S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 650–657 (2018) УДК 519.17+512.54

DOI 10.17377/semi.2018.15.051 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$

А.А. МАХНЕВ, М.М. ХАМГОКОВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это

Makhnev, A.A., Khamgokova, M.M., Automorphisms of graph with intersection array $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

Поступила 20 апреля 2018 г., опубликована 29 мая 2018 г.

степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных антиподальных графов с $\lambda = \mu$ степени, не большей 1000, в которых окрестности вершин сильно регулярны.

Предложение 1. *Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ). Если $(r-1)k = v-k-1$, $v \le 1000$ и число $(v+1)(r-1)$ четно, то либо $r = 2$, либо параметры (v, k, λ, μ, r) принадлежат следующему списку:*

(1) $(10,3,0,1,3)$, $(16,5,0,2,3)$, $(25,8,3,2,3)$, $(49,12,5,2,4)$, $(50,7,0,1,7)$, $(55,18,9,4,3)$, $(64,21,8,6,3)$, $(81,16,7,2,5)$, $(81,20,1,6,4)$, $(85,14,3,2,6)$, $(96,19,2,4,5)$, $(99,14,1,2,7)$, $(100,33,8,12,3)$, $(100,33,14,9,3)$;

(2) $(105,26,13,4,4)$, $(121,20,9,2,6)$, $(121,30,11,6,4)$, $(121,40,15,12,3)$, $(126,25,8,4,5)$, $(133,44,15,14,3)$, $(162,23,4,3,7)$, $(169,24,11,2,7)$, $(169,42,5,12,4)$, $(169,56,15,20,3)$, $(171,34,17,4,5)$, $(176,25,0,4,7)$, $(196,39,2,9,5)$, $(196,39,14,6,5)$, $(196,65,24,20,3)$;

(3) $(205,68,15,26,3)$, $(209,52,15,12,4)$, $(216,43,10,8,5)$, $(225,28,13,2,8)$, $(225,56,19,12,4)$, $(232,33,2,5,7)$, $(232,77,36,20,3)$, $(243,22,1,2,11)$, $(253,42,21,4,6)$, $(256,51,2,12,5)$, $(256,85,24,30,3)$, $(261,52,11,10,5)$, $(286,95,24,35,3)$, $(288,41,4,6,7)$, $(289,32,15,2,9)$, $(289,48,17,6,6)$, $(289,72,11,20,4)$, $(289,96,35,30,3)$;

(4) $(301,60,3,9,5)$, $(305,76,27,16,4)$, $(325,54,3,10,6)$, $(343,114,45,34,3)$, $(351,50,13,6,7)$, $(351,50,25,4,7)$, $(351,70,13,14,5)$, $(352,39,6,4,9)$, $(352,117,36,40,3)$, $(361,36,17,2,10)$, $(361,90,29,20,4)$, $(361,120,35,42,3)$, $(364,33,2,3,11)$, $(364,121,48,36,3)$, $(400,21,2,1,19)$, $(400,57,20,6,7)$, $(400,133,42,45,3)$, $(400,133,48,42,3)$;

(5) $(430,39,8,3,11)$, $(441,40,19,2,11)$, $(441,88,7,20,5)$, $(441,110,19,30,4)$, $(456,65,10,9,7)$, $(460,153,32,60,3)$, $(465,58,29,4,8)$, $(484,161,48,56,3)$, $(486,97,16,20,5)$, $(495,38,1,3,13)$, $(505,84,3,16,6)$, $(507,46,5,4,11)$, $(512,73,12,10,7)$, $(529,44,21,2,12)$, $(529,66,23,6,8)$, $(529,88,27,12,6)$, $(529,132,41,30,4)$, $(529,176,63,56,3)$, $(540,49,8,4,11)$, $(540,77,4,12,7)$;

(6) $(561,140,31,36,4)$, $(576,115,18,24,5)$, $(595,66,33,4,9)$, $(595,198,81,58,4)$, $(610,87,32,9,7)$, $(616,205,90,57,3)$, $(625,48,23,2,13)$, $(625,156,29,42,4)$, $(625,208,63,72,3)$, $(630,37,4,2,17)$, $(638,49,0,4,13)$, $(640,71,6,8,9)$, $(640,213,72,70,3)$, $(649,72,15,7,9)$, $(649,216,63,76,3)$, $(676,45,2,3,15)$, $(676,75,26,6,9)$, $(676,135,14,30,5)$, $(676,225,54,85,3)$;

(7) $(704,37,0,2,19)$, $(722,103,12,15,7)$, $(726,145,32,28,5)$, $(726,145,44,25,5)$, $(729,52,25,2,14)$, $(729,104,31,12,7)$, $(729,182,55,42,4)$, $(736,105,20,14,7)$, $(741,74,37,4,10)$, $(768,59,10,4,13)$, $(784,261,80,90,3)$, $(784,261,108,76,3)$, $(837,76,15,6,11)$, $(841,56,27,2,15)$, $(841,84,29,6,10)$, $(841,140,39,20,6)$, $(841,168,47,30,5)$, $(841,210,41,56,4)$, $(841,280,99,90,3)$, $(847,94,21,9,9)$, $(847,282,81,100,3)$, $(848,121,24,16,7)$;

(8) $(856,95,6,11,9)$, $(889,222,35,62,4)$, $(901,60,3,4,15)$, $(903,82,41,4,11)$, $(904,301,78,111,3)$, $(936,187,18,42,5)$, $(945,118,19,14,8)$, $(960,137,28,18,7)$, $(961,60,29,2,16)$, $(961,120,35,12,8)$, $(961,160,9,30,6)$, $(961,192,23,42,5)$, $(961,240,71,56,4)$, $(961,320,99,100,3)$, $(981,140,43,16,7)$, $(1000,111,14,12,9)$, $(1000,333,108,112,3)$.

Следующая лемма [2, теорема 5.4] позволяет удалить некоторые массивы пересечений, отвечающие графам из заключения предложения.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярное* r*-накрытие* $(k+1)$*-клики с* $\lambda=\mu$. *Через* n^* *обозначим часть натурального числа* n*, свободную от квадратов. Тогда*

(1) *если* $k\equiv\ 1\ (mod\ 4)$ *и* r *четно, то* $p\equiv\ 1\ (mod\ 4)$ *для любого нечетного простого числа* p*, делящего* k^**;*

(2) *если* k *четно, то* $(-1)^{(r-1)/2}r$ *— квадрат по модулю* p *для любого нечетного простого числа* p*, делящего* k^**.*

Граф Δ из пунктов (1–3) заключения предложения со вторым собственным значением 4 имеет параметры $(85,14,3,2,6)$, $(169,56,15,20,3)$, $(232,33,2,5,7)$, $(243,22,1,2,11)$, $(286,95,24,35,3)$, $(289,72,11,20,4)$.

Этим параметрам отвечают массивы пересечений $\{85,70,1;1,14,85\}$, $\{169,112,1;1,56,169\}$, $\{232,198,1;1,33,232\}$, $\{243,220,1;1,22,243\}$, $\{286,190,1;1,95,286\}$ (граф не существует: -1 – не квадрат по модулю 11), $\{289,216,1;1,72,289\}$.

Продолжается исследование симметричных графов с такими массивами пересечений. Ранее были найдены автоморфизмы графов с массивами $\{85,70,1;1,14,85\}$ [3], $\{243,220,1;1,22,11\}$ [4]. Вершинно симметричный граф с массивами пересечений $\{169,112,1;1,56,169\}$ и $\{289,216,1;1,72,289\}$ является графом Мэтона ([5] и [6]). В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{232,198,1;1,33,232\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [7, стр. 431]) массив пересечений $\{k,\mu(r-1),1;1,\mu,k\}$, $v=r(k+1)$ вершин и спектр $k^1,n^f,(-1)^k,(-m)^g$, где $n,-m$ — корни уравнения $x^2-(\lambda-\mu)x-k=0$ и $f=m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g=n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu\neq\lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r,n,m: $k=nm$, $\mu=(m-1)(n+1)/r$, $\lambda=\mu+n-m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{232,198,1;1,33,232\}$. Тогда Γ имеет $v=1+232+1392+6=1631$ вершин и спектр $232^1,2\sqrt{58}^{699},-1^{232},-2\sqrt{58}^{699}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1+k/\theta_3=18$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{232,198,1;1,33,232\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,29,31,233\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=233$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_2(g)=7\alpha_1(g)$, $\alpha_1(g)=233$, *либо* $p=7$, $\alpha_3(g)=7(7m+2)$, $\alpha_2(g)=6\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g)=231-7m$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, то* $\alpha_3(g)=6n$, $\alpha_2(g)=6\alpha_1(g)$ *и либо* $n=1$, $p=2$, $\alpha_3(g)=6$, $\alpha_1(g)=232$, *либо* $n>1$, $p=3$, $n=2,5,...,14$, $\alpha_1(g)=233-7n$ *или* $p=2$, $n=3,5,...,15$, $\alpha_1(g)=233-7n$*;*

(3) Ω *содержится в антиподальном классе,* $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$*, либо* $p = 29$*,* $s = 7$*,* $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 34l$*, либо* $p = 2$*,* $s = 3, 5, 7$*,* $\alpha_3(g) = 7 - s$ *и* $\alpha_1(g) = 232$*;*

(4) $p = 31$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$*;*

(5) $p = 29$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{29, 24, 1; 1, 4, 29\}$*;*

(6) $p = 11$ *и* $t = 2$*;*

(7) $p = 5$*, либо* $s = 7$ *и* $t = 3, 8, ..., 33$*, либо* $s = 2$ *и* $t = 3, 8, ..., 63$*;*

(8) $p = 3$*, либо* $s = 7$ *и* $t = 2, 5, ..., 32$*, либо* $s = 4$ *и* $t = 2, 5, ..., 56$*;*

(9) $p = 2$*, либо* $s = 7$ *и* $t = 3, 5, ..., 33$*, либо* $s = 5$ *и* $t = 3, 5, ..., 45$*, либо* $s = 3$ *и* $t = 3, 5, ..., 77$*.*

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$*. Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве вершин этого графа.*

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [8]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$*. Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p^1_{11} = 33$*,* $p^1_{12} = 198$*,* $p^1_{22} = 1188$*,* $p^1_{23} = 6$*;*

(2) $p^2_{11} = 33$*,* $p^2_{12} = 198$*,* $p^2_{13} = 1$*,* $p^2_{22} = 1188$*,* $p^2_{23} = 5$*;*

(3) $p^3_{12} = 232$*,* $p^3_{22} = 1160$*,* $p^3_{33} = 5$*.*

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 699, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 232. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/7 - 1$. *Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_2(g) - 232$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 699 & 699\sqrt{58}/116 & -233\sqrt{58}/232 & -233/2 \\ 232 & -1 & -1 & 232 \\ 699 & -699\sqrt{58}/116 & 233\sqrt{58}/232 & -233/2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (232\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 232\alpha_3(g))/1631$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1631 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/7 - 1$. $\square$

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [9].

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 233$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 7\alpha_1(g)$, $\alpha_1(g) = 233$, *либо* $p = 7$, $\alpha_3(g) = 7(7m + 2)$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 231 - 7m$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $\alpha_3(g) = 6n$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ *и либо* $n = 1$, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 6$, $\alpha_1(g) = 232$, *либо* $n > 1$, $p = 3$, $n = 2, 5, ..., 14$, $\alpha_1(g) = 233 - 7n$ *или* $p = 2$, $n = 3, 5, ..., 15$, $\alpha_1(g) = 233 - 7n$;

(3) *если* Ω *содержится в антиподальном классе, то* $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$, *либо* $p = 29$, $s = 7$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 34l$, *либо* $p = 2$, $s = 3, 5, 7$, $\alpha_3(g) = 7 - s$ *и* $\alpha_1(g) = 232$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 233 \cdot 7$, то $p = 7, 233$.

Если $p = 233$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = (\sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 7\alpha_1(g)$, $\alpha_1(g) = 233$.

Если $p = 7$, то $\alpha_3(g) = 7l$, число $\chi_2(g) = l - 1$ сравнимо с 1 по модулю 7 и $l = 7m + 2$. Далее, число $\chi_1(g) = (-7l + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$, поэтому $\alpha_1(g) = 231 - 7m$.

Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше 16. Далее, g действует без неподвижных точек на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, поэтому $p = 2, 3$.

Если $n = 1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$ и $p = 2$. Далее, $\chi_1(g) = (12 + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, поэтому $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 232$.

Если $n > 1$, то для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$, поэтому p делит $35 - n$. В случае $p = 3$ имеем $n = 2, 5, ..., 14$. Далее, $\chi_1(g) = (\sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$

и $\alpha_1(g) = 233 - 7n$. В случае $p = 2$ имеем $n = 3, 5, ..., 15$. Далее, $\chi_1(g) = (\sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 233 - 7n$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит $7 - s$ и 232, поэтому либо $s = 7$, $p = 2, 29$, либо $s = 3, 5$, $p = 2$. В случае $p = 29$ имеем $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = (42 + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 232$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 7 - s$, $\chi_1(g) = (7s - 7 + \sqrt{58}(6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/232)/14$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 232$. □

Лемма 5. *Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, Если $p \geq 7$, то верно одно из утверждений:*

(1) $p = 31$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$*;*

(2) $p = 29$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{29, 24, 1; 1, 4, 29\}$*;*

(3) $p = 11$ *и* $t = 2$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Если $p > 5$, то $s = 7$ и любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω.

Если $p > 31$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t - 1, 198, 1; 1, 33, t - 1\}$, противоречие.

В случае $p = 31$ имеем $t = 16$ и Ω имеет массив пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$.

В случае $p = 29$ имеем $t = 30$ и Ω имеет массив пересечений $\{29, 24, 1; 1, 4, 29\}$.

В случае $p = 23$ имеем $t = 3, 26$ и Ω имеет массив пересечений $\{25, 42, 1; 1, 7, 25\}$, противоречие.

В случае $p = 19$ имеем $t = 5, 24$ и Ω имеет массив пересечений $\{23, 84, 1; 1, 14, 23\}$, противоречие.

В случае $p = 17$ имеем $t = 12, 29$ и Ω имеет массив пересечений $\{28, 96, 1; 1, 16, 28\}$, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $t = 12, 25$ и Ω имеет массив пересечений $\{24, 42, 1; 1, 7, 24\}$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $t = 2, 13, 24$. В случае $t = 24$ граф Ω имеет массив пересечений $\{23, 66, 1; 1, 11, 23\}$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $t = 2, 9, 16, 23, 30$. В случае $t = 30$ граф Ω имеет массив пересечений $\{29, 30, 1; 1, 5, 29\}$, противоречие. □

Лемма 6. *Если Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p = 5$*, то либо* $s = 7$ *и* $t = 3, 8, ..., 33$*, либо* $s = 2$ *и* $t = 3, 8, ..., 63$*;*

(2) *если* $p = 3$*, то либо* $s = 7$ *и* $t = 2, 5, ..., 32$*, либо* $s = 4$ *и* $t = 2, 5, ..., 56$*;*

(3) *если* $p = 2$*, то либо* $s = 7$ *и* $t = 3, 5, ..., 33$*, либо* $s = 5$ *и* $t = 3, 5, ..., 45$*, либо* $s = 3$ *и* $t = 3, 5, ..., 77$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 5$. Если $s = 7$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t аершинами из Ω. Отсюда $t = 3, 8, ..., 33$. Если $s = 2$, то для $\{a, a^*\} = F(a) \cap \Omega$ и $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a, не более 33 вершин из $[a]$ и не более 33 вершин из $[a^*]$, поэтому $t - 1 \leq 67$. В случае $t = 68$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{67, 33, 1; 1, 33, 67\}$. В этом случае $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(67, 33, \lambda', 33/2)$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Если $s = 7$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t аершинами из Ω и $t = 2, 5, ..., 32$. Если $s = 4$, то число ребер между $\Gamma - \Omega$ и Ω равно $4t(233 - t)$, но не больше $7(233 - t)33$, поэтому $t \leq 57$.

Пусть $p = 2$. Если $s = 7$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t аершинами из Ω и $t \leq 33$.

Если $s = 5$, то число ребер между $\Gamma - \Omega$ и Ω равно $5t(233 - t)$, но не больше $7(233 - t)33$, поэтому $t \leq 45$.

Если $s = 3$, то число ребер между $\Gamma - \Omega$ и Ω равно $3t(233 - t)$, но не больше $7(233 - t)33$, поэтому $t \leq 77$. Лемма доказана. □

Из лемм 4–6 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{232, 198, 1; 1, 33, 232\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин этого графа.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка 233 из G. Тогда $C_G(f) = \langle f \rangle$.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 233 из G. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_3(f) = 0$ и $\alpha_1(f) = 233$.

По теореме Ω — пустой граф, $p = 7$, и числа $\alpha_3(g) = 7(7m + 2)$, $\alpha_1(g) = 231 - 7m$ делятся на 233. Отсюда $m = 33$ и $\alpha_3(g) = 7 \cdot 233$, поэтому g действует регулярно на любом антиподальном классе. Противоречие с тем, что по [2, теорема 2.5] число $p = 7$ должно делить $k + 1 = 233$. Лемма доказана. □

Приступим к доказательству следствия. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Тогда $|G : G_a| = 1631$ и $|G : G_{\{F\}}| = 233$.

Допустим, что G — неразрешимая группа. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, $Q = O_2(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 233 из G.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $O_{233'}(G)$ *является* $\{7\}$*-группой;*
(2) $\bar{T} \cong L_2(233)$.

Доказательство. Ввиду теоремы $\{7, 233\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 29, 31, 233\}$. Далее, $v = 7 \cdot 233$, поэтому $O_{233'}(G)$ является $\{7\}$-группой.

По [10, таблицы 2-3] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(233)$. Лемма доказана. □

Завершим доказательство следствия. По лемме 8 имеем $\bar{T} \cong L_2(233)$ Противоречие с тем, что $\bar{T}$ не содержит подгрупп индекса 233.

Значит, G — разрешимая группа. Ввиду леммы 8 цоколь T группы G является циклической группой порядка 233. Противоречие с тем, что 7 не делит 232. Следствие доказано.

References

[1] A.A. Makhnev, M.S. Samoilenko, *On distance-regular covers of cliques with stromgly regular local subgraphs*, Trudy 46 Intern. Yang Conference, Yekaterinburg, (2015), 13–17.

[2] Godsil C.D., Hensel A.D., *Distance regular covers of the complete graphs*, J. Comb. Theory Ser. B., **56**:2 (1992), 205–238. Zbl 0771.05031

[3] M.M. Isakova, A.A. Makhnev, A.A. Tokbaeva *On Graphs in Which Neighborhoods of Vertices Are Strongly Regular with Parameters (85,14,3,2) or (325,54,3,10)*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 1 **2017**, v. **299**, p. S1-S7.

[4] V.V. Bitkina, A.K. Gutnova, A.A. Makhnev, *On Automorphisms of a Distance-Regular Graph with Intersection Array* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1040–1051. Zbl 1370.05091

[5] A. M. Kagazezheva, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 318–327. Zbl 1341.05119

[6] A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 603–611.

[7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. 1989. Zbl 0747.05073

[8] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts, **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003

[9] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Akademii nauk, **432**:5 (2010), 583–587. Zbl 1250.05059

[10] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.
620990, Yekaterinburg, Russia,
Ural Federal University
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Madina Muchadinovna Khamgokova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: mike_ru1@mail.ru