S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 696–706 (2018) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2018.15.055 MSC 35K25

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Л.Л. КАРАШЕВА

Abstract. In the paper, we construct a fundamental solution for a higher order parabolic equation with time-fractional derivative and study its properties. We solve the Cauchy problem for the equation under study and prove a uniqueness theorem in the class of fast-growing functions.

Keywords: fundamental solution, Riemann — Liouville fractional derivative, Cauchy problem, high order equation.

1. Введение

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$ уравнение

$$Lu = D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, D_{0t}^{α} — оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка α, $0 < \alpha \le 1$, определяемый соотношением [1, с. 28]

$$D_{0x}^{\alpha}\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{0x}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет неравенству $[\alpha] \le \alpha \le [\alpha] + 1$.

Karasheva, L.L., Cauchy problem for high even order parabolic equation with time fractional derivative.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00462-а).
Поступила 1 декабря 2017 г., опубликована 11 июня 2018 г.

Уравнения высокого порядка с дробными производными в младших членах и краевые задачи для них являются одним из наиболее перспективных разделов современной теории уравнений в частных производных, в связи с их прикладной важностью. Как известно, теория дробных дифференциальных уравнений эволюционного типа в последнее время активно применяется в инженерных и естественнонаучных задачах, поэтому задачи для уравнения (1) вызывают большой интерес.

При $\alpha = 1$ в работе [2] для уравнения (1) найдено решение задачи Коши в классе неограниченных функций. В работе [3] в виде несобственных интегралов найдено фундаментальное решение параболического уравнения порядка $2n$ и построена теория потенциалов.

Уравнение (1) при $n = 1$ широко исследовано. В частности в работе [4] решена задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка с регуляризованной дробной производной. В работе [5] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. В работе [6] найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. С помощью интегральных преобразований в работе [7] найдено решение задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения. Более обширную библиографию можно найти в работах [5], [8], [9].

Отметим так же работу [10], в которой найдены условия однозначной разрешимости начальной задачи Коши для линейного и нелинейного эволюционных уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах. В работе [11] показано существование единственного решения задачи Коши для уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Капуто и решение представлено с использованием разрешающих операторов. Наиболее полную библиографию по этому направлению можно найти в работах [11], [12].

В данной работе построено фундаментальное решение для параболического уравнения высокого порядка с дробной производной по временной переменной, исследованы его свойства и доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2. Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,t)$ имеющую непрерывные производные по переменной x до порядка $2n$ такую, что $t^{1-\alpha}u(x,t) \in C(\overline{D})$ и $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$ имеет непрерывную производную по t в D, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in D$.

Задача Коши. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \tag{2}$$

где $\tau(x)$ — заданная функция.

3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\sum_{\ell=0}^{\infty}C_{n,m}^{\ell}\frac{z^{\ell}}{\ell!\Gamma\left(\beta\ell+\mu\right)},\qquad z\in\mathbb{C},\tag{3}$$

где $C_{n,m}^{\ell}=\frac{\sin\frac{(m+\ell)\pi}{2}}{\sin\frac{(m+\ell)\pi}{2n}}$, $n,m\in\mathbb{N},m\le 2n-1$, $\beta>-1$, $\mu\in\mathbb{C}$.

Нетрудно заметить, что при $\ell+m$ кратном $2n$ и числитель, и знаменатель $C_{n,m}^{\ell}$ обращаются в нуль и

$$C_{n,m}^{2nk-m}=\lim_{\zeta\to\pi k}\frac{\sin\zeta n}{\sin\zeta}=n(-1)^{k(n+1)},\qquad k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}.$$

Кроме этого,

$$\frac{\sin\zeta n}{\sin\zeta}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\zeta(2k-n+1)},\tag{4}$$

откуда очевидно, что

$$|C_{n,m}^{\ell}|\le n,\ \ \forall\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

При $n=1$ функция вида (3) совпадает с функцией Райта [13]

$$\Theta_{1,m}(z;\beta,\mu)=\phi\left(\beta,\mu;z\right),$$

где $\phi\left(\beta,\mu;z\right)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!\Gamma(\beta p+\mu)}$.

Лемма 1. *Для $z\in C$ справедливо равенство*

$$\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=(-1)^{n+1}\Theta_{n,m+2n}(z;\beta,\mu).\tag{5}$$

Доказательство. Равенство (5) следует из соотношения

$$C_{n,m+2n}^{\ell}=\frac{\sin\frac{(m+2n+\ell)\pi}{2}}{\sin\frac{(m+2n+\ell)\pi}{2n}}=(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{(m+\ell)\pi}{2}}{\sin\frac{(m+\ell)\pi}{2n}}=(-1)^{n+1}C_{n,m}^{\ell}.$$

□

Лемма 2. *При любых $z\in\mathbb{C}$ и $\beta>-1$, $\mu\in\mathbb{C}$ справедливо представление*

$$\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{im\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right).\tag{6}$$

Доказательство. В силу (4), имеем

$$\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{(2k-n+1)(m+\ell)\pi}{2n}}\frac{z^{\ell}}{\ell!\Gamma\left(\beta\ell+\mu\right)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}e^{im\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right).$$

□

Лемма 3. *Если $q\in\mathbb{N}$ и $z\in\mathbb{C}$, тогда справедливы соотношения*

$$\frac{d^q}{dz^q}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\Theta_{n,m+q}(z;\beta,\mu+q\beta),\tag{7}$$

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=(-1)^{n+1}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu+2n\beta).\tag{8}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой дифференцирования функции Райта [13]

$$\frac{d^q}{dz^q}\phi(\beta,\delta;\lambda z)=\lambda^q\phi(\beta,\delta+q\beta;\lambda z),\quad q\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

и представлением функции $\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)$ в виде (6), получим

$$\frac{d^q}{dz^q}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{(m+q)(2k-n+1)\pi}{2n}}\phi\left(\beta,\mu+q\beta;ze^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right).$$

Отсюда следует справедливость формулы (7). Из (7) и (5) следует соотношение (8). □

Лемма 4. *Пусть* $\beta\in\left(-\frac{1}{n},0\right)$ *и* $\left(1-\frac{1+n\beta}{2n}\right)\pi<|\arg z|$, $-\pi<\arg z\le\pi$, *тогда справедливо следующее неравенство*

$$|\Theta_{n,m}\left(z;\beta,\mu\right)|\le C\exp\left(-\sigma|z|^{\frac{1}{1+\beta}}\right),\tag{9}$$

где $\sigma<\sigma_0=(1+\beta)\left(-\beta\right)^{-\frac{\beta}{1+\beta}}\cos\frac{|\varphi|-\frac{n+1}{2n}}{(1+\beta)}\pi$, $\arg z=\varphi\pi$, C — *положительная постоянная, не зависящая от* z, *причем* σ *может быть выбрано за счет выбора* C, *как угодно близко к* σ_0.

Доказательство. Из асимптотического разложение функции Райта [14] имеем

$$|\phi(\beta,\mu;z)|\le C\exp(-\sigma z^{\frac{1}{1+\beta}}),\quad \beta\in(-1;0),\tag{10}$$

где

$$\frac{1-\beta}{2}\pi<|\arg z|\le\pi,$$

$$\sigma<\sigma_0=(1+\beta)\left(-\beta\right)^{-\frac{\beta}{1+\beta}}\cos\frac{1-|\varphi|}{1+\beta}\pi,\quad \arg z=\varphi\pi,$$

C — положительная постоянная, причем σ может быть выбрано за счет выбора C, как угодно близко к σ_0.

Таким образом, используя представление (6), в силу неравенства (10), для функции $\Theta_{n,m}\left(z;\beta,\mu\right)$ получим неравенство (9). □

Лемма 5. *При* $\beta\in\left(-\frac{1}{n},0\right)$, $\left(1-\frac{1+n\beta}{2n}\right)\pi<|\arg z|$, $-\pi<\arg z\le\pi$, $\mu\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{R}$ *справедливо соотношение*

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\mu-1}\Theta_{n,m}\left(zy^{\beta};\beta,\mu\right)=y^{\mu-\gamma-1}\Theta_{n,m}\left(zy^{\beta};\beta,\mu-\gamma\right).\tag{11}$$

Доказательство. Пользуясь формулой дробного дифференцирования функции Райта [9, с. 25]

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\delta-1}\phi(\beta,\delta;\lambda y^{\beta})=y^{\delta-\gamma-1}\phi(\beta,\delta-\gamma;\lambda y^{\beta}),\ \beta\in(-1;0),\ \delta\in\mathbb{R}$$

и представлением (6), получим

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\mu-1}\Theta_{n,m}\left(zy^{\beta};\beta,\mu\right)=y^{\mu-\gamma-1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{im\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\phi\left(\beta,\mu-\gamma;zy^{\beta}e^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right).$$

Отсюда следует справедливость формулы (11). □

4. Фундаментальное решение

Рассмотрим функцию

$$\Gamma(x,t)=\frac{t^{\alpha-\frac{\alpha}{2n}-1}}{2n}\Theta_{n,1}\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}};-\frac{\alpha}{2n},\alpha-\frac{\alpha}{2n}\right). \tag{12}$$

Докажем некоторые свойства функции $\Gamma(x,t)$.

Лемма 6. *Если $q\in\mathbb{N}$ и $\gamma\in\mathbb{R}$, тогда справедливо следующее соотношение*

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=\begin{cases}0, & \text{при } q=\overline{0,2n-2},\\ \frac{(-1)^n t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}, & \text{при } q=2n-1.\end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Из представления (6) и формул (7), (11), имеем

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(x,t)=(-1)^q\operatorname{sign}^q(x)\frac{t^{\alpha\left(1-\frac{1+q}{2n}\right)-\gamma-1}}{2n}\times$$
$$\times\Theta_{n,1+q}\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}};-\frac{\alpha}{2n},\alpha-\frac{\alpha}{2n}-q\frac{\alpha}{2n}-\gamma\right)=$$
$$=(-1)^q\operatorname{sign}^q(x)\frac{t^{\alpha\left(1-\frac{1+q}{2n}\right)-\gamma-1}}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{(1+q)(2k-n+1)}{2n}\pi}\times$$
$$\times\phi\left(-\frac{\alpha}{2n},\alpha-\frac{\alpha}{2n}-q\frac{\alpha}{2n}-\gamma;-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}}e^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right). \tag{14}$$

Из (14) видно, что при $q=\overline{0,2n-2}$

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)=(-1)^q\frac{t^{\alpha\left(1-\frac{1+q}{2n}\right)-\gamma-1}e^{i\frac{(1+q)(1-n)}{2n}\pi}(1+(-1)^q)}{2n\Gamma\left(\alpha-\frac{\alpha}{2n}-q\frac{\alpha}{2n}-\gamma\right)\left(1-e^{i\frac{1+q}{n}\pi}\right)},$$
$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=(-1)^q\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t).$$

Таким образом, из последних двух равенств очевидно, что

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=0,\quad q=\overline{0,2n-2}.$$

При $q=2n-1$ из (14) имеем

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)=\frac{(-1)^n t^{-\gamma-1}}{2\Gamma(-\gamma)},$$
$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=-\frac{(-1)^n t^{-\gamma-1}}{2\Gamma(-\gamma)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=\frac{(-1)^n t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}.$$

□

Лемма 7. *Для функции $\Gamma(x,t)$ при $0<\alpha<2$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}\cup 0$ и $\theta\geq 0$ справедливо следующее неравенство*

$$\left|\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(x,t)\right|\leq C|x|^{-\theta}t^{\alpha\left(1-\frac{1+q-\theta}{2n}\right)-\gamma-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2n-\alpha}}\right), \tag{15}$$

где $\sigma < \sigma_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos\frac{1-n}{2n-\alpha}\pi$, C *– некоторая положительная постоянная, не зависящая от* x *и* t*.*

Доказательство. Учитывая (12), неравенство (9) и так как

$$\sup_{z\geq 0}(z^{\theta}e^{-\varepsilon z^{\lambda}}) < \text{const}, \text{ при } \theta \geq 0,\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0,$$

получим (15). □

Лемма 8. *При* $0 < \alpha < 2$ *и* $\zeta \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{0t}^{\alpha-\zeta}\Gamma(x,t)dx = \frac{t^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}. \tag{16}$$

Доказательство. Из (12) и (11) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{0t}^{\alpha-\zeta}\Gamma(x,t)dx = \frac{t^{\zeta-\frac{\alpha}{2n}-1}}{2n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta_{n,1}\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}}; -\frac{\alpha}{2n}, \zeta-\frac{\alpha}{2n}\right)dx =$$

$$= \frac{t^{\zeta-\frac{\alpha}{2n}-1}}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\Theta_{n,1}\left(-xt^{-\frac{\alpha}{2n}}; -\frac{\alpha}{2n}, \zeta-\frac{\alpha}{2n}\right)dx.$$

Воспользуемся представлением функции $\Theta_{n,1}\left(-xt^{-\frac{\alpha}{2n}}; -\frac{\alpha}{2n}, \zeta-\frac{\alpha}{2n}\right)$ в виде (6), тогда последнее равенство примет следующий вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{0t}^{\alpha-\zeta}\Gamma(x,t)dx = \frac{t^{\zeta-\frac{\alpha}{2n}-1}}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k-n+1}{2n}\pi}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, \zeta-\frac{\alpha}{2n}; -xt^{-\frac{\alpha}{2n}}e^{i\frac{2k-n+1}{2n}\pi}\right)dx.$$

Пользуясь формулой дифференцирования функции Райта [13] и оценкой (10), получим равенство (16). □

В частности, из (16) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{0t}^{\alpha-1}\Gamma(x,t)dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{0t}^{\alpha}\Gamma(x,t)dx = 0. \tag{17}$$

Лемма 9. *Если* $x \neq \xi$, $0 < \eta < t$ *и* $\gamma \geq 0$ *при фиксированных* $(x,t) \in D$ *функция* $\Gamma(x-\xi, t-\eta)$ *является решением уравнения*

$$\left(D_{t\eta}^{\alpha} + (-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^{2n}}\right)D_{t\eta}^{-\gamma}\Gamma(x-\xi, t-\eta) = 0, \tag{18}$$

Доказательство. Используя равенство (12), леммы 3 и 5 легко показать, что функция $\Gamma(x-\xi, t-\eta)$ удовлетворяет уравнению (18). □

Лемма 10. *Для любой функции* $h(x) \in C(\mathbb{R})$ *такой, что*

$$|h(x)| \leq \exp(c|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}), \quad c > 0, \textit{при } |x| \to -\infty, \tag{19}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{\eta\to t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi = h(x). \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} [h(\xi)-h(x)] D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi +$$

$$+h(x)\int_{-\infty}^{\infty} D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi.$$

Из (15) и (19) следует, что

$$\lim_{\eta\to t}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)[h(\xi)-h(x)] D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi = 0,$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[h(\xi)-h(x)] D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi \le \omega(\varepsilon)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi \le C\omega(\varepsilon),$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{\xi\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)} |h(\xi)-h(x)|,\ \varepsilon>0.$$

Отсюда, учитывая произвольность выбора ε и непрерывность функции $h(x)$, получим

$$\lim_{\eta\to t}\int_{-\infty}^{\infty}[h(\xi)-h(x)] D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi = 0,$$

тогда имеем

$$\lim_{\eta\to t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi = h(x)\lim_{\eta\to t}\int_{-\infty}^{\infty} D_{t\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi.$$

В силу (17) из последнего равенства получим (20). □

Функцию $\Gamma(x-\xi,t-\eta)$, удовлетворяющую доказанным выше свойствам назовем *фундаментальным решением* уравнения (1).

5. Решение задачи Коши

Теорема 1. *Пусть функция* $\tau(x)\in C(\mathbb{R})$ *и* $f(x,t)=D_{0t}^{-\gamma}g(x,t)$, $t^{1-\delta}g(x,t)\in C(\overline{D})$, $\gamma,\delta>0$ *и выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty}\tau(x)\exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right)=0, \tag{21}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}t^{1-\alpha}f(x,t)\exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right)=0, \tag{22}$$

где $k < \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2nT}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos\frac{1-n}{2n-\alpha}\pi$. *Тогда регулярное решение* $u(x,t)$ *задачи (1), (2) имеет вид*

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)\Gamma(x-\xi,t)d\xi + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta, \tag{23}$$

где $\Gamma(x-\xi,t-\eta)$ — *фундаментальное решение задачи (1),(2), представимое в виде (12).*

Доказательство. Докажем, что функция, определенная соотношением (23), является решением задачи (1), (2). Обозначим через

$$u_0(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)\Gamma(x-\xi,t)d\xi,$$

$$u_1(x,t) = \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta.$$

С помощью соотношений (8), (11) и неравенства (15), получим, что $Lu_0(x,t) = 0$.

Учитывая $f(x,t) = D_{0t}^{-\gamma}g(x,t)$, неравенство (15), соотношение (22) и формулу дробного интегрирования по частям [9, с. 15], рассмотрим следующее равенство

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{t\eta}^{-\gamma}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{\infty}\right) g(\xi,\eta)\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{t\eta}^{-\gamma}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta$$

$$= \int\limits_{0}^{t} g(x,\eta)\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}D_{t\eta}^{-\gamma}[\Gamma(0+,t-\eta) - \Gamma(0-,t-\eta)]d\eta$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}D_{t\eta}^{-\gamma}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta.$$

С учетом леммы 6, получим

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u_1(x,t) = (-1)^{n-1}f(x,t) + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}D_{t\eta}^{-\gamma}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta. \tag{24}$$

Также с учетом неравенства (15), $f(x,t) = D_{0t}^{-\gamma} g(x,t)$, формулы дробного интегрирования по частям и закона композиции дробного интегро-дифференцирования [9, с. 15], имеем

$$D_{0t}^{\alpha} u_1(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta) D_{t\eta}^{\alpha-\gamma} \Gamma(x-\xi, t-\eta) d\xi d\eta. \tag{25}$$

Таким образом из (24), (25) в силу (8) и (11) следует, что

$$Lu_1(x,t) = f(x,t).$$

Теперь покажем, что функция $u(x,t)$, определенная соотношением (23), удовлетворяет условию (2). Из леммы 10, неравенства (15) и (21) имеем

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_0(x,t) = \tau(x),$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_1(x,t) = 0,$$

откуда следует, что $u(x,t)$ удовлетворяет условию (2). □

6. Теорема единственности

Теорема 2. *В классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} t^{1-\alpha} u(x,t) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right) = 0, \tag{26}$$

где ρ — положительная постоянная, существует не более одного регулярного решения задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть $h_r(x)$ функция, определяемая следующим образом

$$h_r(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le r, \\ 0, & |x| \ge r+1 \end{cases} \tag{27}$$

и

$$0 \le h_r(x) \le 1, |\frac{d^j}{dx^j} h_r(x)| \le \text{const},$$

$$\frac{d^j}{dx^j} h_r(x) = 0 \text{ при } |x| \notin (r, r+1), \tag{28}$$

где $j = \overline{1, 2n}$, const - постоянная, не зависящая от x и r.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = h_r(x) D_{t\eta}^{-\chi} \Gamma(x,t), \quad \chi > 0.$$

Пусть $u(x,t)$ - решение однородной задачи (1), (2) (т.е. $f(x,t) = 0,\ \tau(x) = 0$).

Домножим уравнение (1) на функцию $v(x-\xi, t-\eta)$ и проинтегрируем

$$\int_0^t \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x-\xi, t-\eta) Lu(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

$$= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x-\xi, t-\eta) D_{0\eta}^{\alpha} u(\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+(-1)^n\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x-\xi,t-\eta)\frac{\partial^{2n}u(\xi,\eta)}{\partial\xi^{2n}}d\xi d\eta.$$

Из формулы дробного интегрирования по частям [9, с.15]

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{\mu}h(s)ds=\int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{\mu}g(s)ds,\ \mu\le 0$$

и так как

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^{2n}}h_r(\xi)D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta)$$

$$=\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(2n)!}{j!(2n-j)!}\frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}}h_r(\xi)\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta)+h_r(\xi)\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^{2n}}D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta),$$

в силу свойств функции $h_r(\xi)$ (28) получим

$$0=\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x-\xi,t-\eta)\left[D_{0\eta}^{\alpha}+(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^{2n}}\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)u(\xi,\eta)h_r(\xi)\left[D_{t\eta}^{\alpha}+(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^{2n}}\right]D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta$$

$$+(-1)^n\int\limits_0^t\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\frac{\partial^j\left(D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta)\right)}{\partial\xi^j}\frac{\partial^{2n-1-j}u(\xi,\eta)}{\partial\xi^{2n-1-j}}\Big|_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon}d\eta$$

$$+(-1)^n\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)u(\xi,\eta)\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(2n)!}{j!(2n-j)!}\frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}}h_r(\xi)\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}D_{t\eta}^{-\chi}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ и если $u(x,t)$ является решением однородной задачи (1), (2), то из (18), (27) и леммы 6 следует, что при $|x|<r$

$$D_{0t}^{-\chi}u(x,t)=(-1)^{n-1}\int\limits_0^t\int\limits_{r<|\xi|<r+1}u(\xi,\eta)\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(2n)!}{j!(2n-j)}\frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}}h_r(x)\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\Gamma(x-\xi,t-\eta)d\xi d\eta.$$

Из (15) получим, что

$$|D_{0t}^{-\chi}u(x,t)|\le C\int\limits_0^t\int\limits_{r<|\xi|<r+1}|u(\xi,\eta)|\exp\left(-\sigma\frac{|x-\xi|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}}{(t-\eta)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}}}\right)d\xi d\eta,\qquad(29)$$

где $\sigma<\sigma_0=\left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}}\cos\frac{1-n}{2n-\alpha}\pi$. Из (26) следует, что при $t<t_0=\left(\frac{\sigma_0}{\rho}\right)^{\frac{2n-\alpha}{\alpha}}$ интеграл в правой части (29) стремится к нулю при $r\to\infty$. Таким образом $u(x,t)\equiv 0$ для $x\in\mathbb{R}$ и $t<t_0$.

Далее покажем, что $u(x,t)=0$ для любого $t>0$. Предположим, что $u(x,t)\not\equiv 0$ при $t>0$. Обозначим через $t_1=\inf\{t: u(x,t)\neq 0\}$. Таким образом, из доказанного следует, что $t_1\geq t_0$. Рассмотрим функцию $v(x,t)=u(x,t_1+t)$. Учитывая сделанное предположение и определение t_1 для любого $\varepsilon>0$ найдется значение x такое, что

$$v(x,\varepsilon)\neq 0. \tag{30}$$

Так как $u(x,t)\equiv 0$ при $0<t<t_1$, то $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=D_{t_1t}^{\alpha}u(x,t)=D_{0t}^{\alpha}v(x,t)$. Отсюда следует, что $v(x,t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}v(x,t)=0,\ \ 0<t<t_0$$

и условию (26). Таким образом из доказанного выше следует, что $v(x,t)\equiv 0$, по крайней мере для $0<t<t_1$, а это противоречит (30). Следовательно предположение не верно и $u(x,t)\equiv 0$ для любого $t>0$. $\square$

References

[1] A. M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology*, Moscow:Vysshaya shkola, 1995. (Russian) Zbl 0991.35500

[2] O. A. Ladyzhenskaya, *On the uniqueness of the solution of Cauchy's problem for a linear parabolic equation,* Mat. Sb., **27(69)**:2 (1950), 175–184. (Russian) MR0040542

[3] L. Cattabriga, *Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n,* Rend. Semin. Mat. Univ. Padov, **28** (1958), 376—401. MR0116149

[4] A. N. Kochubei, *Fractional-order diffusion*, Differential Equations, **26**:4 (1990), 485—492. MR1061448

[5] A. V. Pskhu, *The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order*, Izvestiya: Mathematics, **73**:2 (2009), 351–392. MR2532450

[6] O. P. Agrawal, *A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain,* Computers and Structures, **79** (2001), 1497–1501.

[7] A. A. Voroshilov, A. A. Kilbas, *The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative,* Differential equations, **42**:5 (2006), 638—649. MR2292158

[8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* **204** of North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006. MR2218073

[9] A. V. Pskhu, *Partial differential equations of fractional order,* Moscow: Nauka, 2005. (Russian) MR2330051

[10] M. V. Plekhanova, *Start control problems for fractional order evolution equations,* Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **1**:3 (2016), 15—36. MR3583439

[11] E. A. Romanova, V. E. Fedorov, *Resolving operators of a linear degenerate evolution equation with Caputo derivative. The sectorial case,* Mathematical notes of NEFU, **23**:4 (2016), 58–72. Zbl 06862759

[12] M. V. Plekhanova, *Solvability of control problems for degenerate evolution equations of fractional order,* Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **2**:1 (2017), 53—65. MR3653291

[13] E. M. Wright, *On the coefficients of power series having exponential singularities,* J. London Math. Soc., **8**:1 (1933), 71–79. MR1574787

[14] E. M. Wright, *The generalized Bessel function of order greater than one,* Quart. J. Math., Oxford Ser., **11** (1940), 36–48. MR0003875

Karasheva Liana Leonidovna
Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS,
Shortanova str., 89-A
360000,Nalchik, Russia
E-mail address: k.liana86@mail.ru