S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 677–684 (2018) УДК 512.25
DOI 10.17377/semi.2018.15.053 MSC 16Y60

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУКОЛЕЦ. II

О.В. ЧЕРМНЫХ

Abstract. The article considers the lattice-ordered semirings (drl-semirings). Two sheaves of drl-semirings are constructed. The first sheaf is based on prime spectrum of l-ideals. The idea of construction is close to the well-known sheaf of germs of continuous functions. The second sheaf resembles Pierce's sheaf of abstract rings or semirings. Its basis space is Boolean space of maximal ideals of the lattice of complemented l-ideals from drl-semiring. The main results are theorems on representations of an l-semiprime and an arbitrary drl-semirings by sections of corresponding sheaves.

Keywords: lattice-ordered semiring, sheaf, sheaf representation.

Введение

Статья является продолжением [1]. Мы построим два новых пучка drl-полуколец и найдем представления drl-полуколец сечениями пучков. В первой нашей статье, посвященной функциональным представлениям drl-полуколец, рассматриваемые пучки основывались на пространстве всех неприводимых l-идеалов drl-полукольца или их подпространствах. В настоящей работе первая конструкция пучка базируется на пространстве первичных l-идеалов. Построение слоев накрывающего пространства пучка основывается на идее пучка ростков непрерывных функций. Для получения изоморфных (или даже точных) функциональных представлений приходится ограничивать класс drl-полуколец до l-полупервичных, т. е. drl-полуколец с нулевым пересечением всех первичных l-идеалов. Показано, что этот класс совпадает с классом всех drl-полуколец без ненулевых нильпотентных l-идеалов, что равносильно отсутствию в таких алгебрах ненулевых сильно нильпотентных элементов. Если применить это

Chermnykh, O.V., Functional representations of lattice-ordered semirings. II.

Поступила 1 апреля 2018 г., опубликована 1 июня 2018 г.

представление к l-полупервичному решеточно упорядоченному кольцу с единицей, то получим результат, который анонсировал (без рассмотрения самого представления) К. Кеймель [2, p. 87].

Для построения второго пучка мы берем множество всех дополняемых l-идеалов произвольного drl-полукольца. Поскольку это множество образует булеву решетку, то возникает булево пространство — пространство максимальных идеалов этой решетки со стоуновской топологией. Указанное пространство используется как базисное пространство пучка, а идея построения слоев накрывающего пространства пучка имеет истоки, связанные с пирсовскими пучками колец или полуколец [3],[4]. Данная конструкция позволяет получить изоморфное представление произвольного drl-полукольца.

1. Начальные понятия о drl-полукольцах и пучковых представлениях

Напомним основные понятия и обозначения, используемые в статье.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью аддитивной операции; не предполагается наличие единицы.

Определение 1. [5] *Алгебра* $(S,+,\cdot,\vee,\wedge,-,0)$ *называется drl-полукольцом, если выполняются условия:*

(1) $(S,+,\cdot,0)$ — *полукольцо;*
(2) $(S,\vee,\wedge)$ — *решетка (с порядком* $\leq$*);*
(3) *сложение* $+$ *дистрибутивно относительно* $\vee$ *и* $\wedge$*;*
(4) $a-b$ — *наименьший элемент* z *такой, что* $b+z\geq a$*;*
(5) $(a-b)\vee 0+b\leq a\vee b$ *для любых* $a,b\in S$*;*
(6) $a(b-c)=ab-ac$ *и* $(a-b)c=ac-bc$ *для любых* $a,b,c\in S$*;*
(7) $ab\geq 0$ *для любых* $a,b\geq 0$ *из* S.

Элемент $a\in S$, такой, что $a\geq 0$, называется *положительным*. Множество всех положительных элементов drl-полукольца S обозначается S^+.

Симметрическая разность на drl-полукольце S определяется как операция $a*b=(a-b)\vee(b-a)$. Обозначим *модуль элемента* $a\in S$ через $|a|=a*0=a\vee 0-a\wedge 0$.

Непустое подмножество A drl-полукольца S называется *l-идеалом*, если A — идеал полукольца $(S,+,\cdot)$ и выпуклая подрешетка решетки $(S,\vee,\wedge)$ одновременно; последнее характеризуется условием: если $a\in A$ и $|x|\leq|a|$, то $x\in A$. Решетки конгруэнций и l-идеалов drl-полукольца S изоморфны — произвольная конгруэнция на drl-полукольце однозначно определяется l-идеалом (классом нуля), а две конгруэнции с совпадающими классами нуля равны. Сравнимость элементов по конгруэнции с ядром A обозначаем обычным образом: $a\equiv b \pmod A \Leftrightarrow a*b\in A$. Фактор-$drl$-полукольцо по l-идеалу A обозначается S/A.

Множество всех l-идеалов drl-полукольца образует дистрибутивную решетку.

Произведением AB l-идеалов A и B называется l-идеал, порожденный множеством $\{ab : a\in A, b\in B\}$.

Определение 2. *Тройка* (P,π,X) *называется пучком drl-полуколец, если выполняются условия:*

(1) *X и P — топологические пространства, называемые соответственно базисным и накрывающим пространствами;*

(2) *$\pi : P \to X$ — локальный гомеоморфизм;*

(3) *для каждой точки $x \in X$ слой $P_x = \pi^{-1}(x)$ является drl-полукольцом, и $P = \dot{\cup} P_x, x \in X$;*

(4) *drl-полукольцевые операции непрерывны в P.*

Для построения пучков drl-полуколец мы используем конструкцию для универсальных алгебр, идущую от Дэйви [6]. Именно, семейство $\{A_x : x \in X\}$ l-идеалов drl-полукольца S, индексированных точками топологического пространства X, называется *открытым*, если множество $E_a = \{x \in X : a \in A_x\}$ открыто в X для любого элемента $a \in S$. Для открытого семейства l-идеалов получаем пучок (P, X), где накрывающее пространство P является дизъюнктным объединением *слоев* S/A_x по всем точкам базисного пространства X.

Для более подробной информации о drl-полукольцах и их пучковых представлениях мы отсылаем к [1].

2. Представление над первичным спектром

Определение 3. *Собственный l-идеал P drl-полукольца S называется первичным, если для любых l-идеалов I, J из S включение $IJ \subseteq P$ влечет $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$.*

Лемма 1. *Собственный l-идеал P drl-полукольца S первичен тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in S^+$ $aS^+b \subseteq P$ влечет $a \in P$ или $b \in P$.*

Доказательство. Обозначим через A и B l-идеалы, порожденные множествами S^+aS^+ и S^+bS^+ соответственно. Из $aS^+b \subseteq P$ следует $AB \subseteq P$, откуда $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Для главного l-идеала (a) получаем в первом случае $(a)^3 \subseteq P$, поэтому $(a) \subseteq P$ или $(a)^2 \subseteq P$. Последнее включение также влечет $(a) \subseteq P$, следовательно, $a \in P$. Обратно, пусть A и B — l-идеалы, не лежащие в P. Тогда найдутся $a \in S^+ \setminus P$ и $b \in S^+ \setminus P$. Если $AB \subseteq P$, то $aS^+b \subseteq AB \subseteq P$, следовательно, $a \in P$ или $b \in P$, противоречие. Поэтому $AB \nsubseteq P$, и l-идеал P первичен. □

Как и в случае первичных идеалов абстрактного кольца (и полукольца) первичные l-идеалы тесно связаны с мультипликативными системами.

Определение 4. *Непустое подмножество M drl-полукольца S называется m-системой, если выполнены условия:*

(1) $M \subseteq S^+$;

(2) $0 \notin M$;

(3) *для любых $a, b \in M$ найдется такой $u \in S^+$, что $aub \in M$.*

Предложение 1. *Пусть M — m-система, I — l-идеал, не пересекающийся с M. Тогда I содержится в некотором первичном l-идеале, не пересекающимся с M.*

Доказательство. По лемме Цорна существует l-идеал P, максимальный среди содержащих I и не пересекающихся с M. Покажем, что l-идеал P первичен. Пусть $a, b \in S^+ \setminus P$. Тогда l-идеал A, порожденный P и элементом a, строго содержит P, поэтому пересекается с M; аналогично для l-идеала B, порожденного P и b. Следовательно, в M найдутся элементы

$$x = |x| \le p_1 + n_1 a + r_1 a + a s_1 + u_1 a v_1 = x_1,$$
$$y = |y| \le p_2 + n_2 b + r_2 b + b s_2 + u_2 b v_2 = y_1$$

для некоторых $p_i \in P^+$, $r_i, s_i, u_i, v_i \in S^+$ и целых неотрицательных n_i. По определению m-системы $xzy \in M$ для некоторого $z \in S^+$. Тогда

$$xzy = |xzy| \le x_1 z y_1 = p + \sum \alpha a z b \beta,$$

где p — сумма всех слагаемых, содержащих p_1 или p_2, а среди слагаемых $\alpha azb\beta$ α и β или отсутствуют, или лежат в S^+. Если $azb \in P$, то $xzy \in P$, противоречие. Значит, $aS^+b \nsubseteq P$, и по лемме 1 P первичен. □

l-Идеал A называется *нильпотентным*, если $A^n = 0$ для некоторого натурального n. Известно [5, remark 1.5], что

$$A^n = \{x \in S : |x| \le |a|^n \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

В силу этого легко показать, что условие $A^n = 0$ равносильно тому, что $a^n = 0$ для каждого $a \in A$.

Элемент $a \in S$ называется *сильно нильпотентным*, если существует такое натуральное число $n = n(a)$, что

$$x_0|a|x_1|a|x_2 \dots x_{n-1}|a|x_n = 0$$

для всех $x_i \in S$. Ясно, что сильно нильпотентный элемент является нильпотентным, а когда drl-полукольцо коммутативно, верно и обратно.

Обозначим через $P(S)$ пересечение всех первичных l-идеалов из S.

Лемма 2. *Для drl-полукольца S равносильны условия:*
(1) $P(S) = 0$;
(2) *в S нет ненулевых нильпотентных l-идеалов;*
(3) *в S нет ненулевых сильно нильпотентных элементов.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Пусть $P(S) = 0$, и $A^n = 0$ для l-идеала A. Тогда A^n лежит в каждом первичном l-идеале. В силу первичности A лежит в каждом первичном l-идеале, поэтому $A = 0$.

(2) ⇒ (1). Пусть $P(S) \ne 0$, и $b \ne 0$ — положительный элемент из $P(S)$. Предположим, что в S нет ненулевых нильпотентных l-идеалов. Воспользуемся тем, что l-идеал $(b)^3$ состоит из таких элементов $x \in S$, что $|x| \le \sum u_i b a_i b v_i$, где $a_i \in S^+$ и $u_i, v_i \in S^+$ или u_i, v_i — пустые символы. Поэтому, если $bab = 0$ для каждого положительного a (в частности, $b^3 = 0$), то $(b)^3 = 0$. Следовательно, найдется такой $a_0 > 0$, что $ba_0b \ne 0$. Положим $b_0 = b, b_1 = b_0a_0b_0$, и если найден b_{i-1}, то $b_i = b_{i-1}a_{i-1}b_{i-1}$ для такого подходящего $a_{i-1} \in S^+$, что $b_i \in S^+$. Множество $M = \{b_0, b_1, \dots\}$ является m-системой. Действительно, во-первых, $b_{i+1} = b_i a_i b_i \in M$. Во-вторых, если $i < j$, то $b_i x = b_j$ для положительного $x = a_i b_i a_{i+1} b_{i+1} \dots a_{j-1} b_{j-1}$, следовательно, $b_i(xa_j)b_j = b_{j+1} \in M$. Поэтому максимальный не пересекающийся с M l-идеал P является первичным, не содержит элемент b, поэтому $P(S) \nsubseteq P$, противоречие.

Равносильность условий (2) и (3) вытекает из того, что элемент drl-полукольца сильно нильпотентен тогда и только тогда, когда он лежит в нильпотентном l-идеале. Это факт доказывается также, как и для l-колец [7, глава IX, лемма] (см. также [5, theorem 1.4]). □

Определение 5. *Назовем drl-полукольцо l-полупервичным, если оно удовлетворяет равносильным условиям леммы 2.*

Пересечение всех первичных идеалов абстрактного как кольца, так и полукольца, известно, совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов. Ситуация в упорядоченных кольцах и полукольцах иная. Так, пример [8, p. 45, example 8] и утверждение [9, 2.13] показывают, что множество всех сильно нильпотентных элементов некоторого решеточно упорядоченного кольца может строго содержаться в пересечении всех его первичных l-идеалов.

Поскольку $AB \subseteq A \cap B$ для любых l-идеалов A и B, то любой первичный l-идеал drl-полукольца является неприводимым. Обозначим через $\operatorname{Spec} S$ пространство всех первичных l-идеалов из S со стоуновской топологией. Открытые множества будем обозначать

$$d(A) = \{P \in \operatorname{Spec} S : P \not\supseteq A\},\ \ A — l\text{-идеал}.$$

Для открытого $U \subseteq \operatorname{Spec} S$ положим

$$O_U = \cap\{P \in \operatorname{Spec} S : P \in U\};$$

для $P \in \operatorname{Spec} S$

$$O_P = \cup\{O_U : U — \text{открытая окрестность точки } P\}.$$

Лемма 3. *Для любого открытого* $U \subseteq \operatorname{Spec} S$

$$O_U = \cap\{O_P : P \in U\}.$$

Доказательство. Понятно, что $O_P \subseteq P$, поэтому верно включение $\supseteq$. С другой стороны, по определению O_P содержит O_U для любого $P \in U$, поэтому верно включение $\subseteq$. □

Пусть $a, b \in O_P$, тогда $a \in O_U, b \in O_V$ для некоторых открытых окрестностей U, V точки P. Тогда $a, b \in O_{U\cap V}$, откуда $a + b \in O_{U\cap V}$. Для любого $s \in S$ выполняется $as, sa \in O_U$. Если $|x| \leq |a|$, то $x \in O_U$. Получаем, $a + b, sa, as, x \in O_P$, и O_P — l-идеал.

Далее, если $x \in O_P$, то найдется такая окрестность U точки P, что $x \in O_U$, и для любой точки $Q \in U$ выполняется $x \in O_Q$. Получили, что множество $\{Q \in \operatorname{Spec} S : x \in O_Q\}$ открыто, поскольку с любой своей точкой содержит и некоторую открытую окрестность этой точки. Следовательно, справедлива

Лемма 4. *Семейство l-идеалов вида* $O_P, P \in \operatorname{Spec} S$, *открыто.*

В силу леммы 4 получаем пучок $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$ drl-полуколец, индуцированный семейством l-идеалов $\{O_P : P \in \operatorname{Spec} S\}$. Его слои — это drl-полукольца S/O_P. Представление $s \to \hat{s}$ drl-полукольца S будет точным (инъективным), тогда и только тогда, когда его ядро $\cap\{O_P : P \in \operatorname{Spec} S\}$ будет нулевым. По лемме 3 и определению множества O_U это равносильно тому, что пересечение всех первичных l-идеалов из S равно нулю, т. е. S является l-полупервичным.

Напомним, что *формальной единицей* drl-полукольца S называется элемент, не лежащий ни в одном собственном l-идеале из S.

Теорема 1. *Произвольное l-полупервичное drl-полукольцо S с формальной единицей изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$.

Доказательство. В силу l-полупервичности S нам надо показать, что гомоморфизм $s \to \hat{s}$ сюръективен, т. е. произвольное глобальное сечение σ имеет вид $\hat{s}$ для подходящего элемента $s \in S$. По [1, предложение 1] каждый элемент drl-полукольца является разностью двух положительных элементов, поэтому достаточно рассмотреть случай $\sigma \geq 0$. Для любого $P \in \operatorname{Spec} S$ найдется такой элемент $a_P \in S$, что $\sigma = \hat{a}_P$ в точке P, а значит и на некоторой открытой окрестности U_P точки P. Наличие формальной единицы гарантирует, что пространство $\operatorname{Spec} S$ компактно, поэтому из открытого покрытия $\{U_P : P \in \operatorname{Spec} S\}$ выберем конечное подпокрытие $\{U_1, \ldots, U_k\}$ и соответствующие элементы $a_1, \ldots, a_k$. Для любого $i = 1, \ldots, k$ получаем

$$\sigma = \hat{a}_i \text{ на } U_i = d(B_i) \text{ для некоторого } l\text{-идеала } B_i.$$

В силу положительности σ можно считать $a_i \geq 0$ (к примеру, положить $a_i \equiv a_i \vee 0$). Поскольку $\operatorname{Spec} S = d(B_1) \cup \ldots \cup d(B_k)$, то $B_1 + \ldots + B_k = S$. По [1, предложение 1] $a_1 \vee \ldots \vee a_k = b_1 \vee \ldots \vee b_k$ для некоторых $0 \leq b_i \in B_i$. Положим

$$a = (a_1 \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k)$$

и покажем, что $\sigma = \hat{a}$. Понятно, что это будет выполняться, как только $\hat{a} = \hat{a}_i$ на U_i для каждого $i = 1, \ldots, k$, что равносильно $a \equiv a_i \pmod{O_P}$ для любого $P \in U_i$. Последнее условие означает $a * a_i \in \cap O_P = O_{U_i}$ по лемме 3, а в силу определения множества O_U получаем, что $a * a_i \in P$ для любого $P \in U_i$.

Рассмотрим произвольный первичный l-идеал P из $d(B_i)$, и пусть $j = 1, \ldots, k$ — произвольный индекс. В случае $P \in U_j$ справедливо $\hat{a}_i(P) = \sigma(P) = \hat{a}_j(P)$, поэтому $a_i \equiv a_j \pmod{O_P}$. Поскольку $O_P \subseteq P$, то $a_i \equiv a_j \pmod{P}$, откуда $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod{P}$. Если же $P \notin U_j$, то $B_j \subseteq P$ и $b_j \in P$. Ясно, что и в этом случае выполняется условие $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod{P}$ в силу выпуклости l-идеала и положительности элементов a_i, a_j. Как решетка $(S, \vee, \wedge)$ дистрибутивна [1, предложение 1], поэтому

$$\begin{aligned} a = (a_1 \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k) &\equiv (a_i \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_i \wedge b_k) \\ = a_i \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_k) &= a_i \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_k) = a_i \pmod{P}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sigma(P) = \hat{a}_i(P) = \hat{a}(P)$ для любого $P \in \operatorname{Spec} S$, и $S \cong \Gamma(\Lambda(S))$. $\square$

Следствие 1. [2, p. 87] *Произвольное l-полупервичное решеточно упорядоченное кольцо R с формальной единицей изоморфно l-кольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Lambda(R), \operatorname{Spec} R)$.

3. Представление над максимальным спектром булевой решетки дополняемых l-идеалов

Определение 6. *Пусть S — произвольное drl-полукольцо. Назовем l-идеал A дополняемым, если $A + B = S$, $A \cap B = 0$ для некоторого l-идеала B.*

Множество всех дополняемых l-идеалов drl-полукольца S обозначим через βS. Поскольку решетка $\operatorname{Id} S$ всех l-идеалов drl-полукольца S дистрибутивна, то βS будет булевой решеткой (см., например, [10], теорема 17), но не обязательно подрешеткой решетки $\operatorname{Id} S$. Если $A \in \beta S$, то дополнение к A договоримся обозначать через $A^{\perp}$.

Рассмотрим сейчас пространство $\operatorname{Max} \beta S$ булевой решетки βS. Его точками являются максимальные идеалы решетки βS, а базис открыто-замкнутых множеств составляют множества $D_\beta(A) = \{M \in \operatorname{Max} \beta S : M \not\ni A\}, A \in \beta S$.

Напомним, что $\operatorname{Max}\beta S$ является нульмерным компактом, т. е. хаусдорфовым компактным пространством с базой открыто-замкнутых множеств.

Пусть $M \in \operatorname{Max}\beta S$. Обозначим

$$0_M = \cup\{A \in \beta S : A \in M\}.$$

Лемма 5. *Пусть M — максимальный идеал решетки βS. Тогда:*
(1) *0_M — l-идеал drl-полукольца S;*
(2) *$\{0_M : M \in \operatorname{Max}\beta S\}$ — открытое семейство l-идеалов drl-полукольца S;*
(3) *$\cap\{0_M : M \in \operatorname{Max}\beta S\} = 0$.*

Доказательство. (1) Пусть $a, b \in 0_M$, тогда $a \in A, b \in B$ для некоторых $A, B \in M$. l-Идеал $A+B$ лежит в M, и поскольку $a+b \in A+B$, то $a+b \in 0_M$. Очевидно $as, sa \in 0_M$ для произвольного $s \in S$. Если $|x| \leq |a|$, то $x \in A$, следовательно, $x \in 0_M$.

(2) Пусть a — произвольный элемент из S, и $a \in 0_M$ для произвольной точки $M \in E_a = \{N \in \operatorname{Max}\beta S : a \in 0_N\}$. Тогда a лежит в некотором дополняемом l-идеале A, причем, $A \in M$. В силу простоты максимального идеала M имеем $A^\perp \notin M$. Для любого N из $D_\beta(A^\perp)$ выполняется $A^\perp \notin N$, поэтому $A \in N$, и $a \in 0_N$. Тогда $D_\beta(A^\perp)$ — открытая окрестность точки M, лежащая во множестве $E_a = \{N \in \operatorname{Max}\beta S : a \in 0_N\}$. Следовательно, множество E_a открыто, а поэтому семейство l-идеалов $\{0_M : M \in \operatorname{Max}\beta S\}$ является открытым.

(3) Пусть $a \in \cap 0_M$. Тогда для любого $M \in \operatorname{Max}\beta S$ найдется дополняемый l-идеал A_M, содержащий a. Поскольку $M \in D_\beta(A_M^\perp)$, то $\{D_\beta(A_M^\perp) : M \in \operatorname{Max}\beta S\}$ — покрытие компакта $\operatorname{Max}\beta S$. Выберем конечное подпокрытие $\{D_\beta(A_1^\perp), \ldots, D_\beta(A_k^\perp)\}$. Пересечение $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ дополняемых l-идеалов будет дополняемым l-идеалом и $a \in A$. Заметим, что A лежит в каждом максимальном идеале решетки βS. Но пересечение всех максимальных идеалов произвольной булевой решетки равно нулю, следовательно, $a = 0$. □

Доказанная лемма дает нам пучок drl-полуколец, индуцированный открытым семейством l-идеалов $\{0_M : M \in \operatorname{Max}\beta S\}$, который обозначим через

$$(\Psi(S), \operatorname{Max}\beta S).$$

Теорема 2. *Произвольное drl-полукольцо S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(\Psi(S), \operatorname{Max}\beta S)$ неприводимых drl-полуколец.*

Доказательство. Пересечение всех l-идеалов вида $0_M, M \in \beta S$, равно нулю, поэтому представление точно. Пусть σ — произвольное сечение пучка $\Psi(S)$. Будем считать, что $\sigma \geq 0$. Как и прежде найдутся элементы $a_1, \ldots, a_k \in S$ и открытое покрытие $\{D_\beta(B_1), \ldots, D_\beta(B_k)\}$ пространства $\operatorname{Max}\beta S$ такое, что $\sigma = \hat{a}_i$ на $D_\beta(B_i)$. По предложению 1 [1] $a_1 \vee \ldots \vee a_k = b_1 \vee \ldots \vee b_k$ для подходящих положительных $b_i \in B_i$. Пусть i — произвольно зафиксированный индекс, а j — произвольный переменный индекс. Если $M \in D_\beta(B_i) \cap D_\beta(B_j)$, то $\hat{a}_i(M) = \sigma(M) = \hat{a}_j(M)$, следовательно, $a_i \equiv a_j \pmod{0_M}$. Отсюда получаем $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod{0_M}$. Если же $M \notin D_\beta(B_j)$, то $b_j \in M$, и по определению l-идеала 0_M получаем $b_j \in 0_M$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(a_j \wedge b_j) * (a_i \wedge b_j) \\
&= (a_j \wedge b_j) \vee (a_i \wedge b_j) - (a_j \wedge b_j) \wedge (a_i \wedge b_j) \\
&= (a_j \vee a_i) \wedge b_j - a_j \wedge a_i \wedge b_j.
\end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq (a_j \vee a_i) \wedge b_j, a_j \wedge a_i \wedge b_j \leq b_j$, то в силу выпуклости l-идеала 0_M справедливо $a_i \wedge b_j \equiv a_j \wedge b_j \pmod{0_M}$. Положив $a = (a_1 \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k)$, для любого $M \in D_\beta(B_i)$ получаем:

$$\begin{aligned} a &= (a_1 \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b_k) \\ &\equiv (a_i \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_i \wedge b_k) \\ &= a_i \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_k) = a_i \pmod{0_M}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{a}(M) = \sigma(M)$ для любой точки $M \in \operatorname{Max} \beta S$. $\square$

References

[1] V. V. Chermnykh, O. V. Chermnykh, *Functional representations of lattice-ordered semirings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 946–971. Zbl 1377.16042

[2] K. Keimel, *The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves*, Lect. Notes Math., **248** (1971), 1–98. Zbl 0231.06023

[3] R. S. Pierce, *Modules over commutative regular rings*, Mem. Amer. Math. Soc., **70** (1967), 1–112. Zbl 0152.02601

[4] V. V. Chermnykh, *Functional representations of semirings*, Fundament. i prikl. matemat., **17**:3 (2012), 111–227. Zbl 1290.16049

[5] P. R. Rao, *Lattice ordered semirings*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., **9** (1981), 119–149. Zbl 0476.06018

[6] B. A. Davey, *Sheaf spaces and sheaves of universal algebras*, Math. Z., **134**:4 (1973), 275–290. Zbl 0259.08002

[7] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Oxford–London–New York–Paris: Pergamon Press, 1963. Zbl 0137.02001

[8] G. Birkhoff, R. S. Pierce, *Lattice-ordered rings*, An. Acad. Brasil. Ci., **28** (1956), 41–69. Zbl 0070.26602

[9] J. E. Diem, *A radical for lattice-ordered ring*, Pacific J. Math., **25**:1 (1968), 71–82. MR0227068

[10] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967. Zbl 0153.02501

Oksana Vladimirovna Chermnykh
Vyatka state universite,
Moskovskaya, 36,
610000, Kirov, Russia
E-mail address: vv146@mail.ru