S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 603–611 (2018) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2018.15.048 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$

А.А. МАХНЕВ, М.П. ГОЛУБЯТНИКОВ

Abstract. Prime orders automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a distance-regular graph with intersection array $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$. Let nonsolvable automorphism group G acts transitively on the vertex set of distance-regular graph Γ with intersection array $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, $\bar{T}$ be a socle of $\bar{G} = G/S(G)$. Then either $\bar{T} \cong L_2(289)$ and Γ is the Mathon graph or $\bar{T} \cong A_{29}$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят

Makhnev, A.A., Golubyatnikov, M.P., Automorphisms of graph with intersection array $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$.

Поступила 10 апреля 2018 г., опубликована 18 мая 2018 г.

от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для автоморфизма g графа Γ через $\mathrm{Fix}(g)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно g, а через $\alpha_j(g)$ — число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u, u^g) = j$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных антиподальных графов с $\lambda = \mu$ степени, не большей 1000, в которых окрестности вершин сильно регулярны.

Предложение 1. *Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ). Если $(r-1)k = v - k - 1$, $v \leq 1000$ и число $(v+1)(r-1)$ четно, то либо $r = 2$, либо параметры (v, k, λ, μ, r) принадлежат следующему списку:*

(1) $(10, 3, 0, 1, 3)$, $(16, 5, 0, 2, 3)$, $(25, 8, 3, 2, 3)$, $(49, 12, 5, 2, 4)$, $(50, 7, 0, 1, 7)$, $(55, 18, 9, 4, 3)$, $(64, 21, 8, 6, 3)$, $(81, 16, 7, 2, 5)$, $(81, 20, 1, 6, 4)$, $(85, 14, 3, 2, 6)$, $(96, 19, 2, 4, 5)$, $(99, 14, 1, 2, 7)$, $(100, 33, 8, 12, 3)$, $(100, 33, 14, 9, 3)$;

(2) $(105, 26, 13, 4, 4)$, $(121, 20, 9, 2, 6)$, $(121, 30, 11, 6, 4)$, $(121, 40, 15, 12, 3)$, $(126, 25, 8, 4, 5)$, $(133, 44, 15, 14, 3)$, $(162, 23, 4, 3, 7)$, $(169, 24, 11, 2, 7)$, $(169, 42, 5, 12, 4)$, $(169, 56, 15, 20, 3)$, $(171, 34, 17, 4, 5)$, $(176, 25, 0, 4, 7)$, $(196, 39, 2, 9, 5)$, $(196, 39, 14, 6, 5)$, $(196, 65, 24, 20, 3)$;

(3) $(205, 68, 15, 26, 3)$, $(209, 52, 15, 12, 4)$, $(216, 43, 10, 8, 5)$, $(225, 28, 13, 2, 8)$, $(225, 56, 19, 12, 4)$, $(232, 33, 2, 5, 7)$, $(232, 77, 36, 20, 3)$, $(243, 22, 1, 2, 11)$, $(253, 42, 21, 4, 6)$, $(256, 51, 2, 12, 5)$, $(256, 85, 24, 30, 3)$, $(261, 52, 11, 10, 5)$, $(286, 95, 24, 35, 3)$, $(288, 41, 4, 6, 7)$, $(289, 32, 15, 2, 9)$, $(289, 48, 17, 6, 6)$, $(289, 72, 11, 20, 4)$, $(289, 96, 35, 30, 3)$;

(4) $(301, 60, 3, 9, 5)$, $(305, 76, 27, 16, 4)$, $(325, 54, 3, 10, 6)$, $(343, 114, 45, 34, 3)$, $(351, 50, 13, 6, 7)$, $(351, 50, 25, 4, 7)$, $(351, 70, 13, 14, 5)$, $(352, 39, 6, 4, 9)$, $(352, 117, 36, 40, 3)$, $(361, 36, 17, 2, 10)$, $(361, 90, 29, 20, 4)$, $(361, 120, 35, 42, 3)$, $(364, 33, 2, 3, 11)$, $(364, 121, 48, 36, 3)$, $(400, 21, 2, 1, 19)$, $(400, 57, 20, 6, 7)$, $(400, 133, 42, 45, 3)$, $(400, 133, 48, 42, 3)$;

(5) $(430, 39, 8, 3, 11)$, $(441, 40, 19, 2, 11)$, $(441, 88, 7, 20, 5)$, $(441, 110, 19, 30, 4)$, $(456, 65, 10, 9, 7)$, $(460, 153, 32, 60, 3)$, $(465, 58, 29, 4, 8)$, $(484, 161, 48, 56, 3)$, $(486, 97, 16, 20, 5)$, $(495, 38, 1, 3, 13)$, $(505, 84, 3, 16, 6)$, $(507, 46, 5, 4, 11)$, $(512, 73, 12, 10, 7)$, $(529, 44, 21, 2, 12)$, $(529, 66, 23, 6, 8)$, $(529, 88, 27, 12, 6)$, $(529, 132, 41, 30, 4)$, $(529, 176, 63, 56, 3)$, $(540, 49, 8, 4, 11)$, $(540, 77, 4, 12, 7)$;

(6) $(561, 140, 31, 36, 4)$, $(576, 115, 18, 24, 5)$, $(595, 66, 33, 4, 9)$, $(595, 198, 81, 58, 4)$, $(610, 87, 32, 9, 7)$, $(616, 205, 90, 57, 3)$, $(625, 48, 23, 2, 13)$, $(625, 156, 29, 42, 4)$, $(625, 208, 63, 72, 3)$, $(630, 37, 4, 2, 17)$, $(638, 49, 0, 4, 13)$, $(640, 71, 6, 8, 9)$, $(640, 213, 72, 70, 3)$, $(649, 72, 15, 7, 9)$, $(649, 216, 63, 76, 3)$, $(676, 45, 2, 3, 15)$, $(676, 75, 26, 6, 9)$, $(676, 135, 14, 30, 5)$, $(676, 225, 54, 85, 3)$;

(7) $(704, 37, 0, 2, 19)$, $(722, 103, 12, 15, 7)$, $(726, 145, 32, 28, 5)$, $(726, 145, 44, 25, 5)$, $(729, 52, 25, 2, 14)$, $(729, 104, 31, 12, 7)$, $(729, 182, 55, 42, 4)$, $(736, 105, 20, 14, 7)$, $(741, 74, 37, 4, 10)$, $(768, 59, 10, 4, 13)$, $(784, 261, 80, 90, 3)$, $(784, 261, 108, 76, 3)$, $(837, 76, 15, 6, 11)$, $(841, 56, 27, 2, 15)$, $(841, 84, 29, 6, 10)$, $(841, 140,$

$39, 20, 6)$, $(841, 168, 47, 30, 5)$, $(841, 210, 41, 56, 4)$, $(841, 280, 99, 90, 3)$, $(847, 94, 21, 9, 9)$, $(847, 282, 81, 100, 3)$, $(848, 121, 24, 16, 7)$;

(8) $(856, 95, 6, 11, 9)$, $(889, 222, 35, 62, 4)$, $(901, 60, 3, 4, 15)$, $(903, 82, 41, 4, 11)$, $(904, 301, 78, 111, 3)$, $(936, 187, 18, 42, 5)$, $(945, 118, 19, 14, 8)$, $(960, 137, 28, 18, 7)$, $(961, 60, 29, 2, 16)$, $(961, 120, 35, 12, 8)$, $(961, 160, 9, 30, 6)$, $(961, 192, 23, 42, 5)$, $(961, 240, 71, 56, 4)$, $(961, 320, 99, 100, 3)$, $(981, 140, 43, 16, 7)$, $(1000, 111, 14, 12, 9)$, $(1000, 333, 108, 112, 3)$.

Следующая лемма [2, теорема 5.4] позволяет удалить некоторые массивы пересечений, отвечающие графам из заключения предложения.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярное r-накрытие $(k+1)$-клики с $\lambda = \mu$. Через n^* обозначим часть натурального числа n, свободную от квадратов. Тогда*

(1) *если $k \equiv 1 \pmod 4$ и r четно, то $p \equiv 1 \pmod 4$ для любого нечетного простого числа p, делящего k^*;*

(2) *если k четно, то $(-1)^{(r-1)/2}r$ — квадрат по модулю p для любого нечетного простого числа p, делящего k^*.*

Граф Δ из пунктов (1–3) заключения предложения со вторым собственным значением 4 имеет параметры $(85, 14, 3, 2, 6)$, $(169, 56, 15, 20, 3)$, $(232, 33, 2, 5, 7)$, $(243, 22, 1, 2, 11)$, $(286, 95, 24, 35, 3)$, $(289, 72, 11, 20, 4)$.

Этим параметрам отвечают массивы пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$, $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$, $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, $\{286, 190, 1; 1, 95, 286\}$ (граф не существует: -1 – не квадрат по модулю 11), $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$.

Продолжается исследование симметричных графов с такими массивами пересечений. Найдены автоморфизмы графов с массивами $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ [3], $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ [4]. Реберно симметричный граф с массивом пересечений $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$ является графом Мэтона [5]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [6, стр. 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 289 + 867 + 3 = 1160 = 8 \cdot 5 \cdot 29$ вершин и спектр $289^1, 17^{435}, -1^{289}, -17^{435}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 + k/\theta_3 = 18$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 29$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 290$, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 340l - 50$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8m$ и $\alpha_1(g) = 68n + 32m - 16$;*

(2) *Ω является n-кликой, $p = 3$, $n = 2, 5, ..., 17$, $\alpha_3(g) = 4n$ и $\alpha_1(g) = 102l - 17n + 306$;*

(3) Ω *содержится в антиподальном классе,* $p = 17$, $s = 4$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 34l$*;*

(4) *либо* $p = 31$ *и* $t = 42$, *либо* $p = 29$ *и* $t = 58$, *либо* $p = 23$ *и* $t = 37, 60$*;*

(5) *либо* $p = 19$ *и* $t = 43, 62$, *либо* $p = 17$ *и* $t = 18, 35, 52, 69$, *причем в случае* $t = 18$ *граф* Ω *имеет массив пересечений* $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$, *либо* $p = 13$ *и* $t = 30, 43, 56, 69$*;*

(6) *либо* $p = 11$ *и* $t = 26, 37, 48, 59, 70$, *либо* $p = 7$ *и* $t = 10, 17, ..., 66$, *причем в случае* $t = 10$ *граф* Ω *имеет массив пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, *либо* $p = 5$ *и* $t = 10, 15, ..., 70$*;*

(7) $p = 3$, $s = 4$ *и* $t \leq 71$*;*

(8) $p = 2$, *либо* $s = 4$ *и* $t \leq 72$, *либо* $s = 2$ *и* $t \leq 146$, *причем в случае* $t = 146$ Ω *является графом Тэйлора с массивом пересечений* $\{145, 72, 1; 1, 72, 145\}$ *и* $\Omega(a)$ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(145, 72, 35, 36)$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$ *и неразрешимая группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин этого графа. Если* F *– антиподальный класс графа* Γ, $\bar{T}$ *– цоколь группы* $\bar{G} = G/S(G)$, *то либо* $\bar{T} \cong L_2(17^2)$ *и* Γ *— граф Мэтона, либо* $\bar{T} \cong A_{29}$, *и если* S *— силовская* 5*-подгруппа из* $S(G)$, *то* $|S : S_{\{F\}}| = 5$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* S.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [7]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij}A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$. *Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p^1_{11} = 72$, $p^1_{12} = 216$, $p^1_{22} = 648$, $p^1_{23} = 3$, $p^1_{33} = 0$*;*

(2) $p^2_{11} = 72$, $p^2_{12} = 216$, $p^2_{13} = 1$, $p^2_{22} = 648$, $p^2_{23} = 2$, $p^2_{33} = 0$;
(3) $p^3_{12} = 289$, $p^3_{13} = 0$, $p^3_{22} = 578$, $p^3_{23} = 0$, $p^3_{33} = 2$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 435, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 289. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l*, взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (13\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 4\alpha_3(g))/34 - 145/17$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$. *Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 435$ *и* $\chi_2(g) - 289$ *делятся на* p*, а если* $|g| = p^2$, p *— простое число, то* $\chi_1(g^p) - 435$ *делится на* p^2.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 435 & 435/17 & -145/17 & -145 \\ 289 & -1 & -1 & 289 \\ 435 & -435/17 & 145/17 & -145 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (51\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 17\alpha_3(g))/136$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1160 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (13\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 4\alpha_3(g))/34 - 145/17$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (289\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 289\alpha_3(g))/1160$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1160 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1$. □

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [8].

В леммах 4–7 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 29$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 290$*, либо* $p = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 340l - 50$*, либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8m$ *и* $\alpha_1(g) = 68n + 32m - 16$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $p = 3$, $n = 2, 5, ..., 17$, $\alpha_3(g) = 4n$ *и* $\alpha_1(g) = 102l - 17n + 306$;

(3) *если* Ω *содержится в антиподальном классе, то* $p = 17$, $s = 4$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 34l$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $1160 = 8 \cdot 5 \cdot 29$, то $p = 2, 5, 29$.

Если $p = 29$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 290)/34$, $\alpha_1(g) = 29l$ и $l - 10$ делится на 34. Отсюда $l = 34m + 10$ и $\alpha_1(g) = 290$.

Если $p = 5$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 290)/34$ и $\alpha_1(g) = 340l - 50$.

Если $p = 2$, то $\alpha_3(g) = 4l$, число $\chi_2(g) = l - 1$ нечетно и $l = 2m$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 32m - 290)/34$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 68n + 32m - 16$.

Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше $1 - k/\theta_d = 1 + 289/17 = 18$. Далее, g действует без неподвижных точек на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, поэтому $p = 3$.

Если $n = 1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$ и $p = 17$, противоречие.

Если $n > 1$, то для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$, поэтому p делит $74 - n$ и $n = 2, 5, ..., 17$. Далее, число $\chi_1(g) = (17n + \alpha_1(g) - 306)/34$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 102l - 17n + 306$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит $4 - s$ и 289, поэтому $p = 17$, $s = 4$. Далее, $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/34 - 7$, $\alpha_1(g) = 34l$. $\square$

Лемма 5. *Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, Если $p \geq 5$, то верно одно из утверждений:*

(1) *либо $p = 31$ и $t = 42$, либо $p = 29$ и $t = 58$, либо $p = 23$ и $t = 37, 60$;*

(2) *либо $p = 19$ и $t = 43, 62$, либо $p = 17$ и $t = 18, 35, 52, 69$, причем в случае $t = 18$ граф Ω имеет массив пересечений $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$, либо $p = 13$ и $t = 30, 43, 56, 69$;*

(3) *либо $p = 11$ и $t = 26, 37, 48, 59, 70$, либо $p = 7$ и $t = 10, 17, ..., 66$, причем в случае $t = 10$ граф Ω имеет массив пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, либо $p = 5$ и $t = 10, 15, ..., 70$.*

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Если $p > 3$, то $s = 4$ и любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω.

Если $p > 71$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t - 1, 216, 1; 1, 72, t - 1\}$, противоречие.

В случае $p = 71$ имеем $t = 6$ и Ω имеет массив пересечений $\{5, 3, 1; 1, 1, 5\}$. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ – граф степени 1 на 5 вершинах.

В случае $p = 67$ имеем $t = 22$ и Ω имеет массив пересечений $\{21, 15, 1; 1, 5, 21\}$. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ – граф степени 5 на 21 вершинах.

В случае $p = 61$ имеем $t = 46$ и Ω имеет массив пересечений $\{45, 33, 1; 1, 11, 45\}$. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ – граф степени 11 на 45 вершинах.

В случае $p = 59$ имеем $t = 54$ и Ω имеет массив пересечений $\{53, 39, 1; 1, 13, 53\}$. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ – граф степени 13 на 53 вершинах.

В случае $p = 53$ имеем $t = 25$ и Ω имеет массив пересечений $\{24, 57, 1; 1, 19, 24\}$, противоречие.

В случае $p = 47$ имеем $t = 55$ и Ω имеет массив пересечений $\{54, 75, 1; 1, 25, 54\}$, противоречие.

В случае $p = 43$ имеем $t = 32$ и Ω имеет массив пересечений $\{31, 87, 1; 1, 29, 31\}$, противоречие.

В случае $p = 41$ имеем $t = 44$ и Ω имеет массив пересечений $\{43, 117, 1; 1, 39, 43\}$, противоречие.

В случае $p = 37$ имеем $t = 31, 68$. В случае $t = 31$ граф Ω имеет массив пересечений $\{30, 105, 1; 1, 35, 30\}$, противоречие. В случае $t = 68$ граф Ω имеет массив пересечений $\{67, 105, 1; 1, 35, 67\}$, снова противоречие.

В случае $p = 31$ имеем $t = 11, 42$. Если $t = 11$, то граф Ω имеет массив пересечений $\{10, 30, 1; 1, 10, 10\}$, противоречие.

В случае $p = 29$ имеем $t = 29, 58$. В случае $t = 29$ граф Ω имеет массив пересечений $\{28, 42, 1; 1, 14, 28\}$, противоречие. В случае $t = 58$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{14, 43, 72\}$. Далее, $\chi_1(g) = (2726 + \alpha_1(g))/34$, $\alpha_1(g) = 2(17l - 3)$ делится на 29. Отсюда $l = 7$, $\alpha_1(g) = 232$ и $|\Omega| = 232$.

В случае $p = 23$ имеем $t = 14, 37, 60$. В случае $t = 14$ граф Ω имеет массив пересечений $\{13, 9, 1; 1, 3, 13\}$, противоречие с тем, что $\Omega(a)$ — граф степени 3 на 13 вершинах. В случае $t = 37$ получим $\chi_1(g) = (1634 + \alpha_1(g))/34$ и число $\alpha_1(g) = 2(17l - 1)$ делится на 23. Отсюда $l = 19$, $\alpha_1(g) = 644$ и $|\Omega| = 148$.

В случае $p = 19$ имеем $t = 24, 43, 62$. В случае $t = 24$ граф Ω имеет массив пересечений $\{23, 45, 1; 1, 15, 23\}$, противоречие. В случае $t = 43$ получим $\chi_1(g) = (52 \cdot 43 - 290 + \alpha_1(g))/34$, $\chi_1(g) = (1946 + \alpha_1(g))/34$, и число $\alpha_1(g) = 2(17l - 4)$ делится на 19. Отсюда $l = 17$, $\alpha_1(g) = 285$ и $|\Omega| = 172$.

В случае $p = 17$ имеем $t = 18, 35, 52, 69$. В случае $t = 18$ граф Ω имеет массив пересечений $\{17, 12, 1; 1, 4, 17\}$.

В случае $p = 13$ имеем $t = 17, 30, 43, 56, 69$. В случае $t = 17$ граф Ω имеет массив пересечений $\{16, 21, 1; 1, 7, 16\}$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $t = 15, 26, 37, 48, 59, 70$. В случае $t = 15$ граф Ω имеет массив пересечений $\{14, 18, 1; 1, 6, 14\}$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $t = 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66$. В случае $t = 10$ граф Ω имеет массив пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

В случае $p = 5$ имеем $t = 5, 10, 15, ..., 70$. В случае $t = 5$ граф Ω имеет массив пересечений $\{4, 6, 1; 1, 2, 4\}$, противоречие. □

Лемма 6. *Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p = 3$, то $s = 4$ и $t \leq 71$;*

(2) *если $p = 2$, то либо $s = 4$ и $t \leq 72$, либо $s = 2$ и $t \leq 146$, причем в случае $t = 146$ Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{145, 72, 1; 1, 72, 145\}$ и $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами* $(145, 72, 35, 36)$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 3$. Тогда $s = 4$ и любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω. Отсюда $t \leq 71$.

Пусть $p = 2$. Если $s = 4$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω. Отсюда $t \leq 72$.

Пусть $s = 2$. Положим $\{a, a^*\} = F(a) \cap \Omega$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a, не более 72 вершин из $[a]$ и не более 72 вершин из $[a^*]$, поэтому $t - 1 \leq 145$. В случае $t = 146$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{145, 72, 1; 1, 72, 145\}$. В этом случае $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(145, 72, 35, 36)$. Лемма доказана. □

Из лемм 3–6 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин этого графа.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка 29 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 29$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\mathrm{Fix}(f)$ *— пустой граф, либо* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *— пустой граф, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 390$ или $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8 \cdot 29l$, и $\alpha_1(g) = 29(32l - 24)$, либо $p = 3$, $s = 4$ и $t = 29$, либо $p = 2$, $s = 4$ и $t = 58$ или $s = 2$ и $t = 58, 116$;*

(2) *$p=2$ и g действует без неподвижных точек на каждом антиподальном классе;*

(3) *g фиксирует $t'>0$ антиподальных классов из $\mathrm{Fix}(f)$, либо $p=7$, $t-t'=29$, $t=31,38,45,52,59,66$, либо $p=3$, $t-t'=58$ и $t=59,62,...,71$, либо $p=2$, $s=4$, $t-t'=58$ и $t=60,62,...,72$ или $s=2$, $t-t'=58$ и $t=60,62,...,146$, или $t-t'=116$ и $t=118,120,...,146$.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 29 из G с пустым графом $\mathrm{Fix}(f)$. По теореме $\alpha_3(f)=0$ и $\alpha_1(f)=290$.

Далее, f действует без неподвижных точек на Ω и на $\alpha_i(g)$. Если Ω — пустой граф, то по теореме либо $p=5$, $\alpha_1(g)=290$ или $p=2$, $\alpha_3(g)=8\cdot 29l$ и $\alpha_1(g)=29(32l-24)$.

Если Ω — непустой граф, то по теореме либо $p=3$, $s=4$ и $t=29$, либо $p=2$, $s=4$ и $t=58$ или $s=2$ и $t=58,116$. В случае $p=3$ получим $\chi_1(g)=(58\cdot 47+\alpha_1(g))/34$, $\alpha_1(g)=6(17l-1)$. В случае $p=2$, $s=4$ и $t=58$ получим $\chi_1(g)=(58\cdot 47+\alpha_1(g))/34$ и $\alpha_1(g)=34l-6$. В случае $p=2$, $s=2$ и $t=58$ получим $\chi_1(g)=(754+\alpha_1(g))/34$ и $\alpha_1(g)=34l-6$. В случае $p=2$, $s=2$ и $t=116$ получим $\chi_1(g)=(1798+\alpha_1(g))/34$ и $\alpha_1(g)=34l+4$.

Пусть f — элемент порядка 29 из G с графом $\mathrm{Fix}(f)$, явлющимся объединением 58 антиподальных классов. Если $\mathrm{Fix}(f)$ не пересекает Ω, то g действует без неподвижных точек на $\mathrm{Fix}(f)$, поэтому $p=2$ и g действует без неподвижных точек на каждом антиподальном классе.

Если g фиксирует t' антиподальных классов из $\mathrm{Fix}(f)$. Тогда p делит $58-t'$ и 29 делит $t-t'$.

Если $p=7$, то либо $t-t'=29$ и $t=31,38,45,52,59,66$, либо $t-t'=58$ и $t=59,66$. В последнем случае $p=7$ не делит $58-t'$.

Если $p=5$, то либо $t-t'=29$ и $t=30,35,...,70$, либо $t-t'=58$ и $t=60,65,70$. Противоречие с тем, что $p=5$ не делит $58-t'$.

Если $p=3$, то либо $t-t'=29$ и $t=32,...,71$, либо $t-t'=58$ и $t=59,62,...,71$. В первом случае $p=3$ не делит $58-t'$.

Пусть $p=2$. Если $s=4$, то $t-t'=58$ и $t=60,62,...,72$. Если $s=2$, то либо $t-t'=58$ и $t=60,62,...,146$, либо $t-t'=116$ и $t=118,120,...,146$. Лемма доказана. $\square$

Приступим к доказательству следствия. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Тогда $|G:G_a|=1160$ и $|G:G_{\{F\}}|=290$.

Допустим, что G — неразрешимая группа. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}=G/S(G)$, $Q=O_2(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 29 из G.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$O_{29'}(G)$ является $\{2,5\}$-группой;*

(2) *если $\bar{T}$ не стабилизирует F, то либо $\bar{T}\cong L_2(17^2)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ расширение группы порядка 289 с помощью группы порядка 144, либо $\bar{T}\cong A_{29}$ и $\bar{T}_{\{F\}}\cong A_{28}$.*

Доказательство. Ввиду теоремы $\{2,5,29\}\subseteq\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31\}$ и $v=29\cdot 40$. Поэтому $O_{29'}(G)$ является $\{2,5\}$-группой.

Если 31 делит $|G|$, то по [9, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_n, $31\le n\le 36$. Противоречие с тем, что $\bar{T}$ не содержит подгрупп индекса, делящего 290.

Если 31 не делит $|G|$, то по [9, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(29)$, $L_2(17^2)$, $PSp_4(17)$, $U_4(17)$, Ru, Fi_{24}', A_{29}, A_{30}. Так как $|\bar{T}:\bar{T}_{\{F\}}|$ делит 290, то либо $\bar{T} \cong L_2(17^2)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 289 с помощью группы порядка 144, либо $\bar{T} \cong A_{29}$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_{28}$. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство следствия. Если $\bar{T}$ стабилизирует F, то 29^2 не делит $|G|$, элемент f принадлежит $S(G)$ и фиксирует 58 антиподальных классов. Далее, ввиду леммы 7 группа $C_G(f)$ — расширение $C_{S(G)}(f)$ с помощью $\{2,3,7\}$-группы. С другой стороны, для силовской 5-подгруппы R из G имеем $|R : R_{\{F\}}| = 5$. Ввиду леммы Фраттини можно считать, что f действует на R и на $R_{\{F\}}$. Противоречие с тем, что $C_G(f)$ является $\{5'\}$-группой.

Пусть $\bar{T} \cong L_2(17^2)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ расширение группы порядка 289 с помощью группы порядка 144. Тогда $S(G)$ стабилизирует каждый антиподальный класс и ввиду теоремы $S(G)$ является подгруппой из диэдральной группы порядка 8. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что в этом случае Γ — граф Мэтона.

Если $\bar{T} \cong A_{29}$, S — силовская 5-подгруппа из $S(G)$, то $|S : S_{\{F\}}| = 5$ и $\bar{T}$ действует неприводимо на S. Следствие доказано.

Авторы благодарны Д.В. Падучих за помощь в компьютерных вычислениях с помощью GAP.

References

[1] A.A. Makhnev, M.S. Samoilenko *On distance-regular covers of cliques with stromgly regular local subgraphs*, Trudy 46 Intern. Yang Conference, Yekaterinburg, (2015), 13–17.

[2] Godsil C.D., Hensel A.D. *Distance regular covers of the complete graphs*, J. Comb. Theory Ser. B., **56**:2 (1992), 205–238. Zbl 0771.05031

[3] M.M. Isakova, A.A. Makhnev, A.A. Tokbaeva *On Graphs in Which Neighborhoods of Vertices Are Strongly Regular with Parameters* $(85, 14, 3, 2)$ *or* $(325, 54, 3, 10)$, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 1, **299** (2017), S68–S74.

[4] V.V. Bitkina, A.K. Gutnova, A.A. Makhnev *On Automorphisms of a Distance-Regular Graph with Intersection Array* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1040–1051. Zbl 1370.05091

[5] A. M. Kagazezheva, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 318–327. Zbl 1341.05119

[6] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073

[7] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[8] A.L Gavrilyuk, A.A Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Akademii nauk, **432**:5 (2010), 583–587. Zbl 1250.05059

[9] A.V Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: `makhnev@imm.uran.ru`

Michail Petrovich Golubyathikov
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: `mike_ru1@mail.ru`