$$-u\beta_\rho+\beta_\rho v+\gamma_\rho\sigma-\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\left(\beta_u+\beta_v-\tau_x\sigma\right)=0, \quad (3.17)$$
$$\gamma+v\tau_t-\xi_t+v^2\tau_x-\xi_x v+\gamma_\sigma\sigma-\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\left(\beta_u+\beta_v-\tau_x\sigma\right)=0, \quad (3.18)$$
$$-\rho\beta_\rho-u\beta_u-\sigma\bar\rho^{-1}w\beta_u+\rho\bar\rho^{-1}w\beta_v+\beta_u v+\gamma_u\sigma-\rho\bar\rho^{-1}w\tau_x\sigma-$$
$$-2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(\beta_u+\beta_v-\tau_x\sigma\right)=0, \quad (3.19)$$
$$\beta-\sigma\beta_\sigma+\sigma\bar\rho^{-1}w\beta_u-\rho\bar\rho^{-1}w\beta_v+\sigma\tau_t+\sigma\tau_x v+\gamma_v\sigma+v\tau_x\sigma+$$
$$+\rho\bar\rho^{-1}w\tau_x\sigma-\xi_x\sigma+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\left(\beta_u+\beta_v-\tau_x\sigma\right)=0. \quad (3.20)$$

Теперь, учитывая, что $\tau=\tau(t,x)$, $\xi=\xi(t,x)$, подставим формулы продолжения в уравнения (3.7), (3.8) и заменим производные ρ_t, σ_t, u_t, v_t на соответствующие формулы пространственных производных. Получим:

$$\delta_t-\left(\rho_x u+u_x\rho\right)\delta_\rho-\left(\sigma_x v+v_x\sigma\right)\delta_\sigma-$$
$$-\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\delta_u-$$
$$-\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\delta_v+$$
$$+\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_t-$$
$$-u_x\xi_t+\delta u_x+\{\delta_x+\rho_x\delta_\rho+\sigma_x\delta_\sigma+u_x\delta_u+v_x\delta_v+$$
$$+\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x-u_x\xi_x\}u-$$
$$-\bar\rho^{-2}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)(\alpha+\beta)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w\bar\rho}w\left(u_x-v_x\right)\right)(\alpha+\beta)+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}\left(u_x-v_x\right)(\delta-\gamma)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\big(2P_{\bar\rho\bar w}w\left(\rho_x+\sigma_x\right)+4P_{\bar w\bar w}w^2\left(u_x-v_x\right)\big)(\delta-\gamma)+$$
$$+\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\{\alpha_x+\rho_x\alpha_\rho+\sigma_x\alpha_\sigma+u_x\alpha_u+v_x\alpha_v+\left(\rho_x u+u_x\rho\right)\tau_x-\rho_x\xi_x+$$
$$+\beta_x+\rho_x\beta_\rho+\sigma_x\beta_\sigma+u_x\beta_u+v_x\beta_v+\left(\sigma_x v+v_x\sigma\right)\tau_x-\sigma_x\xi_x\}+$$
$$+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\{\delta_x+\rho_x\delta_\rho+\sigma_x\delta_\sigma+u_x\delta_u+v_x\delta_v+$$
$$+\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x-$$
$$-u_x\xi_x-\gamma_x-\rho_x\gamma_\rho-\sigma_x\gamma_\sigma-u_x\gamma_u-v_x\gamma_v-$$
$$-\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x+v_x\xi_x\}-$$
$$-\bar\rho^{-2}\sigma w\left(u_x-v_x\right)(\alpha+\beta)+\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\beta+$$
$$+\bar\rho^{-1}\sigma\left(u_x-v_x\right)(\delta-\gamma)+\bar\rho^{-1}\sigma w\{\delta_x+\rho_x\delta_\rho+\sigma_x\delta_\sigma+u_x\delta_u+v_x\delta_v+$$
$$+\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x-$$
$$-u_x\xi_x-\gamma_x-\rho_x\gamma_\rho-\sigma_x\gamma_\sigma-u_x\gamma_u-v_x\gamma_v+v_x\xi_x-$$
$$-\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x\}=0, \quad (3.21)$$
$$\gamma_t-\left(\rho_x u+u_x\rho\right)\gamma_\rho-\left(\sigma_x v+v_x\sigma\right)\gamma_\sigma-$$
$$-\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\gamma_u-$$
$$-\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\gamma_v+$$
$$+\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_t-$$
$$-v_x\xi_t+\gamma v_x+\{\gamma_x+\rho_x\gamma_\rho+\sigma_x\gamma_\sigma+u_x\gamma_u+v_x\gamma_v+$$
$$+\big(vv_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)-\rho\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x-v_x\xi_x\}v-$$
$$-\bar\rho^{-2}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)(\alpha+\beta)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w\bar\rho}w\left(u_x-v_x\right)\right)(\alpha+\beta)+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}\left(u_x-v_x\right)(\delta-\gamma)+$$
$$+\bar\rho^{-1}\big(2P_{\bar\rho\bar w}w\left(\rho_x+\sigma_x\right)+4P_{\bar w\bar w}w^2\left(u_x-v_x\right)\big)(\delta-\gamma)+$$
$$+\bar\rho^{-1}P_{\bar\rho}\{\alpha_x+\rho_x\alpha_\rho+\sigma_x\alpha_\sigma+u_x\alpha_u+v_x\alpha_v+\left(\rho_x u+u_x\rho\right)\tau_x-\rho_x\xi_x+$$
$$+\beta_x+\rho_x\beta_\rho+\sigma_x\beta_\sigma+u_x\beta_u+v_x\beta_v+\left(\sigma_x v+v_x\sigma\right)\tau_x-\sigma_x\xi_x\}+$$
$$+2\bar\rho^{-1}P_{\bar w}w\{\delta_x+\rho_x\delta_\rho+\sigma_x\delta_\sigma+u_x\delta_u+v_x\delta_v+$$
$$+\big(uu_x+\bar\rho^{-1}\left(P_{\bar\rho}\left(\rho_x+\sigma_x\right)+2P_{\bar w}w\left(u_x-v_x\right)\right)+\sigma\bar\rho^{-1}w\left(u_x-v_x\right)\big)\tau_x-$$

$-u_x\xi_x - \gamma_x - \rho_x\gamma_\rho - \sigma_x\gamma_\sigma - u_x\gamma_u - v_x\gamma_v -$
$-\left(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\right)\tau_x + v_x\xi_x\} +$
$+\bar{\rho}^{-2}\rho w\left(u_x - v_x\right)(\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\alpha -$
$-\bar{\rho}^{-1}\rho\left(u_x - v_x\right)(\delta - \gamma) - \bar{\rho}^{-1}\rho w\{\delta_x + \rho_x\delta_\rho + \sigma_x\delta_\sigma + u_x\delta_u + v_x\delta_v +$
$+\left(uu_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\right)\tau_x -$
$-u_x\xi_x - \gamma_x - \rho_x\gamma_\rho - \sigma_x\gamma_\sigma - u_x\gamma_u - v_x\gamma_v + v_x\xi_x -$
$-\left(vv_x + \bar{\rho}^{-1}\left(P_{\bar{\rho}}\left(\rho_x + \sigma_x\right) + 2P_{\bar{w}}w\left(u_x - v_x\right)\right) - \rho\bar{\rho}^{-1}w\left(u_x - v_x\right)\right)\tau_x\} = 0. \quad (3.22)$

Приравняв к нулю коэффициенты при переменных ρ_x, σ_x, u_x, v_x, получим уравнения:

$\delta_t + \delta_x u + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_x + \beta_x\right) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_x - \gamma_x\right) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w\left(\delta_x - \gamma_x\right) = 0, \quad (3.23)$
$\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\tau_t - \delta_u - \delta_v - \xi_x + 2\tau_x u - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + \left(\alpha_\rho + \beta_\rho\right)\right) + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) +$
$+2P_{\bar{\rho}\bar{w}}w\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_\rho - \gamma_\rho\right) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w\left(\delta_\rho - \gamma_\rho\right) = 0, \quad (3.24)$
$\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\tau_t - \delta_u - \delta_v - \xi_x + \tau_x(u + v) - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + \left(\alpha_\sigma + \beta_\sigma\right)\right) +$
$+\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) + 2P_{\bar{\rho}\bar{w}}w\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_\sigma - \gamma_\sigma\right) +$
$+\delta_\sigma w + \bar{\rho}^{-1}\sigma w\left(\delta_\sigma - \gamma_\sigma\right) = 0, \quad (3.25)$
$2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\tau_t - \delta_v - \xi_x + 2\tau_x u - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) - \gamma_u + w\tau_x + w^{-1}(\delta - \gamma)\right) +$
$+\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_u + \beta_u + \rho\tau_x\right) + 4P_{\bar{w}\bar{w}}w^2\rho^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}\bar{\rho}}w(\alpha + \beta) - \rho\delta_\rho +$
$+\rho\bar{\rho}^{-1}w\delta_v + u\tau_t + \sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_t - \xi_t + \delta + u^2\tau_x + 2\sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_x u - \xi_x u + w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\sigma -$
$-\bar{\rho}^{-2}\sigma w(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}w\beta + \bar{\rho}^{-1}\sigma(\delta - \gamma) - \gamma_u\bar{\rho}^{-1}\sigma w - \xi_x\bar{\rho}^{-1}\sigma w = 0, \quad (3.26)$
$2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_u + 2\delta_v + \xi_x - \tau_t - 2\tau_x u + \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) - \gamma_v - w^{-1}(\delta - \gamma)\right) +$
$+\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_v + \beta_v + \sigma\tau_x\right) - 4P_{\bar{w}\bar{w}}w^2\rho^{-1}(\delta - \gamma) - 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}\bar{\rho}}w(\alpha + \beta) - w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\sigma +$
$+\sigma\bar{\rho}^{-1}w\delta_u - \rho\bar{\rho}^{-1}w\delta_v - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_t + \delta_v w - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\tau_x u + \bar{\rho}^{-2}\sigma w(\alpha + \beta) - \sigma\delta_\sigma +$
$+\xi_x\bar{\rho}^{-1}\sigma w - \bar{\rho}^{-1}w\beta - \bar{\rho}^{-1}\sigma(\delta - \gamma) + \bar{\rho}^{-1}\sigma w\left(\delta_v - \gamma_v\right) - v\tau_x\bar{\rho}^{-1}\sigma w = 0, \quad (3.27)$
$\gamma_t + \gamma_x v + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_x + \beta_x\right) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_x - \gamma_x\right) - \bar{\rho}^{-1}\rho w\left(\delta_x - \gamma_x\right) = 0, \quad (3.28)$
$\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\tau_t - \gamma_u - \gamma_v - \xi_x + \tau_x(v + u) - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + \left(\alpha_\rho + \beta_\rho\right)\right) +$
$+\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) + 2P_{\bar{\rho}\bar{w}}w\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_\rho - \gamma_\rho\right) -$
$-w\gamma_\rho - \bar{\rho}^{-1}\rho w\left(\delta_\rho - \gamma_\rho\right) = 0, \quad (3.29)$
$\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\tau_t - \gamma_u - \gamma_v - \xi_x + 2\tau_x v - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + \left(\alpha_\sigma + \beta_\sigma\right)\right) + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}(\alpha + \beta) +$
$+2P_{\bar{\rho}\bar{w}}w\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\delta_\sigma - \gamma_\sigma\right) - \bar{\rho}^{-1}\rho w\left(\delta_\sigma - \gamma_\sigma\right) = 0, \quad (3.30)$
$2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\tau_t - 2\gamma_u - \gamma_v - \xi_x + 2\tau_x u - \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) + \delta_u + w^{-1}(\delta - \gamma)\right) +$
$+4P_{\bar{w}\bar{w}}w^2\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) + 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}\bar{\rho}}w(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_u + \beta_u + \rho\tau_x\right) - \rho\gamma_\rho -$
$-w\gamma_u - \sigma\bar{\rho}^{-1}w\gamma_u + \rho\bar{\rho}^{-1}w\gamma_v - \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_t - \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_x v + \bar{\rho}^{-2}\rho w(\alpha + \beta) - \bar{\rho}^{-1}w\alpha -$
$-\bar{\rho}^{-1}\rho(\delta - \gamma) - \bar{\rho}^{-1}\rho w\left(\delta_u - \gamma_u\right) - u\tau_x\bar{\rho}^{-1}\rho w - w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\rho + \xi_x\bar{\rho}^{-1}\rho w = 0, \quad (3.31)$
$2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}}w\left(\gamma_u - \tau_t + \xi_x - \tau_x(u + v) + \bar{\rho}^{-1}(\alpha + \beta) - w^{-1}(\delta - \gamma) + \delta_v\right) -$
$-4P_{\bar{w}\bar{w}}w^2\bar{\rho}^{-1}(\delta - \gamma) - 2\bar{\rho}^{-1}P_{\bar{w}\bar{\rho}}w(\alpha + \beta) + \bar{\rho}^{-1}P_{\bar{\rho}}\left(\alpha_v + \beta_v + \sigma\tau_x\right) +$
$+\sigma\bar{\rho}^{-1}w\gamma_u + v\tau_t + \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_t - \xi_t + \gamma + v^2\tau_x + \rho\bar{\rho}^{-1}w\tau_x v - \xi_x v - \bar{\rho}^{-2}\rho w(\alpha + \beta) -$
$-\rho\bar{\rho}^{-1}w\gamma_v - \sigma\gamma_\sigma + \bar{\rho}^{-1}w\alpha + \bar{\rho}^{-1}\rho(\delta - \gamma) + w^2\tau_x\bar{\rho}^{-1}\rho -$
$-\xi_x\bar{\rho}^{-1}\rho w - \bar{\rho}^{-1}\rho w\left(\delta_v - \gamma_v\right) + v\tau_x\bar{\rho}^{-1}\rho w = 0. \quad (3.32)$

Будем считать функцию P и ее производные дополнительными свободными переменными. Тогда из равенства нулю коэффициентов при вторых производных функции P уравнения (3.24), при условии $u \neq v$, следует, что $\alpha = -\beta$ и $\delta = \gamma$. Вычитание из уравнения (3.24) уравнения (3.25) приведет к равенствам $\tau_x = 0$, $\delta_\sigma = 0$. Из уравнения (3.29) следует, что $\gamma_\rho = 0$. Вычитание уравнения (3.28) из уравнения (3.23) приведет к равенствам $\delta_x = 0, \delta_t = 0$. Разность сумм уравнений (3.26), (3.27) и (3.31), (3.32) равна

$$\tau_t - \xi_x + \delta_v + \delta_u = 0. \quad (3.33)$$

Из уравнения (3.24) следует следующие уравнение

$$\tau_t - \xi_x - \delta_v - \delta_u = 0. \quad (3.34)$$

Следовательно, уравнения (3.33) и (3.34) приводят к равенствам $\tau_t = \xi_x$ и $\delta_v = -\delta_u$. Тогда из уравнения (3.27) следует, что $\beta = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Из уравнения (3.14) получим равенство $\delta_u = 0$, что влечет за собой $\delta_v = 0$. Таким образом, пришли к тому, что $\delta = \gamma = const$. Из уравнения (3.12) следует, что $\xi_t = \delta$.

В итоге

$$\tau_t = \xi_x, \tag{3.35}$$

$$\xi_t = \delta = \gamma = const. \tag{3.36}$$

В силу (3.35) $\xi_{xx} = 0$, $\xi = \tau_t x + A\,(t)$. Подставим это в (3.36) и получим уравнение $\tau_{tt} x + A_t\,(t) = D = const$, поэтому

$$\tau\,(t) = Bt + C,\, \xi = Bx + Dt + E.$$

Выбирая одну из постоянных B, C, D, E равной единице, а остальные равными нулю, получим базис ядра основной алгебры Ли системы (2.5)−(2.8), образуемый операторами

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

4. Оптимальные системы подалгебр

Найдем оптимальные системы подалгебр ядра основных алгебр Ли

$$L_4 = \langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle = \langle t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\rangle.$$

Любой элемент X алгебры Ли L_4 может быть записан в виде

$$X = e^1 X_1 + e^2 X_2 + e^3 X_3 + e^4 X_4.$$

Посчитав коммутаторы $[X_\alpha, X_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma$, составим таблицу коммутаторов:

Таблица 1. Таблица коммутаторов

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-X_2$	$-X_3$	0
X_2	X_2	0	0	X_3
X_3	X_3	0	0	0
X_4	0	$-X_3$	0	0

Присоединенное отображение (внутреннее дифференцирование) ad (v) [6] для общего вектора $v = v^1 X_1 + v^2 X_2 + v^3 X_3 + v^4 X_4 \in L_4$:

$$\mathrm{ad}(v) < X >= \left(v^1 e^2 - v^2 e^1\right) X_2 + \left(v^1 e^3 - v^3 e^1 + v^4 e^2 - v^2 e^4\right) X_3. \tag{4.1}$$

Отображение $\mathrm{ad}(v)$ имеет следующие представление в матричной форме

$$\mathrm{ad}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^2 & v^1 & 0 & 0 \\ -v^3 & v^4 & v^1 & -v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Форма Киллинга находится перемножением двух матриц вида (4.2)

$$K < x, y >= tr(\mathrm{ad}(x) * \mathrm{ad}(y)) = 2x^1 y^1.$$

Общий автоморфизм группы Int L^4 найдем, простроив однопараметрические группы автоморфизмов $A_i(t)$ для каждого базисного вектора X_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$. Так, например, чтобы найти соответствующую вектору X_1 группу $A_1(t)$, необходимо решить уравнение

$$\partial_t \bar{e} = [\bar{e}, X],\, \bar{e}(0) = e,$$

где $X = X_1$. Полагая в (4.1) $v^1 = 1$, $v^2 = v^3 = v^4 = 0$, получим уравнение

$$\partial_t \bar{e}^1 X_1 + \partial_t \bar{e}^2 X_2 + \partial_t \bar{e}^3 X_3 + \partial_t \bar{e}^4 X_4 = \bar{e}^2 X_2 + \bar{e}^3 X_3$$

равносильное системе

$$\partial_t \bar{e}^1 = 0,\ \partial_t \bar{e}^2 = \bar{e}^2,\ \partial_t \bar{e}^3 = \bar{e}^3,\ \partial_t \bar{e}^4 X_4 = 0,$$

которую необходимо решить с начальными условиями $\bar{e}^i = e^i$.

Это решение строится элементарно и дает матрицу автоморфизма

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления для векторов X_2, X_3, X_4 дают автофорфизмы

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Удобно произвести замены $t = \ln a$ для A_1, $t = b$ для A_2, $t = c$ для A_3, $t = d$ для A_4. Произведение $A = A_1(\ln a) * A_2(b) * A_3(c) * A_4(d)$ является общим автоморфизмом $A \in \mathrm{Int}\ L^4$, зависящим от параметров a, b, c, d

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & a & 0 & 0 \\ -ac & ad & a & -ab \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a > 0$. A является тождественным автоморфизмом при $a = 1$, $b = c = d = 0$.

Найдем координаты вектора $\bar{e} = A < e >$ в базисе $\{X_i\}$:

$$\begin{cases} \bar{e}^1 = e^1, \\ \bar{e}^2 = -a(be^1 - e^2), \\ \bar{e}^3 = -a(ce^1 - de^2 - e^3 + be^4), \\ \bar{e}^4 = e^4. \end{cases} \tag{4.3}$$

Разбиение пространства L^4 на классы подобных векторов выполним на основании свойства инвариантности формы Киллинга, в силу которого функция

$$\tfrac{1}{2} K < e, e >= \left(e^1\right)^2$$

является инвариантом группы $\mathrm{Int}\ L^4$. Поэтому все векторы $X = e^i X_i$ подразделяются на два непересекающихся класса

$$(\alpha)\ \ K < e, e >= 0,\ (\beta)\ \ K < e, e > \neq 0.$$

Далее подбором значений параметров a, b, c, d от которых зависит автоморфизм A, достигнем максимально возможного числа нулевых значений $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ координат вектора $\bar{e}$ с целью выбора представителя того класса подобных подалгебр, к которому принадлежит элемент X. Возникающие при этом альтернативные случаи дают классы подобных однопараметрических подалгебр и, тем самым, оптимальную систему Θ_1.

Найдем представителей класса (α), в котором для всех векторов выполнено равенство $e^1 = 0$. С учетом данного условия, из которого следует, что константа c является произвольным числом для всех случаев, и тем что константа $a > 0$ является общим множителем для второго и третьего уравнений системы (4.3), будем считать $a = c = 1$. Подбор значений параметров b, d приведет к таблице

Таблица 2. Таблица представителей класса (α)

Вектор	b	d	$\overline{e}^{\alpha} X_{\alpha}$	Подалгебра
$(0, e^2, 0, 0)$	const	0	$e^2 X_2$	X_2
$(0, 0, e^3, 0)$	const	const	$e^3 X_3$	X_3
$(0, 0, 0, e^4)$	0	const	$e^4 X_4$	X_4
$(0, e^2, e^3, 0)$	const	$-\frac{e^3}{e^2}$	$e^2 X_2$	нет
$(0, e^2, 0, e^4)$	0	0	$e^2 X_2 + e^4 X_4$	$e^2 X_2 + e^4 X_4$
$(0, 0, e^3, e^4)$	$\frac{e^3}{e^4}$	const	$e^4 X_4$	нет
$(0, e^2, e^3, e^4)$	$\frac{e^3}{e^4}$	0	$e^2 X_2 + e^4 X_4$	нет

Аналогичным образом приведем таблицу для класса (β). В данном случае заранее будем считать $a = 1$.

Таблица 3. Таблица представителей класса (β)

Вектор	b	c	d	$\overline{e}^{\alpha} X_{\alpha}$	Подалгебра
$(e^1, 0,\ 0, 0)$	0	0	const	$e^1 X_1$	X_1
$(e^1, e^2,\ 0, 0)$	$\frac{e^2}{e^1}$	0	0	$e^1 X_1$	нет
$(e^1, 0, e^3, 0)$	0	$\frac{e^3}{e^1}$	const	$e^1 X_1$	нет
$(e^1, 0,\ 0, e^4)$	0	0	const	$e^1 X_1 + e^4 X_4$	$e^1 X_1 + e^4 X_4$
$(e^1, e^2, e^3, 0)$	$\frac{e^2}{e^1}$	$\frac{e^3}{e^1}$	0	$e^1 X_1$	нет
$(e^1, e^2,\ 0, e^4)$	$\frac{e^2}{e^1}$	$-\frac{e^2 e^4}{(e^1)^2}$	0	$e^1 X_1 + e^4 X_4$	нет
$(e^1, 0, e^3, e^4)$	0	$\frac{e^3}{e^1}$	const	$e^1 X_1 + e^4 X_4$	нет
(e^1, e^2, e^3, e^4)	$\frac{e^2}{e^1}$	$\frac{e^3}{e^1}$	$\frac{e^4}{e^1}$	$e^1 X_1 + e^4 X_4$	нет

В итоге, оптимальная система Θ_1 одномерных подалгебр ядра основных алгебр Ли L_4 состоит из четырех представителей с базисными векторами

$$X_1 + q_1 X_4,\ X_2 + q_2 X_4,\ X_3,\ X_4.$$

Заметим при этом, что выбор представителей оптимальной системы не является однозначным.

Подалгебра $\Theta_s \subset L$ описывается набором своих базисных элементов [11]

$$\Theta_s = \{H_\alpha = e^i_\alpha; \alpha = 1, \dots, s\}.$$

Матрица, элементами которой являются коэффициенты операторов H_α имеет следующий вид:

$$\xi = \begin{pmatrix} e^1_1 & \dots & e^n_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ e^1_s & \dots & e^n_s \end{pmatrix}.$$

Матрица ξ определяет некоторую s-мерную подалгебру в L только если выполнены следующие два условия:

$-\ rank\, \xi = s;$ (4.4.1)

$-\ [H_\alpha, H_\beta] = K^\gamma_{\alpha\beta} H_\gamma.$ (4.4.2)

На множестве матриц ξ действуют преобразования строк (B-преобразования) $H'_\alpha = \omega^\beta_\alpha H_\beta$, $\det \omega \neq 0$ и преобразования столбцов, определяемые внутренними автоморфизмами $A \in \mathrm{Int}\ L : \xi' = \xi A$. Используя данные преобразования с целью максимального упрощения матрицы, может быть найдена оптимальная система подалгебр.

Очевидно, что для Θ_1 условия выполнены, а представителем Θ_4 является сама алгебра Ли L_4. Действительно, матрица четырехмерной подалгебры квадратная и невырождена, а значит при помощи B-преобразований всегда может быть приведена к единичной.

Далее с учетом условий (4.4.1) и (4.4.2) найдем двумерные и трехмерные подалгебры.

При построении оптимальной системы Θ_2 можно заранее предполагать, что один из базисных векторов $X = e^i X_i$ двумерной подалгебры взят из системы Θ_1. К нему подбирается такой вектор $Y = e^j Y_j$, чтобы он удовлетворял системе

$$\left[e^i X_i, e^j Y_j\right] = \alpha e^i X_i + \beta e^j Y_j.$$

Вычисление коммутаторов и подбор значений α, β приведет к таблице

Таблица 4. Таблица двумерных подалгебр

Векторы	Коммутатор	Подалгебры			
		$\alpha = 0$ $\beta = 0$	$\alpha = 0$ $\beta \neq 0$	$\alpha \neq 0$ $\beta = 0$	$\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$
$X_1 + q_1 X_4$, $e^2 X_2 + e^3 X_3 +$ $+ e^4 X_4$	$-e^2 X_2 -$ $-(e^3 + e^2 q_1) X_3$	$X_1 + q_1 X_4$, X_4	нет	–	–
$X_2 + q_2 X_4$, $e^1 X_1 + e^3 X_3 +$ $+ e^4 X_4$	$e^1 X_2 + e^4 X_3$	$X_2 + q_2 X_4$, X_3	нет	$X_2 + q_2 X_4$, $e^1 X_1 + e^3 X_3$	нет
X_3, $e^1 X_1 + e^2 X_2 +$ $+ e^4 X_4$	$e^1 X_3$	X_3, $e^2 X_2 + e^4 X_4$	–	X_3, $e^1 X_1 + e^2 X_2 +$ $+ e^4 X_4$	–
X_4, $e^1 X_1 + e^2 X_2 +$ $+ e^3 X_3$	$-e^2 X_3$	X_4, $e^1 X_1 + e^3 X_3$	нет	–	–

Под действием внутренних автоморфизмов и после приведения подобных получим систему

$$\langle X_1 + q_1 X_4, X_3\rangle,\ \langle X_1 + q_1 X_4, X_4\rangle,\ \langle X_2 + q_2 X_4, X_1\rangle,\ \langle X_2 + q_2 X_4,\ X_3\rangle,\ \langle X_3,\ X_4\rangle.$$

Проверим выполнение условий (4.4.1) и (4.4.2). В случае $\langle X_2 + q_2 X_4, X_1\rangle$ имеем:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица ξ невырождена.

$$[X_2 + q_2 X_4, X_1] = [H_\alpha, H_\beta] =$$
$$= \{H_\alpha t - H_\beta 1\}\tfrac{\partial}{\partial t} + \{H_\alpha x - H_\beta q_2 t\}\tfrac{\partial}{\partial x} + \{H_\alpha 0 - H_\beta q_2\}\tfrac{\partial}{\partial u} + \{H_\alpha 0 - H_\beta q_2\}\tfrac{\partial}{\partial v} =$$
$$= X_2 + q_2 t - q_2 t X_3 + 0 + 0 = X_2 = K^\gamma_{\alpha\beta} H_\gamma.$$

Условие удовлетворяется при $q_2 = 0$, $\gamma = \alpha$. Таким образом получим, что $\langle X_1, X_2\rangle$ является двумерной подалгеброй. Для всех остальных представителей подалгебр условия (4.4.1) и (4.4.2) выполнены без дополнительных ограничений.

В итоге получим, что оптимальная система Θ_2 двумерных подалгебр ядра основных алгебр Ли L_4 состоит из следующих представителей

$$\langle X_1, X_2\rangle,\ \langle X_1 + q_1 X_4, X_3\rangle,\ \langle X_1 + q_1 X_4, X_4\rangle,\ \langle X_2 + q_2 X_4,\ X_3\rangle,\ \langle X_3,\ X_4\rangle.$$

Систему Θ_3 можно строить методом расширения двумерных подалгебр [6]. Для этого берется какая-нибудь двумерная подалгебра из системы Θ_2 с базисом $\left\langle e^i X_i, e^j X_j \right\rangle$ и ищется такой вектор $Y = e^s Y_s$, с которым тройка $\langle e^i X_i, e^j X_j,$ $e^s Y_s\rangle$ образовывала бы базис трехмерной подалгебры. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор Y удовлетворял уравнениям:

$$\begin{cases} \left[e^i X_i, e^s Y_s\right] = \alpha_1 e^s Y_s + \beta_1 e^i X_i + \gamma_1 e^j X_j, \\ \left[e^j X_j, e^s Y_s\right] = \alpha_2 e^s Y_s + \beta_2 e^i X_i + \gamma_2 e^j X_j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Для подалгебр $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1 + q_1 X_4, X_4\rangle$, соответствующие элементы системы (4.5) приведены в следующей таблице.

Таблица 5. Элементы системы (4.5)

Θ_2	Y	$\left[e^i X_i, Y\right]$	$\left[e^j X_j, Y\right]$
X_1, X_2	$e^3 X_3 + e^4 X_4$	$-e^3 X_3$	$e^4 X_3$
$X_1 + q_1 X_4, X_4$	$e^2 X_2 + e^3 X_3$	$-e^2 X_2 - (e^3 + q_1 e^2)\ X_3$	$-e^2 X_3$

В данных случаях трехмерных подалгебр нет. В свою очередь, для оставшихся трёх двумерных подалгебр приведем таблицу

Таблица 6. Таблица трехмерных подалгебр

Θ_2	Y	$\left[e^i X_i, Y\right]$	$\left[e^j X_j, Y\right]$	Условие $(k = \overline{1,2})$	Подалгебра
$X_1 + q_1 X_4,$ X_3	$e^2 X_2 + e^4 X_4$	$e^1 X_3$	0	$\alpha_k = \beta_k = 0,$ $\gamma_k = 0$	$X_1 + q_1 X_4,$ $X_3,$ X_4
$X_2 + q_2 X_4,$ X_3	$e^1 X_1 + e^4 X_4$	$e^1 X_2 + e^4 X_3$	$e^1 X_3$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$ $\beta_1 \neq 0,$ $\beta_2 = 0,$ $\gamma_1 \neq 0,$ $\gamma_2 \neq 0$	$X_2 + q_2 X_4,$ $X_3,$ $e^1 X_1 + e^4 X_4$
				$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$ $\beta_1 = \beta_2 = 0,$ $\gamma_1 \neq 0,$ $\gamma_2 = 0$	$X_2 + q_2 X_4,$ $X_3,$ X_4
				$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$ $\beta_1 \neq 0,$ $\beta_2 = 0,$ $\gamma_1 = 0,$ $\gamma_2 \neq 0$	$X_2 + q_2 X_4,$ $X_3,$ X_1
X_3, X_4	$e^1 X_1 + e^2 X_2$	$e^1 X_3$	$-e^2 X_3$	$\alpha_k = \gamma_k = 0,$ $\beta_1 \neq 0,$ $\beta_2 \neq 0$	$e^1 X_1 + e^2 X_2,$ $X_3,$ X_4
				$\alpha_k = \gamma_k = 0,$ $\beta_1 \neq 0,$ $\beta_2 = 0$	X_1, X_3, X_4
				$\alpha_k = \gamma_k = 0,$ $\beta_1 = 0,$ $\beta_2 \neq 0$	X_2, X_3, X_4

Под действием внутренних автоморфизмов и после приведения подобных получим систему

$$\left\langle X_2 + q_2 X_4, X_3, X_1 + q_1 X_4 \right\rangle, \left\langle X_2 + q_2 X_4, X_3, X_4 \right\rangle, \left\langle X_1 + q_1 X_4, X_3, X_4 \right\rangle.$$

Проверим выполнение условий (4.4.1) и (4.4.2).

В случае $\langle X_2 + q_2X_4, X_3, X_1 + q_1X_4\rangle$ имеем:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица ξ невырождена.

$$[X_2 + q_2X_4, X_1 + q_1X_4] = [H_1, H_3] =$$
$$= \{H_1t - H_3 1\}\tfrac{\partial}{\partial t} + \{H_1(x + q_1t) - H_3q_2t\}\tfrac{\partial}{\partial x} + \{H_1q_1 - H_3q_2\}\tfrac{\partial}{\partial u} + \{H_1q_1 - H_3q_2\}\tfrac{\partial}{\partial v} =$$
$$= X_2 + q_1X_3 = K^{\gamma}_{13}H_{\gamma},$$
$$[X_3, X_1 + q_1X_4] = [H_2, H_3] =$$
$$= \{H_2t - H_3 0\}\tfrac{\partial}{\partial t} + \{H_2(x + q_1t) - H_3 1\}\tfrac{\partial}{\partial x} + \{H_{\alpha}q_1 - H_{\beta}0\}\tfrac{\partial}{\partial u} + \{H_{\alpha}q_1 - H_{\beta}0\}\tfrac{\partial}{\partial v} =$$
$$= X_3 = H_2.$$

Условие удовлетворяется при $q_1 = q_2 = 0$, $\gamma = 1$. Таким образом получим, что $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ является трехмерной подалгеброй. Для всех остальных представителей подалгебр условия (4.4.1) и (4.4.2) выполнены без дополнительных ограничений.

Окончательно пришли к следующей таблице оптимальных систем Θ_s для алгебры Ли L_4

Таблица 7. Таблица оптимальных систем

s	1	2	3	4
Θ_s	$X_1 + q_1X_4$ $X_2 + q_2X_4$ X_3 X_4	X_1, X_2 $X_1 + q_1X_4, X_3$ $X_1 + q_1X_4, X_4$ $X_2 + q_2X_4, X_3$ X_3, X_4	X_1, X_2, X_3 $X_1 + q_1X_4, X_3, X_4$ $X_2 + q_2X_4, X_3, X_4$	X_1, X_2, X_3X_4

5. Инвариантные и частично инвариантные решения

Для построения решения, инвариантного относительно данной подгруппы, необходимо найти полный набор функционально независимых инвариантов этой подгруппы.Применяя к полученному инвариантному решению конечные преобразования, соответствующие допускаемым группам, получим более общее многопараметрическое решение.

Операторам

$$X_1 = t\tfrac{\partial}{\partial t} + x\tfrac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \tfrac{\partial}{\partial t},\ X_3 = \tfrac{\partial}{\partial x},\ X_4 = t\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial u} + \tfrac{\partial}{\partial v},$$

соответствуют преобразования, сохраняющие систему (2.5)–(2.8):

(X_1) растяжение

$$t' = a_1t,\ x' = a_1x,\ \rho'_s = \rho_s,\ \rho'_l = \rho_l,\ u' = u,\ v' = v,$$

(X_2) изменение начала отсчета времени

$$t' = t + a_2,\ x' = x,\ \rho'_s = \rho_s,\ \rho'_l = \rho_l,\ u' = u,\ v' = v,$$

(X_3) перенос по оси x

$$t' = t,\ x' = x + a_3,\ \rho'_s = \rho_s,\ \rho'_l = \rho_l,\ u' = u,\ v' = v,$$

(X_4) галилеев перенос по оси x

$$t' = t,\ x' = x + a_4t,\ \rho'_s = \rho_s,\ \rho'_l = \rho_l,\ u' = u + a_4,\ v' = v + a_4,$$

5.1.1.а. Для оператора $X_1+q_1X_4=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+q_1t\frac{\partial}{\partial x}+q_1\frac{\partial}{\partial u}+q_1\frac{\partial}{\partial v}$ инвариантами являются следующие функции

$$J_1=q_1\ln t-\tfrac{x}{t},\ J_2=\rho_s,\ J_3=\rho_l,\ J_4=u-\tfrac{x}{t},\ J_5=v-\tfrac{x}{t}.$$

Решение будем искать в виде

$$\rho_s=\rho_s\left(q_1\ln t-\tfrac{x}{t}\right),\ \rho_l=\rho_l\left(q_1\ln t-\tfrac{x}{t}\right),$$
$$u=u\left(q_1\ln t-\tfrac{x}{t}\right)+\tfrac{x}{t},\ v=v\left(q_1\ln t-\tfrac{x}{t}\right)+\tfrac{x}{t}.$$

Подставим данное решение в систему (2.5)–(2.8) и произведем замену $y=q_1\ln t-\frac{x}{t}$. Получим:

$$\frac{\partial\rho_s u}{\partial y}-q_1\frac{\partial\rho_s}{\partial y}-\rho_s=0,$$
$$\frac{\partial\rho_l v}{\partial y}-q_1\frac{\partial\rho_l}{\partial y}-\rho_l=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(u-q_1)-u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(v-q_1)-v=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.1.б. Оператор $X_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}$ имеет инварианты

$$J_1=\tfrac{x}{t},\ J_2=\rho_s,\ J_3=\rho_l,\ J_4=u,\ J_5=v.$$

Решение будем искать в виде

$$\rho_s=\rho_s\left(\tfrac{x}{t}\right),\ \rho_l=\rho_l\left(\tfrac{x}{t}\right),\ u=u\left(\tfrac{x}{t}\right),\ v=v\left(\tfrac{x}{t}\right).$$

После подстановки искомых функции в уравнения (2.5)–(2.8) и замены $y=\frac{x}{t}$ получим

$$\frac{\partial\rho_s u}{\partial y}-y\frac{\partial\rho_s}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial\rho_l v}{\partial y}-y\frac{\partial\rho_l}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(u-y)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(v-y)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.2.а. Для оператора $X=X_2+q_2X_4=\frac{\partial}{\partial t}+q_2t\frac{\partial}{\partial x}+q_2\frac{\partial}{\partial u}+q_2\frac{\partial}{\partial v}$ инварианты

$$J_1=\tfrac{q_2t^2}{2}-x,\ J_2=\rho_s,\ J_3=\rho_l,\ J_4=u-q_2t,\ J_5=v-q_2t.$$

После замены $y=\frac{q_2t^2}{2}-x$ инвариантное решение будем искать в виде

$$\rho_s=\rho_s(y),\ \rho_l=\rho_l(y),\ u=u(y)+q_2t,\ v=v(y)+q_2t.$$

Подставим искомые функции в уравнения (2.5), (2.6)

$$-\frac{\partial\rho_s u}{\partial y}=0,\ -\frac{\partial\rho_l v}{\partial y}=0.$$

Следовательно, $\rho_s u=c_1$, $\rho_l v=c_2$.

Тогда уравнения (2.7), (2.8) примут вид

$$q_2-u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{c_2u}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2,$$
$$q_2-v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{c_1v}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2.$$

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.2.б. Оператор $X_2=\frac{\partial}{\partial t}$ имеет инварианты

$$J_1=x,\ J_2=\rho_s,\ J_3=\rho_l,\ J_4=u,\ J_5=v.$$

Решение будем искать в виде

$$\rho_s=\rho_s(x),\ \rho_l=\rho_l(x),\ u=u(x),\ v=v(x).$$

После подстановки искомых функции в уравнения (2.5), (2.6) получим

$$-\frac{\partial \rho_s u}{\partial x} = 0, \; -\frac{\partial \rho_l v}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, $\rho_s u = c_1, \rho_l v = c_2$.

Уравнения (2.7), (2.8) примут вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{c_2u}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2,$$

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{c_1v}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2.$$

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.3. Для оператора $X = \frac{\partial}{\partial x}$ инвариантами являются следующие функции

$$J_1 = t, \; J_2 = \rho_s, \; J_3 = \rho_l, \; J_4 = u, \; J_5 = v.$$

Инвариантное решение будем искать в виде

$$\rho_s = \rho_s(t), \; \rho_l = \rho_l(t), \; u = u(t), \; v = v(t).$$

После подстановки искомых функции в систему получим

$$\rho_s = c_1, \; \rho_l = c_2, \; u = c_3, \; v = c_4.$$

5.1.4. Для оператора $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ инварианты

$$J_1 = t, \; J_2 = \rho_s, \; J_3 = \rho_l, \; J_4 = u - \frac{x}{t}, \; J_5 = v - \frac{x}{t}.$$

Решение будем искать в виде

$$\rho_s = \rho_s(t), \; \rho_l = \rho_l(t), \; u = u(t) + \frac{x}{t}, \; v = v(t) + \frac{x}{t}.$$

Подставив искомые функции в систему, получим

$$\frac{d\rho_s}{dt} + \frac{\rho_s}{t} = 0, \; \frac{d\rho_l}{dt} + \frac{\rho_l}{t} = 0, \; \frac{du}{dt} + \frac{u}{t} = 0, \; \frac{dv}{dt} + \frac{v}{t} = 0.$$

Следовательно, инвариантное решение

$$\rho_s = \frac{c_1}{t}, \; \rho_l = \frac{c_2}{t}, \; u = \frac{c_3}{t}, \; v = \frac{c_4}{t}.$$

Более общее многопараметрическое решение представляется в виде

$$\rho_s = \frac{c_1}{a_1t+a_2}, \; \rho_l = \frac{c_2}{a_1t+a_2}, \; u = \frac{c_3}{a_1t+a_2}, \; v = \frac{c_4}{a_1t+a_2}.$$

5.2.1. Для двумерных подалгебр приведем следующую таблицу

Таблица 8. Инварианты двумерных подалегбр

Подалгебра		Инварианты	Искомые функции
X_1, X_2		$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l,$ $J_3 = u, J_4 = v$	$\rho_s = c_1, \rho_l = c_2,$ $u = c_3, v = c_4$
$X_1 + q_1X_4, X_3$	$X_1 + q_1X_4, X_3$	$J_1 = \rho_s, \; J_2 = \rho_l,$ $J_3 = u - q_1\ln t,$ $J_4 = v - q_1\ln t$	$\rho_s = c_1, \; \rho_l = c_2,$ $u = c_3 + q_1\ln t,$ $v = c_4 + q_1\ln t$
	X_1, X_3	$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l,$ $J_3 = u, J_4 = v$	$\rho_s = c_1, \rho_l = c_2,$ $u = c_3, v = c_4$
$X_1 + q_1X_4, X_4$	$X_1 + q_1X_4, X_4$	$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l,$ $J_3 = \frac{x}{t} - u,$ $J_4 = \frac{x}{t} - v$	$\rho_s = c_1, \rho_l = c_2,$ $u = c_3 + \frac{x}{t}, v = c_4 + \frac{x}{t}$
	X_1, X_4	$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l,$ $J_3 = \frac{x}{t} - u,$ $J_4 = \frac{x}{t} - v$	$\rho_s = c_1, \rho_l = c_2,$ $u = c_3 + \frac{x}{t}, v = c_4 + \frac{x}{t}$
$X_2 + q_2X_4, X_3$	$X_2 + q_2X_4, X_3$	$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l$ $J_3 = u - q_1t,$ $J_4 = v - q_1t$	$\rho_s = c_1, \; \rho_l = c_2,$ $u = c_3 + q_1t, v = c_4 + q_1t$
	X_2, X_3	$J_1 = \rho_s, J_2 = \rho_l,$ $J_3 = u, J_4 = v$	$\rho_s = c_1, \rho_l = c_2,$ $u = c_3, v = c_4$

Подстановка данных решений в систему ничего не даст.

5.2.2. Для двумерной подалгебры $\langle X_3, X_4 \rangle$ инвариантами являются

$$J_1 = t,\ J_2 = \rho_s,\ J_3 = \rho_l,\ J_4 = u - v.$$

Но инвариантных решений нет, т.к. матрица

$$\frac{\partial(J_1,J_2,J_3,J_4)}{\partial(\rho_l,\rho_s,u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг равный трем. Данное значение не отвечает необходимому условию существования инвариантных решений, сформулированному в теореме 19.3 [6].

Найдем соответствующие частично инвариантные решения. Вычислим целочисленные характеристики подгруппы H по следующим формулам [11]:

$t_* = m + n - r_*$ – общее количество инвариантов группы H;

$\sigma_* = n - r_*(\xi)$ – количество инвариантов группы, зависящих только от независимых переменных;

$\mu = t_* - \sigma_*$ – количество инвариантов, существенно зависящих от искомых функции.

Где число m – количество зависимых переменных, n – количество независимых переменных, $r_*(\xi) = \text{о.р.}M(\xi)$, $r_* = r_*(\xi, \eta) = \text{о.р.}M(\xi, \eta)$,

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_r^1 & \dots & \xi_r^n \end{pmatrix},\ M(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_r^1 & \dots & \xi_r^n & \eta_r^1 & \dots & \eta_r^n \end{pmatrix},$$

ξ_α^i - коэффициенты оператора X_α алгебры Ли L_r при производных по независимым переменным и, соответственно, η_α^k- коэффициенты при производных по зависимым переменным.

Итак, имеем следующие значения $r_*(\xi) = 1$, $r_* = 2$, $t_* = 4$, $\sigma_* = 1$, $\mu = 3$. В качестве ранга частично инвариантного решения можно взять любое целое число ρ_*, удовлетворяющее неравенствам

$$\sigma_* \le \rho_* < \min(n, t_*),$$

в данном случае $\rho_* = \sigma_* = 1$. Таким образом, будем искать регулярное частично инвариантное решение в виде

$$\rho_s = \rho_s(t),\ \rho_l = \rho_l(t),\ u = v + \varphi(t).$$

Дефект δ данного решения равен 1. Подставив представленные функции в систему уравнений, получим

$\rho_s'(t) + \rho_s(t)v_x = 0,$

$\rho_l'(t) + \rho_l(t)v_x = 0,$

$v_t + \varphi'(t) + (v + \varphi(t)) = 0,$

$v_t + vv_x = 0,$

где штрихом обозначена производная по времени.

Умножим первое уравнение на ρ_l, второе - на ρ_s и вычтем из второго первое, тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_l(t)}{\rho_s(t)}\right) = 0,\ \rho_l(t) = c_1\rho_s(t).$$

Откуда следует

$$v_x = -\frac{\rho_s'(t)}{\rho_s(t)},\ v = -\frac{\rho_s'(t)}{\rho_s(t)}x + c_2(t).$$

Продифференцировав четвертое уравнение по x, получим

$$v_{tx} + v_x^2 = 0.$$

Введем обозначение

$$\psi(t) = v_x = -\frac{\rho_s'(t)}{\rho_s(t)},$$

тогда последние полученное уравнение примет вид $-\psi'(t) = \psi^2(t)$. Его решение является функция $\psi(t) = \frac{1}{t+c_3}$, соответственно, имеем

$$-\frac{\rho_s'(t)}{\rho_s(t)} = \frac{1}{t+c_3}.$$

Решением данного уравнения является

$$\rho_s(t) = \frac{c_4}{t+c_3},$$

что влечет за собой

$$v = \frac{x}{t+c_3} + c_2(t).$$

Тогда из четвертого уравнения получим

$$c_2'(t) + \frac{c_2(t)}{t+c_3} = 0.$$

Следовательно, $c_2(t) = \frac{c_5}{t+c_3}$.

Из третьего уравнения системы получим, что

$$\varphi'(t) + \frac{\varphi(t)}{t+c_3} = 0,\ \varphi(t) = \frac{c_6}{t+c_3}$$

Найдено решение

$$\rho_s(t) = \frac{c_4}{t+c_3},\ \rho_l(t) = \frac{c_1 c_4}{t+c_3},$$

$$v = \frac{x}{t+c_3} + \frac{c_5}{t+c_3},\ u = \frac{x}{t+c_3} + \frac{c_5+c_6}{t+c_3}.$$

Более общее многопараметрическое решение представляется в виде

$$\rho_s(t) = \frac{c_4}{t+c_3},\ \rho_l(t) = \frac{c_1 c_4}{t+c_3},$$

$$v = \frac{x-a_4 t}{t+c_3} + \frac{c_5}{t+c_3} + a_4,\ u = \frac{x-a_4 t}{t+c_3} + \frac{c_5+c_6}{t+c_3} + a_4.$$

5.3. Для трехмерных подалгебр $\langle X_1 + q_1 X_4, X_3, X_4\rangle$, $\langle X_2 + q_2 X_4, X_3, X_4\rangle$ инвариантами являются функции

$$J_1 = \rho_s,\ J_2 = \rho_l,\ J_3 = u - v,$$

как и для подалгебры $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$.

В данных случаях инвариантных решений нет.

Покажем, что существует нерегулярное частично инвариантное решение типа простой волны. Так для подалгебры $\langle X_2 + q_2 X_4, X_3, X_4\rangle$ имеем следующие значения $r_*(\xi) = 2$, $r_* = 3$, $t_* = 3$, $\sigma_* = 0$, $\mu = 3$. Для ранга имеем неравенства

$$0 \le \rho_* < 2.$$

Простая волна есть частично инвариантное решение ранга $\rho_* = 1$ и дефекта $\delta \le 1$. Таким образом, $\sigma_* < \rho_*$, что является случаем нерегулярного частично инвариантного решения. В качестве параметра выберем функцию u, тогда имеем представление для инвариантных функций

$$J_1 = \rho_s(u),\ J_2 = \rho_l(u),\ J_3 = v(u).$$

При этом неинвариантная функция u предполагается зависящей от всех независимых переменных $u = u(t, x)$. Дефект δ данного решения равен 1.

Подставив искомые функции в систему уравнений (2.5)–(2.8), получим

$$\rho_s' u_t + \rho_s u_x + \rho_s' u_x u = 0,$$
$$\rho_l' u_t + \rho_l u_x v' + \rho_l' u_x v = 0,$$
$$u_t + u u_x = -\frac{1}{\rho}\left[u_x P_{\bar\rho}\left(\rho_s' + \rho_l'\right) + 2u_x P_{\bar w}\left(u - v\right)\left(1 - v'\right)\right] - \frac{\rho_l}{\rho} u_x \left(u - v\right)\left(1 - v'\right),$$
$$v' u_t + v v' u_x = -\frac{1}{\rho}\left[u_x P_{\bar\rho}\left(\rho_s' + \rho_l'\right) + 2u_x P_{\bar w}\left(u - v\right)\left(1 - v'\right)\right] + \frac{\rho_s}{\rho} u_x \left(u - v\right)\left(1 - v'\right),$$

где штрихом обозначена производная по u. Частично инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.4. Четырехмерная подалгебра $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = \rho_s,\ J_2 = \rho_l.$$

Инвариантного решения нет.

6. Заключение

В работе получен базис ядра основной алгебры Ли одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению. Для данного ядра найдены оптимальные системы подалгебр. Также для всех неподобных подгрупп, алгебры которых входят в оптимальные системы подалгебр ядра основных алгебр Ли выписаны все системы дифференциальных уравнений для инвариантных и частично инвариантных решений. Некоторые из полученных решений являются частными случаями решений представленными в работе [18], в чем нетрудно убедиться, учтя соответствующие условия.

References

[1] R. Hirota, *Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, Phys. Rev. Lett., **27**:18 (1971), 1192–1194. Zbl 1168.35423

[2] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge: Cambridge University Press, 1991. Zbl 0762.35001

[3] C. Rogers, W.F. Shadwick, *Backlund Transformations and Their Applications*, New York: Academic Press, 1982. Zbl 0492.58002

[4] V.A. Matveev, M.A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991. Zbl 0744.35045

[5] F. Cariello, M. Tabor, *Similarity reductions from extended Painleve expansions for nonintegrable evolution equations*, Physica D, **53** (1991), 59–70. Zbl 0745.35046

[6] L.V. Ovsyannikov, *Group analysis of differential equations*, Moscow: "Nauka", 1978. (in Russian).

[7] G.W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, New York: Springer, 1989. Zbl 0698.35001

[8] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York: Springer, 1993. Zbl 0785.58003

[9] G.W. Bluman, S. Anco, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, New York: Springer, 2002. Zbl 1013.34004

[10] V.I. Lahno, S.V. Spichak, V.I. Strogny, *Symmetry analysis of evolution equations*, Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Studies, 2004. (in Russian).

[11] S.V. Golovin, A.A. Chesnokov, *Group analysis of differential equations*, Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2009. (in Russian).

[12] G.W. Bluman, A. Cheviakov, S. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2010. Zbl 1223.35001

[13] M.L. Wang, Y.B. Zhou, Z.B Li, *Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics*, Phys. Lett. A, **216** (1996), 67–75. Zbl 1125.35401

[14] J.H. He, *Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples*, Int. J. Nonlinear Mech., **34**:4 (1999), 699–708. Zbl 1342.34005

[15] J.H. He, *Semi-inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics*, Int. J. Turbo Jet-Engines, **14**:1 (1997), 23–28.

[16] A.V. Panov, *Group classification of the system of equations for the mechanics of a two-phase medium*, Bulletin of the Chelyabinsk State University, **13** (2011), 38–48. (in Russian).

[17] V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, *Theory of Partial Melting*, Geology and Geophysics, **9** (1989), 56–64. (in Russian).

[18] V.E. Fedorov, A.V. Panov, *Invariant and partially invariant solutions of the system of equations for the mechanics of a two-phase medium*, Bulletin of the Chelyabinsk State University, **11** (2011), 65–68. (in Russian).

Georgy Sergeevich Vasiliev
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
pr. Lavrentieva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: george.vasiliev@yandex.ru

Jian-Gang Tang
YiLi Normal University,
Jiefang Road, 448,
835000, Yinning Xinjiang, P.R. of China
E-mail address: tjg@ylsy.edu.cn

Baxtier Zhuramirzaevich Mamasoliev
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
Universitet Ko'chasi, 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: baxtier.mamasoliev@nuu.uz