

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 658–676 (2018)

УДК 514.752.44:514.772:517.548

DOI 10.17377/semi.2018.15.052

MSC 53A05,30C62

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА НЕГЛАДКИХ
СКЛЕЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А.Н. КОНДРАШОВ

ABSTRACT. In the paper we investigated of question about existence and uniqueness of isothermic coordinates on sewing surfaces in \mathbb{R}^m . The such surfaces is special case of irregular surfaces. We obtained the analog of the famous theorem of V.M. Miklukov (2004) for such surfaces.

Keywords: isothermic coordinates, sewing surfaces, sewing homeomorphisms

1. ТЕОРЕМА В.М. МИКЛЮКОВА ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ НА
НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1.1. Вопрос о существовании изотермических координат на гладких поверхностях хорошо изучен, а возможность их введения оказывается чрезвычайно полезной во многих вопросах. В то же время вопрос о введении изотермических координат на негладких поверхностях оказывается весьма тонким. В основном конформные отображения негладких поверхностей изучались лишь в специальных случаях [4]–[9]. Один из наиболее общих результатов в этом направлении был получен в работе В.М. Миклюкова [1], которая будет для нас отправной точкой. Следуя этой работе введем терминологию и обозначения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и \mathcal{X} – двумерная поверхность в \mathbb{R}^m , ($m \geq 3$), заданная посредством непрерывной вектор-функции

$$(1) \quad y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

реализующей гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией!), индуцированной из \mathbb{R}^m .

KONDRASHOV, A.N., ISOTHERMIC COORDINATES ON IRREGULAR SEWING SURFACES.

© 2018 Кондрашов А.Н.

Поступила 22 октября 2016 г., опубликована 29 мая 2018 г.

Далее всегда предполагаем, что отображение f имеет полный дифференциал df п.в. в D , причём п.в. в D выполнено

$$(2) \quad \text{rank}(df) = 2.$$

Символами $f_{x_1}(x)$, $f_{x_2}(x)$ будем обозначать частные производные вектор-функции f :

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x) &= (f_{1x_1}(x), \dots, f_{mx_1}(x)), \\ f_{x_2}(x) &= (f_{1x_2}(x), \dots, f_{mx_2}(x)). \end{aligned}$$

Пользуясь стандартными обозначениями $E = |f_{x_1}|^2$, $F = \langle f_{x_1}, f_{x_2} \rangle$, $G = |f_{x_2}|^2$, определяем в D метрику (первую квадратичную форму)

$$(3) \quad ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$$

с измеримыми коэффициентами E, F, G .

Определение 1. Пусть \mathcal{X} – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^2$ посредством вектор-функции (1), подчиненной условию (2). Переменные x_1, x_2 называются изотермическими координатами на поверхности \mathcal{X} , если

$$(4) \quad E(x) = G(x), \quad F(x) = 0$$

п.в. в D .

В случае, когда x_1, x_2 – изотермические координаты на поверхности \mathcal{X} , мы имеем

$$ds^2 = \lambda^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \text{где } \lambda^2(x) = E(x) = G(x).$$

Первое из условий (4) означает, что растяжения f вдоль линий $x_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$) совпадают в точках, где df существует. Второе условие влечет взаимную ортогональность образов этих линий в соответствующих точках $y = f(x)$. Так что, в каждой точке $x \in D$, где существует полный дифференциал df и одновременно выполняются соотношения (2) и (4), отображение $f : D \rightarrow \mathcal{X}$ конформно (сохраняет углы между кривыми).

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$ -мажорируемой функции.

Определение 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Будем говорить, что функция $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D , если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что

$$(5) \quad P(x) \leq K(x) \quad \text{для п.в. } x \in D.$$

Простейшие примеры $W^{1,2}$ -мажорируемых функций доставляют ограниченные функции. Пусть $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная ограниченная функция, определенная в области D конечной площади. Здесь мы можем положить $K = \text{ess sup}_{x \in D} P(x)$. Ясно, что $K \in W^{1,2}(D)$ и соотношение (5) выполнено п.в. в D .

Определение 3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. В случае когда функция $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой во всякой подобласти $D' \Subset D$ будем говорить, что функция P является $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в D .

$W^{1,2}$ -мажорируемость (см. [1, замечание §6]) означает, что равенство

$$\lim_{\xi \rightarrow x} P(\xi) = +\infty$$

может выполняться на очень редком множестве. Можно утверждать, например, что при любом $\alpha > 0$ его α -ёмкость равна нулю. Из этого в свою очередь вытекает, что линейная мера такого множества равна нулю.

Всюду далее будем использовать обозначения: $O = (0, 0)$, $\Xi = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $B(O, R)$ – открытый круг радиуса $R > 0$ в \mathbb{R}^2 с центром в начале координат O . Также мы будем использовать обозначение S_1 для стандартной единичной окружности $S_1(O, 1)$ в \mathbb{R}^2 с центром в O .

В работе [1] была установлена теорема о существовании и единственности изотермических координат на односвязной негладкой поверхности, которую приведём в следующей формулировке, необходимой для последующего применения.

Теорема 1. Пусть \mathcal{X} – двумерная поверхность, заданная вектор-функцией (1) над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию (2). Предположим, что функция P , определяемая соотношением

$$(6) \quad P(x) = \frac{E(x) + G(x)}{\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}},$$

является $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в области D .

Тогда существует гомеоморфизм $x = \Phi(\xi) : B(O, R) \rightarrow D$, где $R > 1$, $\Phi(\xi) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(B(O, R))$, вводящий на \mathcal{X} изотермические координаты ξ_1, ξ_2 .

Гомеоморфизм $x = \Phi(\xi)$ определяется единственным образом заданием пары точек $a, b \in D$ таких, что $a = \Phi(O)$, $b = \Phi(\Xi)$.

Целью настоящей работы является вопрос о справедливости аналогов теоремы 1 для поверхностей склеенных из нескольких кусков.

1.2. В дальнейшем поверхности $\mathcal{X} = (D, f)$, заданные над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, у которых отображение $f : D \rightarrow f(D)$ взаимно однозначно, дифференцируемо п.в. и выполняется условие (2), будем называть *элементарными*. Нами рассматриваются неэлементарные поверхности $\mathcal{X} = (D, f)$, без требования взаимной однозначности отображения D на $f(D)$ в целом, но при этом считается, что область D можно представить в виде конечного объединения $D = \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i$, где D_i – односвязные области, а замыкание берется относительно D . При этом требуется выполнение следующих условий (см. рис. 1):

- 1) $\text{int}(\bar{D}_i \cap \bar{D}_j) = \emptyset$ для всяких $i \neq j$;
- 2) $\partial' D_i \cap \partial' D_j = \bar{D}_i \cap \bar{D}_j$ – состоит из конечного числа локально спрямляемых дуг (здесь ∂' означает границу множества относительно D);
- 3) каждая поверхность $\mathcal{X}_i = (D_i, f)$ является элементарной, причём продолженное отображение $f : \bar{D}_i \rightarrow f(\bar{D}_i)$ также взаимно однозначно.

Замечание 1. Так как при доказательстве теоремы 1 в [1] используется только квадратичная форма (3), заданная в области D , и только по этой форме строится подходящее отображение $\Phi(\xi)$, то теорема остаётся верной и для случая неэлементарных поверхностей описанных выше.

2. УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ СКЛЕЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Мы будем предполагать, что поверхность $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ представляет собой склейку элементарных односвязных поверхностей $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, заданных гомеоморфизмами $f_i : G_i \rightarrow f_i(G_i) \subset \mathbb{R}^m$.

В общем случае под склейкой элементарных поверхностей $\mathcal{X}_1 = (G_1, f_1)$, $\mathcal{X}_2 = (G_2, f_2)$, ..., $\mathcal{X}_n = (G_n, f_n)$ понимается набор этих поверхностей, согласованных каким-либо способом. При этом склейка поверхностей, вообще говоря, может

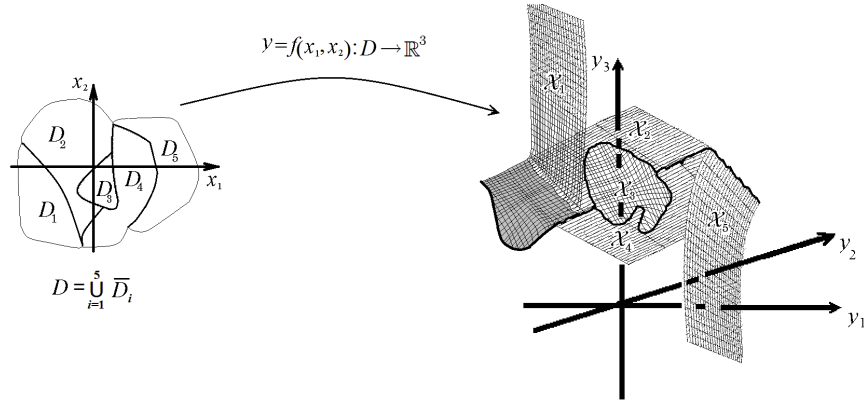


Рис. 1. На рисунке показан пример неэлементарной поверхности $\mathcal{X} = (D, f)$, удовлетворяющей условиям 1)–3). При этом две части \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 слипаются.

давать объект не обязательно являющийся поверхностью (см. пример 1 ниже). Нас, однако, такие "неправильные" ситуации интересовать не будут, а будут лишь *специальные* склейки дающие односвязную поверхность (рис. 2). По сути, речь далее будет идти об односвязных поверхностях для которых *изначально* не известна единая параметризация, но известны параметрические представления различных её кусков.

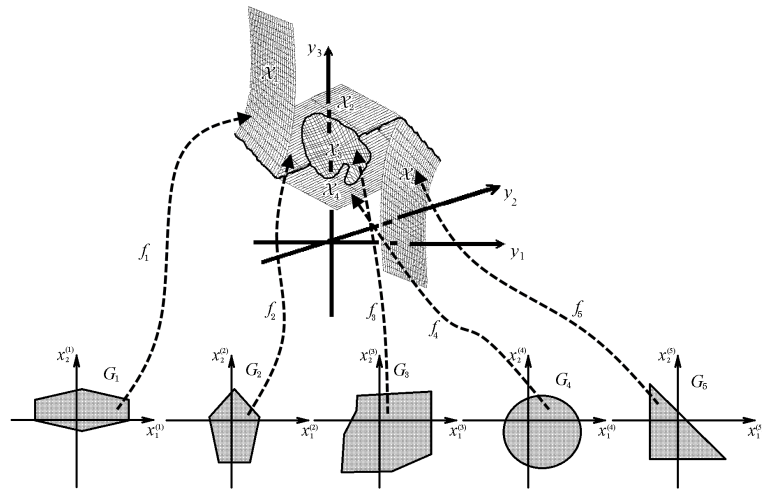


Рис. 2. На рисунке показана поверхность $\mathcal{X} = (D, f)$ склеенная из нескольких поверхностей.

Пример 1. ("Книга") Пусть G_i являются прямоугольниками

$$G_i = \{x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) : 0 < x_1^{(i)} < 1, 0 < x_2^{(i)} < 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим поверхности $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$ в \mathbb{R}^3 , заданные вектор-функциями

$$y = (y_1, y_2, y_3) = f_i(x^{(i)}) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, a_i x_2^{(i)}),$$

где $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Их склейка по сторонам $x_2^{(i)} = 0$ образует сложный книгоподобный объект (рис. 3), не являющийся поверхностью.

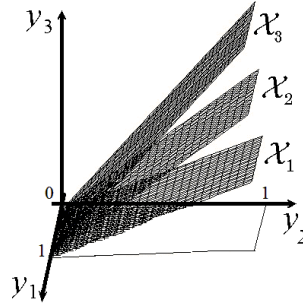


Рис. 3. Книгоподобный объект примера 1, склеенный из трех плоских кусков по общему отрезку $[0, 1]$.

Пример 2. ("Двойная поверхность") Пусть как и в предыдущем примере

$$G_i = \{x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) : 0 < x_1^{(i)} < 1, 0 < x_2^{(i)} < 1\}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим поверхности $\mathcal{X}_1 = (G_1, f_1)$, $\mathcal{X}_2 = (G_2, f_2)$ в \mathbb{R}^3 , заданные вектор-функциями $y = f_i(x^{(i)})$, где $y = (y_1, y_2, y_3)$, $f_i(x^{(i)}) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, 0)$. Их склейка по граничным интервалам $\{0 < x_1^{(i)} < 1, x_2^{(i)} = 0\}$ есть удвоенный прямоугольник $\{y_3 = 0, 0 < y_1 < 1, 0 \leq y_2 < 1\}$ с отождествленной стороной $y_2 = 0$.

Данную склейку можно параметризовать с помощью отображения

$$\tilde{f}(u_1, u_2) = (u_1, |u_2|, 0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

где $\Omega = \{u = (u_1, u_2) : 0 < u_1 < 1, -1 < u_2 < 1\}$. Она является неэлементарной поверхностью удовлетворяющей условиям 1) – 3) п. 1.2.

2.2. Как обычно, взаимно однозначные непрерывные образы в \mathbb{R}^2 промежутков вида (a, b) , $[a, b]$ будем называть, соответственно, *открытой и замкнутой жордановыми дугами*, а образы промежутков вида $(a, b]$, $[a, b)$ – *полуоткрытыми жордановыми дугами*. При этом, $a = -\infty$, $b = +\infty$ в случаях открытых и полуоткрытых дуг допускается. Гомеоморфный образ единичной окружности S_1 будем называть *замкнутой жордановой кривой*.

Склейки элементарных односвязных поверхностей, о которых будет идти речь, представляют собой последовательный результат склеек односвязных поверхностей. На каждом шаге склеивается уже построенная склейка и очередная элементарная поверхность из заданного набора. Причём результатом снова должна быть односвязная поверхность. Если $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ набор элементарных односвязных поверхностей занумерованный в порядке склейки, то для результата склейки будем использовать обозначение $\mathcal{X}_{1\dots n}$.

Более детально процедура последовательной склейки описана в следующих подпунктах 2.2.1, 2.2.2.

2.2.1. *Склейка двух элементарных поверхностей.* Пусть $\mathcal{X}_1 = (G_1, f_1)$ и $\mathcal{X}_2 = (G_2, f_2)$ – две элементарные односвязные поверхности в \mathbb{R}^m .

Мы будем говорить, что задана склейка \mathcal{X}_{12} этих поверхностей, если

1) заданы открытые жордановы дуги $\mathcal{C}_1 \subset \partial G_1$ и $\mathcal{C}_2 \subset \partial G_2$, причём отображения f_1 и f_2 продолжаются по непрерывности на них и эти продолжения $f_i : \mathcal{C}_i \rightarrow f_i(\mathcal{C}_i) \subset \mathbb{R}^m$ ($i = 1, 2$) суть гомеоморфизмы;

2) определено гомеоморфное отображение

$$(7) \quad x^{(2)} = \varphi_{12}(x^{(1)}) : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2,$$

т.ч.

$$f_1(x^{(1)}) = f_2(\varphi_{12}(x^{(1)})) \quad \text{для всякого } x^{(1)} \in \mathcal{C}_1.$$

Данное отображение согласуется с выбранными ориентациями в G_1 и G_2 так, что при обходе $x^{(1)}$ вдоль дуги \mathcal{C}_1 в положительном направлении, точка $x^{(2)} = \varphi_{12}(x^{(1)})$ будет двигаться в отрицательном направлении по дуге \mathcal{C}_2 .

Точки множеств $G_i \cup \Gamma_i$, ($i = 1, 2$), связанные гомеоморфизмом (7) отождествляются.

2.2.2. *Склейка произвольного конечного числа элементарных поверхностей.* Склеюку произвольного конечного числа элементарных поверхностей определим индуктивно. Предположим, для $n > 2$ определена склейка элементарных односвязных поверхностей $\mathcal{X}_{1\dots n}$, где $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пусть $\mathcal{X}_{n+1} = (G_{n+1}, f_{n+1})$ ещё одна элементарная поверхность. Будем говорить, что задана склейка $\mathcal{X}_{1\dots(n+1)}$, если выполнено следующее.

Может быть задана открытая жорданова дуга $\mathcal{C}_{n+1} \subset \partial G_{n+1}$ на которую отображение f_{n+1} продолжается по непрерывности, причём соответствие $f_{n+1} : \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow f_{n+1}(\mathcal{C}_{n+1}) \subset \mathbb{R}^m$ – гомеоморфно.

Обозначим через $a \in \overline{\mathbb{R}^2}$ – начало, а через $b \in \overline{\mathbb{R}^2}$ – конец дуги \mathcal{C}_{n+1} . Здесь $\overline{\mathbb{R}^2}$ – стандартная одноточечная компактификация \mathbb{R}^2 .

Рассмотрим отдельно два случая.

I. Существует единственная область G_i и открытая дуга $\mathcal{C}_{i,n+1}^0 \subset \partial G_i$, т.ч. отображение f_i продолжается по непрерывности на $\mathcal{C}_{i,n+1}^0$, причём соответствие $f_i : \mathcal{C}_{i,n+1}^0 \rightarrow f_i(\mathcal{C}_{i,n+1}^0) \subset \mathbb{R}^m$ гомеоморфно. Между $\mathcal{C}_{i,n+1}^0$ и \mathcal{C}_{n+1} определено гомеоморфное отображение

$$(8) \quad x^{(n+1)} = \varphi_{i,n+1}(x^{(i)}) : \mathcal{C}_{i,n+1}^0 \rightarrow \mathcal{C}_{n+1},$$

т.ч.

$$f_i(x^{(i)}) = f_{n+1}(\varphi_{i,n+1}(x^{(i)})) \quad \text{для всякого } x^{(i)} \in \mathcal{C}_{i,n+1}^0.$$

Отображение (8) согласуется с выбором ориентаций в G_i и G_{n+1} также как это описано в пп. 2.2.1 для (7).

II. Существует разбиение дуги \mathcal{C}_{n+1} точками $a_0 = a, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = b$, расположенными в порядке следования от $a_0 = a$ к $a_k = b$, на поддуги $\mathcal{C}_{n+1}^0, \mathcal{C}_{n+1}^1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}^{k-1}$ с парами концов $\{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{k-1}, a_k\}$, соответственно; при этом $\mathcal{C}_{n+1}^0, \mathcal{C}_{n+1}^{k-1}$ считаем полуоткрытыми, остальные \mathcal{C}_{n+1}^i – замкнутыми. В этом случае накладываем нижеследующие требования 1) – 3).

1) Для всякой дуги \mathcal{C}_{n+1}^i имеется единственная область G_s из набора $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ и единственная дуга $\mathcal{C}_{s,n+1}^i \subset \partial G_s$ на которую f_s продолжается по непрерывности.

2) Имеется гомеоморфизм

$$(9) \quad x^{(n+1)} = \varphi_{s,n+1}^i(x^{(i)}) : C_{s,n+1}^i \rightarrow C_{n+1}^i,$$

такой, что

$$(10) \quad f_i(x^{(i)}) = f_{n+1}(\varphi_{s,n+1}^i(x^{(i)}))$$

для всякой точки $x^{(i)} \in C_{s,n+1}^i$. Также как (7) и (8) гомеоморфизм (9) должен быть согласован с ориентациями областей G_s и G_{n+1} .

3) Для всякой точки a_i , может существовать непустой набор точек $\{c_r\}_{r \in N(n)}$, где $c_r \in \partial G_r$, $N(n) \subset \{1, 2, \dots, n\}$, со следующими свойствами а) и б).

- а) Каждая точка $c_p \in \{c_r\}_{r \in N(n)}$ является концом двух смежных дуг вида $C_{p,l}^t$ или C_p ($t, l, p \leq n$). Если \mathcal{J} – такая дуга, а $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \varphi(\mathcal{J}) \subset \partial G_j$ – какой-либо гомеоморфизм вида (7), (8) или (9), появившийся на предыдущих шагах склейки, то φ продолжается по непрерывности в точку c_p . При этом, либо $\varphi(c_p)$ входит в набор $\{c_r\}_{r \in N(n)}$, либо является точкой дуги $C_{j,n+1}^i$. Дуга $C_{j,n+1}^i$ связана тогда гомеоморфным соответствием (9) с одной из дуг C_{n+1}^{i-1} , C_{n+1}^i , причем $\varphi_{j,n+1}^i(\varphi(c_p)) = a_i$.
- б) Отображение f_p продолжается по непрерывности в c_p и $f_p(c_p) = f_{n+1}(a_i)$, но для любой другой граничной точки $c_* \in \partial G_p$ в которую f_p продолжается по непрерывности $f_p(c_*) \neq f_{n+1}(a_i)$.

О точках дуг C_{n+1} , $C_{s,n+1}^i$, а также точках $\{c_r\}_{r \in N(n)}$ будем говорить, что они участвуют в склейке $\mathcal{X}_{1\dots(n+1)}$ на n -м шаге.

Будем требовать, чтобы произвольная точка границы ∂G_r любой из областей на каком-либо шаге участвовала в склейке не более одного раза.

Описанный процесс склейки поверхностей можно проиллюстрировать рисунком 4.

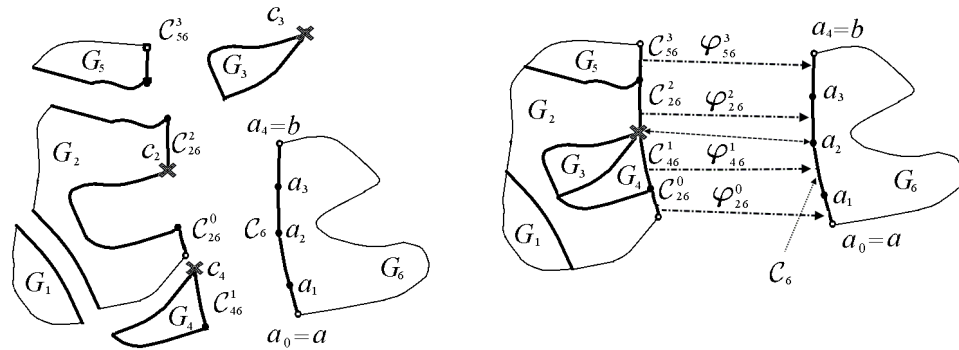


Рис. 4. Процесс склейки поверхности $\mathcal{X}_{1\dots n}$. Точки вида c_p соответствующие точке a_2 отмечены на рисунке крестиком.

Гомеоморфизмы (7), (8), (9) в дальнейшем будем называть *склеивающими*, а множества вида $C_{s,r}^i$, C_j , $\{c_r\}_{r \in N(n)}$ – множествами склейки. Точки множеств склейки, связанные склеивающими гомеоморфизмами, а также пары точек $c_p \leftrightarrow a_i$, описанные выше, отождествляются.

В дальнейшем множество всех точек ∂G_i участвующих в склейке будем обозначать через Γ_i . Через Γ_{ij} ($i \neq j$) будем обозначать подмножество точек Γ_i

склеиваемых с какими-либо точками Γ_j , тогда

$$\Gamma_i = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Gamma_{ij}.$$

Очевидно, что множества Γ_{ij} образуются из дуг вида $C_{s,r}^i, C_j$, и точек множеств $\{c_r\}_{r \in N(n)}$. Кроме того, заметим, что при выполнении перечисленных условий множества Γ_i будут образованы из конечного набора открытых дуг или из одной замкнутой жордановой кривой совпадающей с ∂G_i . Семейство гомеоморфизмов (7), (8), (9) и соответствий $c_p \leftrightarrow a_i$, описанных в требовании 3) ситуации II, определяет семейство гомеоморфизмов

$$(11) \quad \varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \rightarrow \Gamma_{ji}.$$

Их также как (7), (8), (9) будем называть *склеивающими граничными гомеоморфизмами*.

Отметим, что в случае $i = 1, j = 2$ выполнено $\Gamma_{12} = C_1, \Gamma_{21} = C_2$, а (11) в точности совпадает с (7).

2.3. Вместе с понятием склейки поверхностей введем понятие склейки набора областей (см., например, [11]).

Определение 4. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ будем называть *склейкой областей* $\{G_i\}$ в соответствии с заданными склеивающими граничными гомеоморфизмами (11), если существует набор гомеоморфизмов $\varphi_i : G_i \cup \Gamma_i \rightarrow \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i) \subset \mathbb{R}^2$, таких, что

- (1) $\varphi_i(x^{(i)}) = \varphi_j(\varphi_{ij}(x^{(i)}))$ для всякого $x^{(i)} \in \Gamma_{ij}$;
- (2) $\bigcup_{i=1}^n \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i) = G$;
- (3) $\varphi_i(G_i) \cap \varphi_j(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Гомеоморфизмы φ_i будем называть *осуществляющими склейку или просто склеивающими (без добавления "граничные")*.

Наличие склейки областей позволяет параметризовать склейку поверхностей $\mathcal{X}_{1\dots n}$, т.е. представить её с помощью вектор-функции $f(x) : G \rightarrow \mathbb{R}^m$. Эту вектор-функцию определим по правилу

$$f(x) = f_i(\varphi_i^{-1}(x)), \text{ если } x \in \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i).$$

Приведем один общий способ построения склейки областей $\{G_i\}$ соответствующий склейке $\mathcal{X}_{1\dots n}$.

Как и при склейке поверхностей, начнём со случая склейки двух областей G_1 и G_2 .

С помощью подходящих отображений преобразуем области G_1 и G_2 так, чтобы они оказались расположенными, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях пространства \mathbb{R}^2 , а Γ_{12} и Γ_{21} перешли в одинаковый промежуток $I = (\alpha, \beta)$ осей $x_1^{(i)}$. При построении данных отображений, будем руководствоваться тем, чтобы они гомеоморфно продолжались вплоть до Γ_1 и Γ_2 , переводя составляющие жордановы дуги этих множеств снова в жордановы дуги.

Тогда склеивающий гомеоморфизм (7) задаётся монотонно возрастающей функцией $x_1^{(2)} = h(x_1^{(1)}) : I \rightarrow I$, причём продолжаемой по непрерывности в точки α и β условием $h(\alpha) = \alpha, h(\beta) = \beta$. Случаи когда $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ не исключаются, причем, если это условие не выполняется, то продолжим

функцию $h(t)$ на всю ось t , полагая $h(t) = t$ вне промежутка I . Обозначим через G'_i , $i = 1, 2$, область G_i вместе с частью границы $\{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) : x_1^{(i)} \in I, x_2^{(i)} = 0\}$. Пара гомеоморфных отображений

$$\varphi_1(x^{(1)}) = (h(x_1^{(1)}), x_2^{(1)}) : G'_1 \rightarrow \varphi_1(G'_1) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_2(x^{(2)}) = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) : G'_2 \rightarrow \varphi_2(G'_2) \subset \mathbb{R}^2,$$

осуществляет нужную склейку областей. Обозначим получившуюся в результате такой склейки область через D_{12} .

Далее склейка областей $D_{1\dots n}$ строится индуктивно на основе описанной конструкции. Именно, после построения склейки D_{12} , как это описано выше, строится склейка D_{123} области D_{12} и области G_3 , затем D_{123} и G_4 и т.д.

При этом, на каждом шаге склейка $D_{1\dots k}$ и G_{k+1} осуществляется по открытой дуге $C_{k+1} \subset \partial G_{k+1}$. На границе $\partial D_{12\dots k}$ этой дуге будет отвечать связная открытая дуга. Это обеспечивается условиями описанными в п. 2.2 и контролем выбора возникающих на каждом шаге вспомогательных гомеоморфизмов, с помощью которых исходные области переводятся в области располагающиеся в верхней и нижней полуплоскостях, примыкающих к одинаковым промежуткам. Как и выше, эти гомеоморфизмы нужно выбирать так, чтобы они гомеоморфно продолжались вплоть до частей границы $\partial D_{1\dots k}$, которые будут участвовать в склейке на последующих шагах.

Точки и их координаты в области $D_{12\dots k}$ будем далее обозначать через $x^{(1\dots k)} = (x_1^{(1\dots k)}, x_2^{(1\dots k)})$. Описанную склейку областей можно представлять как показано на рис. 5.

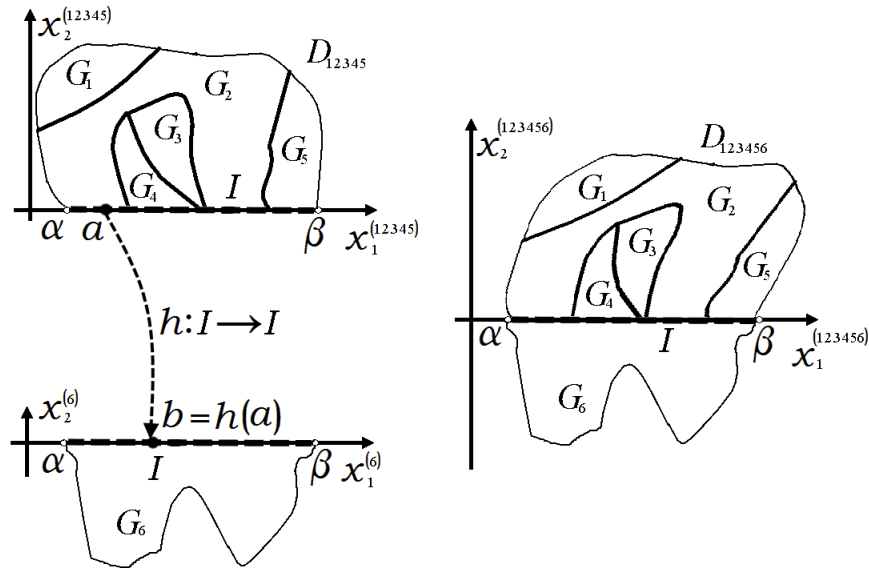


Рис. 5. В результате склейки областей $D_{12\dots 5}$ и G_6 по промежутку $I = (\alpha, \beta)$, с помощью отображения $h : I \rightarrow I$, получаем $D_{12\dots 6}$.

3. МЕТРИЧЕСКИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

3.1. Основной вопрос, который нас интересует, формулируется следующим образом: каким краевым и внутренним условиям должны удовлетворять поверхности (G_i, f_i) , чтобы на склейке $\mathcal{X}_{1\dots n} \subset \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, можно было определить изотермические координаты и эти координаты определялись единственным образом?

Напомним следующие хорошо известные определения и свойства.

Определение 5. Пусть D_1 и D_2 области в \mathbb{R}^2 . Отображение $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ называется квазиизометрическим (квазиизометрией) если для некоторой постоянной $K \geq 1$ выполняется следующее свойство:

$$\frac{1}{K}|x - y| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y| \quad \text{для любых } x, y \in D_1.$$

Определение 6. Открытая дуга (замкнутая кривая) $C \subset \mathbb{R}^2$ с концами в бесконечно удаленной точке называется квазипрямой (квазиокружностью), если она квазиконформно эквивалентна прямой (окружности), т.е. существует квазиконформный гомеоморфизм

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

т.ч. $\varphi(C)$ есть прямая (окружность).

Свойство дуги (замкнутой кривой) быть квазипрямой (квазиокружностью) однозначно характеризуется условием Альфорса (см. [10]): для любых трёх точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in C$, таких, что ζ_3 лежит между ζ_1 и ζ_2 выполняется неравенство

$$(12) \quad \frac{|\zeta_3 - \zeta_1|}{|\zeta_2 - \zeta_1|} \leq K$$

с некоторой постоянной K . При этом, в случае замкнутой кривой имеется ввиду тот из участков C с концами ζ_1 и ζ_2 , который имеет меньший диаметр.

Определение 7. Если $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область ограниченная квазиокружностью, то такая область называется квазидиском.

Если D – квазидиск или односвязная область, граница которой представляет собой квазипрямую, то известно, что для любой функции $f(x) \in L^1_2(D)$ существует её продолжение на \mathbb{R}^2 , такое, что продолжение $f(x) \in L^1_2(\mathbb{R}^2)$. Данный факт составляет содержание известного результата С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна, Т.Г. Латфуллина [12] (см. также [14]).

Лемма 1. Пусть $S_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^2 : |\omega| = 1\}$ – единичная окружность и $\varrho(\omega) : S_1 \rightarrow [0, +\infty)$ – липшицева функция. Тогда отображение $\varphi(x) = \varrho(\omega_x)x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\omega_x = \frac{x}{|x|}$, липшицево.

Доказательство. Пусть $K_1 > 0$ – константа из условия липшицевости $\varrho(\omega)$, т.е. такая, что $|\varrho(\omega_1) - \varrho(\omega_2)| \leq K_1|\omega_1 - \omega_2|$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in S_1$, и $K_2 = \max_{\omega \in S_1} \varrho(\omega) > 0$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^2$ лежат внутри сектора раствора $\frac{\pi}{3}$ и θ – угол между ними как радиус-векторами с центром в начале координат O , а $\omega_x = \frac{x}{|x|}$, $\omega_y = \frac{y}{|y|}$.

Предположим для определённости, $|x| \leq |y|$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varrho(\omega_x)x - \varrho(\omega_y)y| = |\varrho(\omega_x)x - \varrho(\omega_x)y + \varrho(\omega_x)y - \varrho(\omega_y)y| \leq \\ &\leq |\varrho(\omega_x)x - \varrho(\omega_x)y| + |\varrho(\omega_x)y - \varrho(\omega_y)y| = \varrho(\omega_x)|x - y| + |y||\varrho(\omega_x) - \varrho(\omega_y)| \leq \\ (13) \quad &\leq K_2|x - y| + K_1|y||\omega_x - \omega_y| = K_2|x - y| + K_1|y|\omega_x - y|. \end{aligned}$$

Вектор $x^y = |y|\omega_x$ сонаправлен с вектором x и равен по модулю вектору y : $|x^y| = |y|$. Пусть x_0^y — основание высоты опущенной из точки y на прямую с направляющим вектором x . Тогда $|x_0^y - y|$ кратчайшее расстояние от y до данной прямой и мы имеем $|x_0^y - y| \leq |x - y|$. Из равнобедренного треугольника с вершинами O , x^y , y находим

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{|x_0^y - y|}{|x^y - y|}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |x^y - y| &= \frac{|x_0^y - y|}{\cos \frac{\theta}{2}} \leq \frac{|x - y|}{\cos \frac{\theta}{2}} \leq \\ &\leq \frac{|x - y|}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}|x - y|. \end{aligned}$$

Поэтому из (13) получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq (K_2 + K_1 \frac{2}{\sqrt{3}})|x - y|.$$

Аналогично это же неравенство устанавливается в случае $|y| \leq |x|$ с той же константой липшицевости $K = K_2 + K_1 \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим теперь случай, когда точки x , y не лежат в одном секторе относительно O с раствором угла не более $\frac{\pi}{3}$.

Предположим, что прямая соединяющая x и y не проходит через O . Разобьём плоскость на 6 секторов с вершиной O и растворами углов $\frac{\pi}{3}$, лучами записываемыми в полярных координатах (r, ϑ) в виде $\vartheta = \frac{\pi}{3}k$, $k = 0, 1, \dots, 5$. Тогда отрезок соединяющий точки x и y пересечёт некоторые из лучей $\vartheta = \frac{\pi}{3}k$ в некоторых точках x_1, x_2, \dots, x_n , где $n < 4$. Будем считать, что нумерация этих точек соответствует их расположению в порядке следования от x к y . Тогда, воспользовавшись уже доказанным, получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varphi(x) - \varphi(x_1) + \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n) - \varphi(y)| \leq \\ &|\varphi(x) - \varphi(x_1)| + |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + \dots + |\varphi(x_n) - \varphi(y)| \leq \\ &\leq K(|x - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_n - y|) = K|x - y|. \end{aligned}$$

Если прямая соединяющая точки x и y проходит через O , то $\omega_x = -\omega_y$ и

$$|x - y| = ||x|\omega_x - |y|\omega_y| = ||x|\omega_x + |y|\omega_x| = |x| + |y|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varrho(\omega_x)x - \varrho(\omega_y)y| = |\varrho(\omega_x)|x|\omega_x + \varrho(\omega_y)|y|\omega_x| = \\ &= \varrho(\omega_x)|x| + \varrho(\omega_y)|y| \leq K_2(|x| + |y|) = K_2|x - y| \leq K|x - y|, \end{aligned}$$

где постоянная K та же, что и выше.

Лемма доказана. \square

Следствие 1. Если в условиях леммы $\min_{S_1} \varrho(\omega) > 0$, то $\varphi(x) = \varrho(\omega_x)x -$ квазиизометрия.

Доказательство. Обратное к $y = \varphi(x)$ отображение имеет вид $\psi(y) = \frac{1}{\varrho(\omega_y)}y$, где $\omega_y = \omega_x$. Легко проверяется, что в силу $\min_{S_1} \varrho(\omega) > 0$ функция $\varrho_1(\omega) = \frac{1}{\varrho(\omega)}$ липшицева, а значит $\psi(y)$ также липшицево отображение. Отсюда следует, что отображение $\varphi(x)$ – билипшицево, а значит является квазиизометрией. \square

Следствие 2. Любая ограниченная область D звёздная относительно некоторого круга $B \subset D$ может быть преобразована в круг с помощью подходящей целой квазиизометрии.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $O \in B$ – центр B . Тогда в силу известных свойств [13, р.14] граница ∂D может быть параметризована с помощью подходящей липшицевой функции $\varrho(\omega) : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. задана в виде $x = \varrho(\omega)\omega : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Причём в силу звёздности $\min_{S_1} \varrho(\omega) > 0$. Тогда отображение $x = \varrho(\omega_y)\omega$ есть квазиизометрия \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^2 осуществляющая отображение единичного круга ограниченного S_1 на область D . \square

В частности, из последнего следствия можно заключить, что любую ограниченную выпуклую фигуру можно с помощью подходящей целой квазиизометрии перевести в любую другую ограниченную выпуклую фигуру. При этом несложно показать, что всегда такую квазиизометрию можно подобрать так, чтобы она переводила произвольную наперед заданную замкнутую дугу¹ на границе первой фигуры в произвольную наперед заданную замкнутую дугу второй фигуры.

Лемма 2. Пусть имеется поверхность $\mathcal{X} = (D, f)$ в \mathbb{R}^m , заданная над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывной, п.в. дифференцируемой вектор-функцией $y = f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой п.в. выполнено (2). Предположим

$$(14) \quad x = \varphi(u) : G \rightarrow D, \quad u = (u_1, u_2),$$

квазиконформное отображение и $g(u) = f(\varphi(u)) : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ – эквивалентное представление поверхности \mathcal{X} , вводящее на ней новые координаты u_1, u_2 . Рассмотрим величины $P(x)$ и $\tilde{P}(u)$ определённые в координатах $x = (x_1, x_2)$ и $u = (u_1, u_2)$ по формуле (6). Тогда для некоторой постоянной $Q > 0$ для п.в. $u \in G$ выполнено неравенство

$$(15) \quad \tilde{P}(u) \leq QP(\varphi(u)).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$, тогда условие квазиконформности этого отображения может быть записано в виде

$$|\nabla\varphi_1(u)|^2 + |\nabla\varphi_2(u)|^2 \leq QJ,$$

где $Q > 0$ – некоторая постоянная, а $J = \varphi_{1u_1}\varphi_{2u_2} - \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_1}$ – якобиан отображения (14). Пусть $E = E(x), F = F(x), G = G(x)$ коэффициенты первой квадратичной формы \mathcal{X} в координатах $x = (x_1, x_2)$, а $\tilde{E} = \tilde{E}(u), \tilde{F} = \tilde{F}(u)$,

¹Но не замкнутую кривую!

$\tilde{G} = \tilde{G}(u)$ – в координатах $u = (u_1, u_2)$. Между собой эти величины п.в. связаны формулами

$$(16) \quad \tilde{E} = E(\varphi_{1u_1})^2 + 2F\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_1} + G(\varphi_{2u_1})^2,$$

$$(17) \quad \tilde{F} = E\varphi_{1u_1}\varphi_{1u_2} + F(\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_2} + \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_1}) + G\varphi_{2u_1}\varphi_{2u_2},$$

$$(18) \quad \tilde{G} = E(\varphi_{1u_2})^2 + 2F\varphi_{1u_2}\varphi_{2u_2} + G(\varphi_{2u_2})^2.$$

Здесь в правой части и всюду ниже $E = E(x)$, $F = F(x)$, $G = G(x)$ вычисляются при $x = \varphi(u)$. В силу известного неравенства для положительно определённых квадратичных форм

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \leq \Lambda(\xi^2 + \eta^2),$$

где $\Lambda = a_{11} + a_{22} \geq 0$ – след квадратичной формы $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$, имеем

$$(19) \quad \begin{aligned} \tilde{E} + \tilde{G} &= E\left((\varphi_{1u_1})^2 + (\varphi_{1u_2})^2\right) + 2F\left(\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_1} + \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_2}\right) + \\ &G\left((\varphi_{2u_1})^2 + (\varphi_{2u_2})^2\right) \leq (E + G)(|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_2|^2) \leq \\ &\leq QJ(E + G). \end{aligned}$$

Кроме того, из (16) – (18), п.в. следует соотношение

$$(20) \quad \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = J^2(EG - F^2).$$

Сопоставляя (19), (20) с выражением (6) для вычисления величин $P(x)$, $\tilde{P}(u)$, получаем (15). Лемма доказана. \square

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

4.1. Для учёта поведения поверхности $\mathcal{X}_{1\dots n}$ вблизи мест склеек нам необходимо дать несколько определений.

Определение 8. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $C \subset \partial D$ – множество составленное из набора непересекающихся открытых дуг. Пусть $F \subset D$ подмножество. Будем говорить, что F компактно примыкает к C , если $\overline{F} \cap \partial D \in C$. Здесь \overline{F} замыкание F в \mathbb{R}^2 , а отношение " \in " берется в смысле топологии S .

Будем факт компактного примыкания для краткости записывать в виде " $F \in C|D$ ".

Определение 9. Пусть D – область в \mathbb{R}^2 , граница которой ∂D содержит множество Γ , представляющее собой некоторую совокупность непересекающихся открытых дуг. Будем говорить, что функция $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ является $W_{\text{loc}, \Gamma}^{1,2}$ -мажорируемой, если для всякой подобласти $D' \subset D$ предкомпактной в \mathbb{R}^2 и такой, что или $D' \in D$, или $D' \in \Gamma|D$, найдется функция $K \in W^{1,2}(D')$ такая, что

$$(21) \quad P(x) \leq K(x) \quad \text{для п.в. } x \in D.$$

Определение 10. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, граница ∂D которой содержит дугу γ являющуюся частью некоторой квазипрямой Γ . Если D целиком лежит в одной из компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то будем называть γ , Γ внешне расположенными по отношению к D .

Лемма 3. *Предположим $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и открытая дуга $\gamma \subset \partial D$ есть часть квазипрямой внешне расположенной по отношению к D . Пусть $A, B \in \gamma$, ($A \neq B$) – две произвольные точки и $\gamma_{A,B}$ – часть γ , соединяющая A и B . Предположим также, что задано ограниченное множество $F \subset D$, такое, что выполнено одно из двух: или $F \Subset D$, или $F \Subset \gamma_{A,B}|D$. Тогда дугу $\gamma_{A,B}$ можно дополнить до квазиокружности C , подходящей дугой целиком лежащей в D и охватывающей F .*

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – квазиконформное отображение переводящее D в область $\varphi(D)$, лежащую в верхней полуплоскости $\{y : y_2 > 0\}$, а дугу γ в интервал на оси Oy_1 . Пусть $I = \varphi(\gamma)$ – этот интервал, $a = \varphi(A)$, $b = \varphi(B)$ и пусть $F_1 = \varphi(F)$. Дополним отрезок $[a, b]$ до замкнутой ломанной \tilde{C} с конечным числом звеньев, охватывающей F_1 и целиком расположенной в $\varphi(D)$. При построении этой ломанной будем руководствоваться тем, чтобы углы между двумя соседними звеньями не равнялись $0, \pi$. Ясно, что для такой замкнутой ломанной будет выполнено условие Альфорса (12), а значит она и её прообраз $C = \varphi^{-1}(\tilde{C})$ будут квазиокружностями. Лемма доказана. \square

Лемма 4. *Пусть в \mathbb{R}^2 имеется набор односвязных областей $\{G_i\}_{i=1}^n$. Предположим, что каждая G_i есть либо квазидиск с границей $\Gamma_i = \partial G_i$, либо граница ∂G_i содержит множество $\Gamma_i = \bigsqcup_{s=1}^{s_i} \gamma_i^s$, где γ_i^s открытые дуги, непесекающиеся между собой, каждая из которых является частью некоторой квазипрямой внешне расположенной по отношению к G_i .*

Предположим, что существует набор квазиконформных гомеоморфизмов $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такой что множество $G = \bigcup_i \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i)$ есть область и $\varphi_i(G_i) \cap \varphi_j(G_j) = \emptyset$ ($i \neq j$).

Тогда, если имеется набор функций $P_i(x^{(i)})$, $W_{\text{loc}, \Gamma_i}^{1,2}$ -мажорируемых в G_i , то функция

$$P(x) = P_i(\varphi_i^{-1}(x)), \text{ если } x \in \varphi(G_i),$$

будет $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в G .

Доказательство. Зададим произвольную область $F \Subset G$. Положим

$$\tilde{F}_i = \varphi_i^{-1}(F \cap \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i)).$$

Тогда $\tilde{F}_i \Subset \Gamma_i|G_i$ и \tilde{F}_i можно представить в виде $\tilde{F}_i = \bigcup_{s=1}^{s_i} \tilde{F}_i^s$, так, чтобы условие $\tilde{F}_i^s \cap \gamma_i^r \neq \emptyset$ могло выполняться разве лишь при $r = s$. Случай $\tilde{F}_i^s \cap \gamma_i^s = \emptyset$ является допустимым. Иначе говоря или $\tilde{F}_i^s \Subset \gamma_i^r|G_i$ только при $r = s$, или $\tilde{F}_i^s \Subset G_i$.

По предыдущей лемме для каждого \tilde{F}_i^s построим квазидиск $D_i^s \subset G_i$ с одной из граничных дуг γ_i^s и дугой $\tilde{\gamma}_i^s \subset G_i$. Тогда существует функция $K_i^s(x^{(i)}) \in W^{1,2}(D_i^s)$ мажорирующая $P_i(x^{(i)})$ в D_i^s . Так как, квазиконформные отображения сохраняют свойство принадлежности к функциональному классу $L^{1,2}$, то $K_i^s(\varphi_i^{-1}(x)) \in L^{1,2}(\varphi_i(D_i^s))$. С другой стороны $\varphi_i(D_i^s)$ является квазидиском, а значит функции $K_i^s(\varphi_i^{-1}(x))$ продолжаются на \mathbb{R}^2 . Сохраняя для этих продолжений те же самые обозначения, определим в G функцию

$$K(x) = \max_{i,s} K_i^s(\varphi_i^{-1}(x)) \in L^{1,2}(G)$$

мажорирующую $P(x)$ на F . Лемма доказана. \square

Лемма 4 приводит к следующему результату.

Теорема 2. Пусть определена склейка $\mathcal{X}_{1\dots n}$, где $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, для которой $\Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – соответствующие множества склейки, а $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \rightarrow \Gamma_{ji}$ – склеивающие граничные гомеоморфизмы.

Предположим, что: 1) все компоненты связности Γ_i являются дугами квазипрямых внешне расположенных по отношению к G_i ; 2) имеется набор квазиконформных гомеоморфизмов $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, склеивающих области $\{G_i\}_{i=1}^n$; 3) каждая функция

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W_{\text{loc}, \Gamma_i}^{1,2}$ -мажорируема в G_i .

Тогда на поверхности $\mathcal{X}_{1\dots n}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$, определяемые единственным образом выбором соответствия: $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. Здесь $a \in G_{i_0} \cup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \cup \Gamma_{j_0}$ – некоторые фиксированные точки, при этом, либо $i_0 = j_0$ и $a \neq b$, либо $i_0 \neq j_0$ и $b \neq \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i)$ – область переменной $x = (x_1, x_2)$. Так как задана склейка областей $\varphi_i(x^{(i)})$, то склейку $\mathcal{X}_{1\dots n}$ можно задать вектор-функцией

$$(22) \quad y = f(x) : G \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

где $f(x) = f_i(x^{(i)})$, и $x = \varphi_i(x^{(i)})$, $x^{(i)} \in G_i \cup \Gamma_i$.

В силу леммы 2 для подходящих $Q_i \geq 1$ справедливы неравенства

$$(23) \quad P(x) \leq Q_i P_i(\varphi_i^{-1}(x))$$

для п.в. $x \in \varphi_i^{-1}(G_i)$, где P, P_i определены в соответствии с формулой (6). Так как по условию теоремы $P_i(x^{(i)})$ $W_{\text{loc}, \Gamma_i}^{1,2}$ -мажорируема в G_i , то тогда в силу леммы 4 заключаем о $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемости функции $P(x)$ в G , а значит, в силу теоремы 1, приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана. \square

Определение 11. Пусть определена склейка $\mathcal{X}_{1\dots n}$, где $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, ($i = 1, \dots, n$). Пусть $\Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \partial G_i$, $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \rightarrow \Gamma_{ji}$ – соответствующие множества склейки и склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что для $\Gamma_i, \Gamma_{ij}, \varphi_{ij}$ определена склейка областей $\{G_i\}_{i=1}^n$, осуществляемая набором квазиконформных гомеоморфизмов $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что отображения $\widehat{\varphi}_{ij} : h_i(\Gamma_{ij}) \rightarrow h_j(\Gamma_{ji})$ делающие диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{ij} & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \Gamma_{ji} \\ h_i \downarrow & & h_j \downarrow \\ h_i(\Gamma_{ij}) & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{ij}} & h_j(\Gamma_{ji}) \end{array}$$

коммутативной, являются квазиизометриями. Такую склейку областей будем называть специальной квазиконформной склейкой.

Справедлива теорема.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{X}_{1\dots n}$ – склейка поверхностей $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, ($i = 1, \dots, n$), причём всякая область из набора $\{G_i\}_{i=1}^n$ является квазидиском. Пусть Γ_i , $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – соответствующие множества склейки, а $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \rightarrow \Gamma_{ji}$ – соответствующие склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что каждая функция

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W_{\text{loc}, \Gamma_i}^{1,2}$ – мажорируема в G_i .

Если для Γ_i , Γ_{ij} , φ_{ij} определена специальная квазиконформная склейка областей $\{G_i\}_{i=1}^n$, то на поверхности $\mathcal{X}_{1\dots n}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$, определяемые единственным образом выбором соответствия: $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. Здесь $a \in G_{i_0} \cup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \cup \Gamma_{j_0}$ – некоторые фиксированные точки, при этом, либо $i_0 = j_0$ и $a \neq b$, либо $i_0 \neq j_0$ и $b \neq \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Доказательство. Заменяем поверхности \mathcal{X}_i эквивалентными поверхностями $\mathcal{Y}_i = (H_i, \tilde{f}_i)$, с помощью квазиконформных преобразований $\psi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемых следующим образом.

Пусть $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – специальные склеивающие гомеоморфизмы из условия теоремы.

Рассмотрим последовательность открытых граничных дуг $C_1, C_2, \dots, C_n, C_i \subset \partial G_i$, которые были определены в пп. 2.2.1, 2.2.2 при введении склейки $\mathcal{X}_{1\dots n}$.

По следствию 2 леммы 1, существуют квазиизометрии $q_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, переводящие диски $h_i(G_i)$ в прямоугольники

$$H_1 = \{(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) : 0 < u_1^{(1)} < 1, -1 < u_2^{(1)} < 0\},$$

$$H_i = \{(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) : 0 < u_1^{(i)} < 1, 0 < u_2^{(i)} < 1\} \text{ при } i > 1.$$

Данные квазиизометрии q_i выберем такими, чтобы C_i переходили в стороны этих прямоугольников

$$\tilde{C}_i = \{(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) : 0 < u_1^{(i)} < 1, u_2^{(i)} = 0\}.$$

Положим $\psi_i(x^{(i)}) = q_i(h_i(x^{(i)}))$.

Далее склейку $\mathcal{X}_{1\dots n}$ можно заменить склейкой $\mathcal{Y}_{1\dots n}$ эквивалентных поверхностей $\mathcal{Y}_i = (H_i, \tilde{f}_i)$, где

$$(24) \quad \tilde{f}_i(u^{(i)}) = f_i(\psi_i^{-1}(u^{(i)})) : H_i \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

При такой замене граничным множествам Γ_i , Γ_{ij} , $C_{s,l}^i$ будут соответствовать новые множества $\tilde{\Gamma}_i = \psi_i(\Gamma_i)$, $\tilde{\Gamma}_{ij} = \psi_i(\Gamma_{ij})$, $\tilde{C}_{s,l}^i = \psi_i(C_{s,l}^i)$ и т.п. Кроме того, склеивающим граничным гомеоморфизмам $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \rightarrow \Gamma_{ji}$ будут соответствовать склеивающие граничные гомеоморфизмы

$$\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{\Gamma}_{ij} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{ji},$$

определенные как $\tilde{\varphi}_{ij} = \psi_j(\varphi_{ij}(\psi_j^{-1}))$ и являющиеся, очевидно, квазиизометриями.

Далее будем последовательно строить склейки $H_{12}, H_{123}, \dots, H_{12\dots n}$ областей H_1, H_2, \dots, H_n , как это было описано в п. 2.3, но выбирая склеивающие отображения специальным образом.

Склею H_{12} построим следующим образом. Рассмотрим граничный склеивающий гомеоморфизм

$$\tilde{\varphi}_{21} : \tilde{\mathcal{C}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_1,$$

Ясно, что $\tilde{\mathcal{C}}_1 = \tilde{\Gamma}_{12}$, $\tilde{\mathcal{C}}_2 = \tilde{\Gamma}_{21}$. Этот гомеоморфизм определяет билипшицев гомеоморфизм $\hat{\varphi}_{21}(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, причём такой, что $\hat{\varphi}_{21}(0) = 0$, $\hat{\varphi}_{21}(1) = 1$. Продолжим $\hat{\varphi}_{21}(t)$ на всю числовую прямую, полагая $\hat{\varphi}_{21}(t) = t$ вне $[0, 1]$ и определим целые квазиизометрические отображения $g_i^{12}(u^i) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ посредством равенств

$$\begin{aligned} g_1^{12}(u^{(1)}) &= (\hat{\varphi}_{21}(u_1^{(1)}), u_2^{(1)}), \\ g_2^{12}(u^{(2)}) &= u^{(2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим пару отображений из пространств \mathbb{R}^2 переменных $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ в пространство \mathbb{R}^2 переменной $u^{(12)} = (u_1^{(12)}, u_2^{(12)})$, задаваемых равенствами

$$(25) \quad u^{(12)} = g_1^{12}(u^{(1)}),$$

$$(26) \quad u^{(12)} = g_2^{12}(u^{(2)}).$$

Пара отображений (25), (26) осуществляет склейку прямоугольников H_1 плоскости переменной $u^{(1)}$ и H_2 плоскости переменной $u^{(2)}$ по их сторонам

$$\{(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) : 0 < u_1^{(i)} < 1, u_2^{(i)} = 0\}, \quad (i = 1, 2),$$

и с заданным граничным гомеоморфизмом $\tilde{\varphi}_{21}$, образуя в плоскости переменной $u^{(12)}$ прямоугольник

$$H_{12} = \{(u_1^{(12)}, u_2^{(12)}) : 0 < u_1^{(12)} < 1, -1 < u_2^{(12)} < 1\}.$$

Склею H_{123} получим, склеивая прямоугольники H_{12} и H_3 следующим образом.

Прямоугольник H_3 будем склеивать по стороне $\tilde{\mathcal{C}}_3$. Прямоугольник H_{12} будем склеивать по граничному множеству $\mathcal{L}_{12} \subset \partial H_{12}$, которое соответствует множествам в ∂G_1 и ∂G_2 склеиваемым с точками \mathcal{C}_3 на втором шаге склейки $\mathcal{X}_{1\dots n}$ описанном в пп. 2.2.2. Так как $\tilde{\mathcal{C}}_3$ есть связанное множество, то и соответствующее ему множество \mathcal{L}_{12} связано. Так как при получении склейки H_{12} использовались лишь целые квазиизометрии, то возникающий соответственным образом склеивающий граничный гомеоморфизм между \mathcal{L}_{12} и H_3 также будет квазиизометрией.

Далее, снова в силу следствия 2 леммы 1, можно преобразовать с помощью подходящей целой квазиизометрии прямоугольник H_{12} в прямоугольник вида $(0, 1) \times (0, 1)$, так, чтобы \mathcal{L}_{12} перешло в нижнюю сторону этого прямоугольника. Пусть \hat{H}_{12} – этот новый прямоугольник, расположен в пространстве \mathbb{R}^2 переменной $\hat{u}^{(12)}$.

Также как склеивались прямоугольники H_1 и H_2 с помощью подходящей целой квазиизометрии, склеим \hat{H}_{12} и H_3 , получая новый прямоугольник H_{123} вида $(0, 1) \times (-1, 1)$, расположенный в пространстве \mathbb{R}^2 переменной $u^{(123)} = (u_1^{(123)}, u_2^{(123)})$.

Так как эта склейка является склейкой областей H_1 , H_2 , H_3 , то возникает набор склеивающих гомеоморфизмов

$$g_i^{123}(u^{(i)}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

являющихся квазиизометриями и склеивающих этот набор областей в H_{123} .

Продолжая аналогичный процесс, приходим к склейке $H_{12\dots n}$, расположенной в плоскости \mathbb{R}^2 переменной $u^{(12\dots n)} = (u_1^{(12\dots n)}, u_2^{(12\dots n)})$, осуществляемых набором целых квазиизометрий

$$u^{(12\dots n)} = g_i^{12\dots n}(u^{(i)}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим склейку областей $\{G_i\}$ осуществляемых целыми квазиконформными гомеоморфизмами

$$(27) \quad \varphi_i(x^{(i)}) = g_i^{12\dots n}(\psi_i(x^{(i)})).$$

Эти гомеоморфизмы склеивают $\{G_i\}$ в $H_{12\dots n}$. Наличие такого набора гомеоморфизмов позволяет применить теорему 2. Теорема 3 доказана. \square

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новейшие исследования классической задачи о существовании изотермических координат на двумерной поверхности в \mathbb{R}^m , только на современном этапе негладких или имеющих разного рода патологию в строении, была инициирована в [1, 2, 3]. Интерес к изотермическим координатам на негладких поверхностях вполне объективен ввиду перспектив практического применения в вычислительных задачах, поскольку именно в таких координатах во многих случаях удобно производить построение расчётных сеток. С другой стороны, как отмечалось в предисловии к монографии [4]: "Это просто удивительно, что при наличии наикрасивейшей и богатейшей теории конформных отображений плоских областей соответствующая теория конформных отображений поверхностей вплоть до настоящего времени так и не представлена связным изложением."

Мы надеемся, что представленное в настоящей работе исследование будет способствовать построению такой теории. Также мы надеемся, что наша работа будет способствовать решению аналогичных задач в псевдоевклидовых пространствах, где вырождение метрики (3) может быть обусловлено не только негладкостью поверхности, но и наличием изотропных направлений объёмного пространства. Такие исследования планируется провести на основе комбинации методов настоящей работы и методов исследования уравнений Бельтрами переменного типа имеющих в [15, 16, 17, 18].

Автор выражает глубокую благодарность участникам семинара "Геометрический анализ и вычислительная геометрия" ИМИТ ВолГУ за полезные замечания и рекомендации.

REFERENCES

- [1] V.M. Miklyukov, *Isothermic coordinates on singular surfaces*, Mat. Sb. **195**:1 (2004), 69–88. translation in Sb. Math. **195**:1–2 (2004), 65–83. Zbl 1081.53057
- [2] V.M. Miklyukov, *Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications*, Exlibris Corporation, 2008.
- [3] V.M. Miklyukov, *Function Weighted Sobolev Classes, Anisotropic Metric and Degenerate Quasi-Conformal Mappings*, Volgograd: VolSU, 2010.
- [4] C. Carathéodory, *Conformal representation*, London: Cambridge Univ. Press, 1932. Zbl 0005.16801
- [5] Yu.G. Reshetnyak, *Two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Itogi Nauki i Tekhniki: Sovrem. Probl. Mat., Fund. Naprav., **70**, VINITI, Moscow, 1989. English transl. in Encyclopaedia Math. Sci., **70** [Geometry IV], Springer-Verlag, Berlin, 1993. Zbl 0781.53050

- [6] T. Toro, *Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds*, J. Differential Geom., **39**:1 (1994), 65–101. Zbl 0806.53020
- [7] S. Müller and V. Sverák, *On surfaces of finite total curvature*, J. Differential Geom., **42**:2 (1995), 229–258. Zbl 0853.53003
- [8] I.M. Grudskii, *Construction of inner coordinates on composite Riemann surfaces*, Differential, integral equations, and complex analysis, Kalmykia University, Élista, 1986, 30–45. (Russian)
- [9] I.M. Grudskii, *The Christoffel–Schwarz formula for polyhedral surfaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **307** (1989), 15–17.
English transl. in Soviet Math. Dokl. **40** (1990).
- [10] L.V. Ahlfors *Lectures on quasiconformal mappings*, Manuscript prepared with the assistance of Clifford J. Earle, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, **10**, Toronto, Ont.–New York–London: D. Van Nostrand Co., Inc., 1966. Zbl 0138.06002
- [11] L.I. Volkovskii *Investigation of the type problem for a simply connected Riemann surface*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **34** (1950). (Russian)
- [12] S.K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein and T. G. Latfullin, *Criteria for extension of functions of the class L_2^1 from unbounded plane domains*, Sib. Mat. Zh. **20** (1979), 416–419 (Russian). English translation: Siberian Math. J. **20** (1979), 298–301. Zbl 0436.30013
- [13] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces. With Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **342** (2nd revised and augmented ed.), Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 2011. Zbl 1217.46002
- [14] V.G. Maz'ya and S.V. Poborchii, *Embedding theorems and continuation of functions in non-Lipschitz domains*, St. Petersburg: St. Petersburg State Univ, 2006.
- [15] A.N. Kondrashov, *On the theory of degenerate alternating Beltrami equations*, Sibirsk. Mat. Zh., **53**:6 (2012), 1321–1337. Zbl 1279.30033
- [16] A.N. Kondrashov, *On the theory of alternating beltrami equation with many folds*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **19**:2 (2013), 26–35.
- [17] A.N. Kondrashov, *Beltrami equations with degenerate on arcs*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **24**:5 (2014), 24–39.
- [18] A.N. Kondrashov, *Alternating Beltrami equation and conformal multifolds*, Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, **30**:5 (2015), 6–24.

ALEXANDER NIKOLAEVICH KONDRASHOV
 VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY,
 UNIVERSITY PROSPECT, 100
 400062, VOLGOGRAD, RUSSIA
E-mail address: alexander.kondrashov@volsu.ru