S ⓔ MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 685–695 (2018) УДК 517.91
DOI 10.17377/semi.2018.15.054 MSC 34L99

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

М.Г. МАЖГИХОВА

Abstract. In this paper we obtained the explicit representations of the solutions of Dirichlet and Neumann problems for a linear ordinary differential equation of fractional order with delay. The Green's functions of the problems are constructed. The theorems of existence and uniqueness of solutions of investigated problems are proved. It is proved that the solvability conditions can be violated only a finite number of times.

Keywords: differential equation of fractional order, differential equation with delay, the generalized Mittag-Leffler function, the generalized Wright function, the Green's function.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $1 < \alpha \leq 2$, λ, μ — произвольные постоянные, τ — фиксированное положительное число, D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 14]:

$$D_{st}^{\nu}g(t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sign(t-s)}}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_{s}^{t} \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\nu+1}}, & \nu < 0; \\ g(t), & \nu = 0; \\ \mathrm{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D_{st}^{\nu-n}g(t), & n-1 < \nu \leq n, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Mazhgikhova, M.G., Boundary value problems for a linear ordinary differential equation of fractional order with delay.

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-01-00462-а.)

Поступила 9 ноября 2017 г., опубликована 1 июня 2018 г.

$H(t)$ — функция Хевисайда.

Одной из первых работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка, является [2], в которой получено решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка методом последовательных приближений. В работе [3] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля исследована в работе [4]. Для обыкновенного дифференциального уравнения дробного дискретно распределенного порядка явное представление решения начальной задачи получено в работе [5], а задачи Дирихле и Неймана исследованы в [6].

Постановки начальной и краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом приведены в работе [7].

Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Капуто в работе [8] исследовались начальная задача и краевая задача с условиями третьего рода, а в работе [9] получено явное представление решения задачи Дирихле. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) доказана в работе [10].

В данной работе в терминах функции Грина выписываются решения задач Дирихле и Неймана для уравнения (1). Найдены соответствующие условия разрешимости. Доказана теорема о конечности числа вещественных собственных значений.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-2}u(t) \in C^2(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$ и удовлетворяющую этому уравнению при всех $0 < t < 1$.

Рассмотрим функцию

$$W_\nu(t) = W_\nu(t,\tau;\lambda,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m+1}(\lambda(t-m\tau)_+^\alpha), \nu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$$

– обобщенная функция Миттаг-Леффлера [11], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)}$ – символ Похгаммера,

$$(t-m\tau)_+ = \begin{cases} t-m\tau, & t-m\tau > 0, \\ 0, & t-m\tau \le 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Начиная с некоторого m выражение $t - m\tau < 0$, поэтому ряд в (2) содержит конечное число слагаемых $N \le [\frac{t}{\tau}] + 1$.

Для функции (2) имеет место формула дробного интегро-дифференцирования порядка α [9]:

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu-\alpha}(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \nu > 0. \tag{3}$$

Функция $W_\nu(t)$ удовлетворяет соотношению [9]

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau), \qquad \alpha > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

которое следует из свойства обобщенной функции Миттаг-Леффлера [12]:

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t) - E_{\alpha,\beta}^{\rho-1}(t) = tE_{\alpha,\alpha+\beta}^{\rho}(t).$$

2. Задача Дирихле

Задача 1. *Найти регулярное решение* $u(t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = a, \qquad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-2}u(t) = b, \tag{5}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Для тех значений параметров λ и μ, для которых выполняется

$$W_2(1) \neq 0, \tag{6}$$

введем функцию

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_\alpha(t)}{W_2(1)}W_2(1-\xi), \tag{7}$$

где $W_\nu(t)$ определяется с помощью формулы (2).

2.1. Теорема существования и единственности.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ *и выполнено условие* (6)*. Тогда*

1) решение задачи (1), (5) *существует и имеет вид*

$$u(t) = -aG_\xi(t,0) + bG_\xi(t,1) + \int_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \tag{8}$$

2) Решение задачи (1), (5) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (6).

2.2. Функция Грина.

Для доказательства теоремы покажем справедливость следующих свойств для функции (7):

1. Функция $G(t,\xi)$ *непрерывна для всех значений* t *и* ξ *из отрезка* $[0,1]$.

Справедливость этого свойства следует из (7), а также из условия (6).

2. $G(t,\xi)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}] = 1. \tag{9}$$

Функция $D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi)$ определяется выражением

$$D_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,\xi) = -H(t-\xi)W_1(t-\xi) + \frac{W_2(t)}{W_2(1)}W_1(1-\xi).$$

Тогда получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{W_2(t)}{W_2(1)}W_1(1-t-\varepsilon) + W_1(\varepsilon) - \frac{W_2(t)}{W_2(1)}W_1(1-t+\varepsilon)\right] = 1.$$

3. Функция $G(t,\xi)$ *является решением однородного уравнения*

$$\partial_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau) = 0. \tag{10}$$

Свойство (10) следует из свойств функции $W_\nu(t)$ (3) и (4).

4. Функция $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,0) = 0, \qquad D_{0t}^{\alpha-2}G(t,1) = 0. \tag{11}$$

Справедливость (11) следует из представления функции (7) и формулы (3).

Функцию $G(t,\xi)$, удовлетворяющую свойствам 1-4, назовем функцией Грина задачи Дирихле.

2.3. **Доказательство теоремы существования и единственности.** Покажем, что решение задачи (1), (5) имеет вид (8). Для этого домножим уравнение (1) (записанное в терминах переменной ξ) на $D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)$ и проинтегрируем от ε до $1-\varepsilon$ по переменной ξ ($\varepsilon \to 0$):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi - \lambda \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi$$

$$-\mu \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi, \quad 0<t<1. \tag{12}$$

Преобразуем первый интеграл в уравнении (12):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi = D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{t} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi - \int\limits_{t}^{1-\varepsilon} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)d\xi$$

$$= D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\xi=1} - D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-1}u(\xi)\Big|_{\xi=0}$$

$$+D_{0t}^{\alpha-2}u(\xi)\left[D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t+0} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)\Big|_{\xi=t-0}\right]$$

$$+D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=0} - D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)\Big|_{\xi=1}$$

$$+\int\limits_{0}^{1} D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Учитывая далее свойства (9) и (11) функции (7), а также условия (5), из (13) имеем:

$$aD_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,0) - bD_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi}(t,1) + D_{0t}^{\alpha-2}u(\xi) + \int\limits_{0}^{1} D_{0\xi}^{\alpha-2}u(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G_{\xi\xi}(t,\xi)d\xi. \tag{14}$$

Подставим (14) в уравнение (12). Учитывая, что

$$\int\limits_{0}^{1} H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)G(t,\xi)d\xi = \int\limits_{0}^{1} H(1-\tau-\xi)u(\xi)G(t,\xi+\tau)d\xi,$$

формулу дробного интегрирования по частям [20, с. 15]

$$\int\limits_{a}^{b} g(s)D_{as}^{\alpha}h(s)ds = \int\limits_{a}^{b} h(s)D_{bs}^{\alpha}g(s)ds, \tag{15}$$

а также третье свойство функции $G(t,\xi)$, получим соотношение:

$$D_{0t}^{\alpha-2}u(\xi)+aD_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,0)-bD_{0t}^{\alpha-2}G_\xi(t,1)=\int\limits_0^1 f(\xi)D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi,$$

откуда, подействовав на обе части последнего равенства оператором $D_{0t}^{2-\alpha}$ и выражая $u(t)$, получим формулу (8).

Теперь докажем, что (8) является решением задачи (1), (5). В терминах функции $W_\nu(t)$ решение задачи (1), (5) можно записать в виде:

$$u(t)=a\left[W_{\alpha-1}(t)-\frac{W_1(1)}{W_2(1)}W_\alpha(t)\right]+b\frac{W_\alpha(t)}{W_2(1)}+\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi$$

$$-\frac{W_\alpha(t)}{W_2(1)}\int\limits_0^1 f(\xi)W_2(1-\xi)d\xi.$$

Тогда

$$D_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 f(\xi)W_1(t-\xi)d\xi.$$

Используя далее формулу (4) из последнего выражения получаем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\xi)[\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)]d\xi=f(t)+\lambda\int\limits_0^t f(\xi)W_{\alpha+1}(t-\xi)d\xi$$

$$+\mu\int\limits_0^t f(\xi)W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)d\xi.$$

Найденное решение $u(t)$ удовлетворяет краевым условиям (5) ($W_1(0)=1$, $W_2(0)=0$):

$$\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=a\left[W_1(0)-\frac{W_1(1)}{W_2(1)}W_2(0)\right]+b\frac{W_2(0)}{W_2(1)}=a;$$

$$\lim_{t\to1}D_{0t}^{\alpha-2}u(t)=a\left[W_1(1)-\frac{W_1(1)}{W_2(1)}W_2(1)\right]+b\frac{W_2(1)}{W_2(1)}=b.$$

Далее покажем, что если условие (6) не выполняется, то есть если

$$W_2(1)=0,$$

то решение однородной задачи не единственно. Рассмотрим функцию $\bar u(t)=const\cdot W_2(t)$, которая является решением задачи

$$D_{0t}^{\alpha}\bar u(t)-\lambda\bar u(t)-\mu H(t-\tau)\bar u(t-\tau)=0,\quad \lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-2}\bar u(t)=0,\quad \lim_{t\to1}D_{0t}^{\alpha-2}\bar u(t)=0.$$

Но так как эта задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая неоднородная задача будет иметь единственное решение.

Теорема доказана.

Замечание 1. При

$$\lambda>0,\quad \mu>0 \tag{16}$$

функция (2) положительна. Значит, условие (16) обеспечивает выполнение условия (6).

Замечание 2. При $\lambda = 0$ условие разрешимости (6) примет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m (1 - m\tau)_+^{\alpha m + 1}}{\Gamma(\alpha m + 2)} \neq 0 \tag{17}$$

и заведомо выполняется при $\mu \geq 0$. Из того, что ряд (2) конечный следует, что (17) может нарушаться лишь для конечного числа μ.

3. Задача Неймана

В данном пункте исследуется следующая

Задача 2. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) = c, \qquad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) = d, \tag{18}$$

где c и d – произвольные постоянные.

3.1. Теорема существования и единственности.

Введем функцию

$$Q(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) - \frac{W_{\alpha-1}(t)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} W_1(1-\xi) \tag{19}$$

для тех λ и μ, для которых выполняется

$$\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) \neq 0, \tag{20}$$

где $W_\nu(t)$ определяется с помощью формулы (2).

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $f(t) \in L(0,1) \cap C(0,1)$ и выполнено условие* (20). *Тогда*

1) решение задачи (1), (18) *существует и имеет вид*

$$u(t) = cQ(t,0) - dQ(t,1) + \int_0^1 f(\xi) Q(t,\xi) d\xi. \tag{21}$$

2) Решение задачи (1), (18) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (20).

3.2. Функция Грина.

Функция (19) удовлетворяет следующим свойствам:

1. Функция $Q(t,\xi)$ непрерывна для всех значений t и ξ из отрезка $[0,1]$.

Справедливость этого свойства следует из (7), а также из условия (20).

2. $Q(t,\xi)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [D_{0t}^{\alpha-2} Q_\xi(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon} - D_{0t}^{\alpha-2} Q_\xi(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon}] = 1. \tag{22}$$

Функция $D_{0t}^{\alpha-2} Q_\xi(t,\xi)$ определяется выражением

$$D_{0t}^{\alpha-2} Q_\xi(t,\xi) = -H(t-\xi) W_1(t-\xi) + \frac{W_1(t)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} W_0(1-\xi).$$

Тогда получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{W_1(t) W_0(1-t-\varepsilon)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} - \frac{W_1(t) W_0(1-t+\varepsilon)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} + W_1(\varepsilon) \right] = 1.$$

3. Функция $Q(t,\xi)$ является решением однородного уравнения

$$\partial^{\alpha}_{1\xi}Q(t,\xi) - \lambda Q(t,\xi) - \mu H(1-\tau-\xi)Q(t,\xi+\tau) = 0. \tag{23}$$

Свойство (23) следует из свойств функции $W_\nu(t)$ (3) и (4).

4. Функция $Q(t,\xi)$ удовлетворяет краевым условиям

$$D^{\alpha-2}_{0t}Q_\xi(t,0) = 0, \qquad D^{\alpha-2}_{0t}Q_\xi(t,1) = 0. \tag{24}$$

Справедливость (24) следует из представления функции (19).

Функцию $Q(t,\xi)$, удовлетворяющую свойствам 1-4, назовем функцией Грина задачи Неймана.

3.3. **Доказательство теоремы существования и единственности.** Домножим уравнение (1) (записанное в терминах переменной ξ) на $D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)$ и проинтегрируем от ε до $1-\varepsilon$ по переменной ξ ($\varepsilon \to 0$).

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)D^{\alpha}_{0\xi}u(\xi)d\xi - \lambda\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(\xi)D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)d\xi -$$

$$-\mu\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} H(t-\tau)u(\xi-\tau)D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)d\xi = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(\xi)D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)d\xi, \quad 0<t<1. \tag{25}$$

Интегрируя первое слагаемое в (25) дважды по частям (с учетом свойств функции Грина и краевых условий (18)), получим:

$$dD^{\alpha-2}_{0t}Q(t,1) - cD^{\alpha-2}_{0t}Q(t,0) + D^{\alpha-2}_{0t}u(\xi) = \int\limits_0^1 f(\xi)D^{\alpha-2}_{0t}Q(t,\xi)d\xi,$$

откуда, подействовав на обе части последнего равенства оператором $D^{2-\alpha}_{0t}$ и выражая $u(t)$, получим формулу (21).

В справедливости полученного решения (21) можно убедиться его подстановкой в уравнение (1).

Полученное решение удовлетворяет краевым условиям (18) ($W_\alpha(0) = 0$, $W_1(0) = 1$):

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0t}u(t) = c\left[W_1(0) - \frac{\lambda W_\alpha(0) + \mu W_\alpha(-\tau)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)}W_1(1)\right]$$

$$+d\frac{\lambda W_\alpha(0) + \mu W_\alpha(-\tau)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} = c;$$

$$\lim_{t\to 1} D^{\alpha-1}_{0t}u(t) = c\left[W_1(1) - \frac{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)}W_1(1)\right]$$

$$+d\frac{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)}{\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau)} = d.$$

Далее покажем, что если условие (20) не выполняется, то есть если

$$\lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) = 0,$$

то решение однородной задачи не единственно. Рассмотрим функцию $\bar{u}(t) = const\cdot(\lambda W_\alpha(t) + \mu W_\alpha(t-\tau))$, которая является решением задачи

$$D^{\alpha}_{0t}\bar{u}(t) - \lambda\bar{u}(t) - \mu H(t-\tau)\bar{u}(t-\tau) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0t}\bar{u}(t) = 0, \quad \lim_{t\to 1} D^{\alpha-1}_{0t}\bar{u}(t) = 0.$$

Но так как эта задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая неоднородная задача будет иметь единственное решение.

Теорема доказана.

Замечание 3. При

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0 \tag{26}$$

функция (2) положительна. Значит, условие (26) обеспечивает выполнение условия (20).

Замечание 4. При $\lambda = 0$ условие разрешимости (20) примет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^{m+1}(1-(m+1)\tau)_+^{\alpha m+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha m+\alpha)} \neq 0 \tag{27}$$

и заведомо выполняется при $\mu \geq 0$. Из того, что ряд (2) конечный следует, что (27) может нарушаться лишь для конечного числа μ.

4. О вещественных собственных значениях

Определение. Собственными значениями задачи (1), (5) назовем значения λ, при которых существует отличное от нуля решение однородной задачи, соответствующей задаче (1), (5).

Аналогично определяются собственные значения задачи (1), (18).

Из доказательств теоремы 2.1 и теоремы 3.1 следует, что множество собственных значений задачи (1), (5) совпадает со множеством вещественных нулей функции

$$\Phi(\lambda) = W_2(1,\tau;\lambda,\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (1-m\tau)_+^{\alpha m+1} E_{\alpha,\alpha m+2}^{m+1}(\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha}), \tag{28}$$

а множество собственных значений задачи (1), (18) совпадает со множеством вещественных нулей функции

$$\Theta(\lambda) = \lambda W_\alpha(1) + \mu W_\alpha(1-\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \left[\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha m+\alpha-1} E_{\alpha,\alpha m+\alpha}^{m+1}(\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha})\right.$$

$$\left. +\mu(1-(m+1)\tau)_+^{\alpha m+\alpha-1} E_{\alpha,\alpha m+\alpha}^{m+1}(\lambda(1-(m+1)\tau)_+^{\alpha})\right]. \tag{29}$$

Теорема 3. *Задача* (1), (5) *может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Доказательство. Функция (28) в терминах обобщенной функции Райта записывается в следующем виде:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!}(1-m\tau)_+^{\alpha m+1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (m+1,1) \\ (\alpha m+2,\alpha) \end{matrix} \middle| \lambda(1-m\tau)_+^{\alpha} \right], \tag{30}$$

где

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_l,\alpha_l)_{1,p} \\ (b_l,\beta_l)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^{p}\Gamma(a_l+\alpha_l k)}{\prod_{l=1}^{q}\Gamma(b_l+\beta_l k)} \frac{z^k}{k!} \tag{31}$$

– обобщенная функция Райта [13]. Ряд в формуле (30) содержит конечное число слагаемых, поэтому $\Phi(\lambda)$ является целой функцией параметра λ. Исследуем ее свойства при $\lambda \to +\infty$ и $\lambda \to -\infty$.

При $\lambda \to +\infty$ для обобщенной функции Райта справедлива асимптотическая формула [13], [14]:

$$
{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(m+1,1)\\(\alpha m+\nu,\alpha)\end{array}\middle|\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha}\right]=\alpha^{-m}\lambda^{\frac{m(1-\alpha)-\nu+1}{\alpha}}(1-m\tau)_+^{m(1-\alpha)-\nu+1}
$$

$$
\times e^{\lambda^{1/\alpha}(1-m\tau)_+}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right]. \tag{32}
$$

Тогда асимптотическая формула для функции (30) при $\lambda \to +\infty$ запишется в виде:

$$
\Phi(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\frac{\mu^m\alpha^{-m}}{m!}(1-m\tau)_+^m\lambda^{\frac{m(1-\alpha)-1}{\alpha}}e^{\lambda^{1/\alpha}(1-m\tau)_+}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right], \tag{33}
$$

где N равно максимальному значению m, для которого $(1-m\tau)>0$. Из представления (33) видно, что при $\lambda \to +\infty$ этот ряд неограниченно растет.

Рассмотрим теперь случай $\lambda \to -\infty$. Асимптотическая формула обобщенной функции Райта при $\lambda \to -\infty$ имеет вид [13], [14]:

$$
{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(m+1,1)\\(\alpha m+\nu,\alpha)\end{array}\middle|\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha}\right]=\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{m+l+1}(l+m)!(1-m\tau)_+^{-\alpha(m+l+1)}}{|\lambda|^{m+l+1}\Gamma(\nu-\alpha-\alpha l)(m+l+1)!}
$$

$$
+O\left(\frac{1}{|\lambda|^m}\right). \tag{34}
$$

Тогда асимптотическая формула для функции (28) при $\lambda \to -\infty$ запишется в виде

$$
\Phi(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^{m+1}\mu^m(1-m\tau)_+^{1-\alpha}}{|\lambda|^{m+1}\Gamma(2-\alpha)(m+1)!}\left[1+O\left(\frac{1}{|\lambda|^N}\right)\right]. \tag{35}
$$

Рассмотрим предельное соотношение, в случае $\mu \neq 0$:

$$
\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda^{N+1}\Phi(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^{m+1}\mu^m|\lambda|^{N+1}(1-m\tau)_+^{1-\alpha}}{|\lambda|^{m+1}\Gamma(2-\alpha)(m+1)!}
$$

$$
=\frac{(-1)^{N+1}\mu^N(1-N\tau)_+^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(N+1)!}\neq 0. \tag{36}
$$

Когда $\mu=0$

$$
\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda\Phi(\lambda)=-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}. \tag{37}
$$

Так как $\Phi(\lambda)$ – целая функция переменной λ, то из (35), (36) и (37) следует, что (28) может иметь лишь конечное число вещественных нулей.

□

Теорема 4. *Задача* (1), (18) *может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Аналогично доказательству теоремы 3 будем использовать представление функции (29) в терминах обобщенной функции Райта

$$\Theta(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!} \left[\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha m+\alpha-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (m+1,1) \\ (\alpha m+\alpha,\alpha) \end{array} \middle| \lambda(1-m\tau)_+^{\alpha} \right] \right.$$

$$(38) \qquad \left. +\mu(1-(m+1)\tau)_+^{\alpha m+\alpha-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (m+1,1) \\ (\alpha m+\alpha,\alpha) \end{array} \middle| \lambda(1-(m+1)\tau)_+^{\alpha} \right] \right],$$

а также асимптотические формулы обобщенной функции Райта (32) и (34). Получим, что при $\lambda \to \infty$

$$\Theta(\lambda) = \sum_{m=0}^{N} \frac{\mu^m \alpha^{-m}}{m!} \lambda^{\frac{m(1-\alpha)+1}{\alpha}} \left[(1-m\tau)_+^m e^{\lambda^{1/\alpha}(1-m\tau)_+} \right.$$

$$(39) \qquad \left. + \frac{\mu}{\lambda}(1-(m+1)\tau)_+^m e^{\lambda^{1/\alpha}(1-(m+1)\tau)_+} \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \right].$$

Из (39) видно, что при $\lambda \to +\infty$ этот ряд неограниченно растет.

При $\lambda \to -\infty$

$$\Theta(\lambda) = \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m \mu^m}{|\lambda|^{m+1}\Gamma(-\alpha)(m+2)m!} \left[(1-m\tau)_+^{-1-\alpha} + \frac{\mu}{\lambda}(1-(m+1)\tau)_+^{-1-\alpha} \right]$$

$$(40) \qquad \times \left[1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{N+1}} \right) \right].$$

Рассмотрим предельное соотношение ($\mu \neq 0$):

$$(41) \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \lambda^{N+1}\Theta(\lambda) = \frac{(-1)^N \mu^N (1-N\tau)_+^{-1-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)(N+2)N!} \neq 0.$$

В случае, когда $\mu = 0$

$$(42) \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \lambda\Theta(\lambda) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)}.$$

Так как $\Theta(\lambda)$ – целая функция переменной λ, то из (40), (41) и (42) следует, что (29) может иметь лишь конечное число вещественных нулей.

References

[1] A.V. Pskhu, *Partial differential equations of fractional order*, Moscow: Nauka, 2005. (Russian) Zbl 1193.35245

[2] J.H. Barrett, *Differential equation of non-integer order*, Canad. J. Math., **6**:4 (1954), 529–541. Zbl 0058.10702

[3] M.M. Dzhrbashyan, A.B. Nersesyan, *Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order*, Izv. Akad. Nauk Armenian SSR Matem., **3**:1 (1968), 3—29. (Russian) Zbl 0165.40801

[4] M.M. Dzhrbashyan, *Boundary problem for fractional differential operator of Sturm-Liouville type*, Izv. Akad. Nauk Armenian SSR Matem., **5**:2 (1970), 71–96. (Russian) Zbl 0212.43202

[5] A.V. Pskhu, *Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order*, Sb. Mathematics, **202**:4 (2011), 571—582. Zbl 1226.34005

[6] L.Kh. Gadzova, *Dirichlet and Neumann problems for a fractional ordinary differential equation with constant coefficients*, Differential Equations, **51**:12 (2015), 1556–1562. Zbl 1337.34012

[7] S.B. Norkin, *About the solutions of a linear homogeneous second order differential equation with delay*, Uspekhi matem. nauk, **14**:1 (85) (1959), 199–206. (Russian) Zbl 0090.05702

[8] M.G. Mazhgikhova, *Initial and boundary value problem for ordinary differential equation of fractional order with delay*, Chelyabinsk Phisical and Mathematical Journal, **3**:1 (2018), 27–37. (Russian)

[9] M.G. Mazhgikhova, *Dirichlet problem for ordinary differential equation of fractional order with delay*, Differential Equations, **54**:2 (2015), 187–194. (Russian)

[10] M.G. Mazhgikhova, *Cauchy problem for ordinary differential equation with Riemann-Liouville derivative with delay*, News of kabardino-balkarian scientific center of the russian academy of sciences, **1**:75 (2017), 24–28. (Russian)

[11] T.R. Prabhakar, *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., **19** (1971), 7–15. Zbl 0221.45003

[12] A.K. Shukla, J.C. Prajapati, *On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties*, J. Math. Anal. Appl., **336**:2 (2007), 797–811. Zbl 1122.33017

[13] E.M. Wright, *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function*, J. London Math. Soc., **10** (1935), 286–293. JFM 61.0407.01

[14] E.M. Wright, *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function*, Proc. London Math. Soc.,II Ser., **46** (1940), 389–408. Zbl 0025.40402

Madina Gumarovna Mazhgikhova
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Shortanova street, 89A,
360000, Nalchik, Russia
E-mail address: mazhgihova.madina@yandex.ru