S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 728–732 (2018) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2015.15.058 MSC 13A99

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПАР ПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ С ЦОКОЛЕМ $\Omega_{2n}^{+}(2^m)$

В.И. ЗЕНКОВ

Abstract. In theorem 1 for $Soc(G) = \Omega_{2n}^{+}(2)$, $n \geq 3$ and $S \in Syl_2(G)$ subgroup $min_G(S,S) = \langle S \bigcap S^g \mid |S \bigcap S^g|\ is\ minimal\ \rangle$ is constructed. In theorem 2 it is proved that if $Soc(G) = \Omega_{2n}^{+}(2^m)$ and for primary subgroups A and B we have $min_G(A,B) \neq 1$, then $m = 1$, we can assume that A and B are subgroups of $S \in Syl_2(G)$, $|G : Soc(G)| = 2$, involution from $G - Soc(G)$ induces the graph automorphism on $Soc(G)$ and $min_G(S,S) \subseteq A \cap B$.

Keywords: finite group, nilpotent subgroup, intersection of subgroups.

1. Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Определим $M_G(A,B)$ как множество минимальных по включению пересечений вида $A \bigcap B^g$, $g \in G$, а $m_G(A,B)$ как подмножество минимальных по порядку элементов из $M_G(A,B)$. Тогда $m_G(A,B) \subseteq M_G(A,B)$ по определению и для подгрупп $min_G(A,B) = \langle m_G(A,B) \rangle$ и $Min_G(A,B) = \langle M_G(A,B) \rangle$ имеет место включение $min_G(A,B) \leq Min_G(A,B)$.

Если G — простая неабелева группа, в которой A и B — примарные подгруппы, то, согласно [1, теорема 1] имеем $Min_G(A,B) = min_G(A,B) = 1$.

Zenkov, V.I., On intersections of primary subgroups pairs in finite group with socle $\Omega_{2n}^{+}(2^m)$.

Работа выполнена при финансовой помощи Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы поддержки ведущих научных университетов России (соглашение 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) (теорема 2) .

Поступила 20 июня 2017 г., опубликована 18 июня 2018 г.

Если же группа G — почти простая, то в [3, теорема В(2б)] показано, что $min_G(A,B) \neq 1$ для серий подгрупп $Aut(L_n(2))$, $n \geq 3$, $\Omega^+_{2n}(2)\langle\tau\rangle$ где τ — инволюция, индуцирующая графовый автоморфизм на $\Omega^+_{2n}(2)$, в которых A и B — 2-подгруппы. Более того, в работе [4, теорема 2] приведено описание с точностью до сопряженности всех пар примарных подгрупп A и B в почти простой группе G при условии, что число $|A||B|$ нечетно и $min_G(A,B) \neq 1$, а в работе [5, теорема 2] приведено описание с точностью до сопряженности всех пар примарных подгрупп A и B в $Aut(L_n(2))$, $n \geq 3$, при условии, что $min_G(A,B) \neq 1$.

Целью настоящей работы является описание с точностью до сопряженности всех пар примарных подгрупп A и B конечной группы G с $Soc(G) \simeq \Omega_{2n}(2^m)$, $n \geq 3$, таких, что $min_G(A,B) \neq 1$.

Определяющим моментом в этом описании является вычисление инварианта $min_G(S,S)$, для силовской 2-подгруппы S группы $G = Soc(G)\langle\tau\rangle$, где $Soc(G) \simeq \Omega^+_{2n}(2)$, $n \geq 3$ и инволюция τ индуцирует графовый автоморфизм на $Soc(G)$. Это вычисление составляет содержание теоремы 1. А в теореме 2, основываясь на результатах теоремы 1, приводится описание пар A, B примарных подгрупп из G с условием $min_G(A,B) \neq 1$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, $Soc(G) = \Omega^+_{2n}(2)$, $n \geq 3$, S— силовская подгруппа из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $min_G(S,S) \neq 1$;

(2) $S \in Syl_2(G)$, $G = Soc(G)\langle\tau\rangle$ где инволюция τ индуцирует графовый автоморфизм на $Soc(G)$ и соответствующую симметрию на схеме Дынкина для $\Omega^+_{2n}(2)$, действующую тривиально на $(n-2)$ точках и переставляющую оставшиеся две вершины схемы Дынкина между собой так, что соответствующие им параболические подгруппы P_1 и $P_2 = P_1^\tau$ в пересечении дают параболическую подгруппу P с фактором Леви, изоморфным $L_{n-1}(2)$ и $O_2(P) = min_G(S,S)$.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, $Soc(G) = \Omega^+_{2n}(2^m)$, $n \geq 3$, S — силовская 2-подгруппа из G, A и B — примарные подгруппы из G.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $min_G(A,B) \neq 1$;

(2) $m = 1$, $G = Soc(G)\langle\tau\rangle$, где инволюция τ индуцирует графовый автоморфизм на $Soc(G)$ и, с точностью до сопряженности, подгруппы A и B являются надгруппами $min_G(S,S)$.

2. Обозначения и предварительные сведения

Обозначения, в основном, общепринятые. Часть из них можно найти в [7] и [8].

Лемма 1 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда* $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.

Лемма 2 [9, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа из G, B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда* $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.

Лемма 3 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = 1$.

Лемма 4 [6, теорема 2]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и*

$$\min_G(A,B) \neq 1.$$

Тогда A и B — 2-подгруппы и либо $q=9$, либо q — простое число Мерсенна.

Лемма 5 [3, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа, M — p-локальная подгруппа из G, такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2, такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2, такие, что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$ и $P_1 \geq Q_1$, а $P_2 \geq Q_2$.*

Лемма 6 [10, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_1 \trianglerighteq G_2$, и $G_2 \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\bar{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \bigcap \overline{(G_1 \bigcap B^g)}^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \bigcap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.

Из (1) следует (2).

Допустим, что в группе G выполняется условие (1). Тогда из теоремы B(2б) в [3] следует, что $G = Soc(G)\langle\tau\rangle \simeq O^+_{2n}(2)$, $n \geq 3$, где инволюция τ индуцирует графовый автоморфизм на $Soc(G)$. Поэтому, без ограничения общности, $\tau \in S$ и, согласно [11, §8] инволюцию τ можно выбрать так, чтобы $C_{Soc(G)}(\tau) \simeq O_{2n-1}(2)$.

Можно считать, что $C_S(\tau) \in Syl_2(C_G(\tau))$.

Согласно [3, теорема B(2б)] имеем $min_{C_G(\tau)}(C_S(\tau), C_S(\tau)) = \langle\tau\rangle$.

Тогда, по лемме 5 $S \bigcap S^g = \langle\tau\rangle$ для некоторого элемента g из G. Поэтому $\langle\tau\rangle \leq min_G(S,S)$. Согласно [7, с. XVI, таблица 7] изоморфизм $\Omega^+_{2n}(2) \simeq D_n$ влечет, что действие τ на параболических подгруппах из $\Omega^+_{2n}(2)$ определяет подстановку на схеме Дынкина для D_n, где, в обозначениях [7, с. XVI, таблица 7] соответствующая подстановка переставляет вершины с номерами $n-1$ и n, действуя на оставшихся вершинах тривиально. Это означает, что τ переставляет соответствующие этим вершинам максимальные параболические подгруппы P_1 и P_2, нормализуя их пересечение $P = P_1 \bigcap P_2$ с фактором Леви для P, изоморфным $A_{n-2}(2) \simeq L_{n-1}(2)$. Так как соответствующая τ подстановка на схеме Дынкина для $Soc(G) \simeq \Omega^+_{2n}(2)$ действует тривиально на $(n-2)$ точках, $\overline{\tau}$ индуцирует внутренний автоморфизм на $\overline{N} = N_G(P)/O_2(N_G(P)) \simeq L_{n-1}(2)$.

Покажем, что $\overline{\tau} = \overline{1}$. Действительно, если это не так, то $\tau \notin O_2(N_G(P))$. Следовательно, $O_2(N_G(P)) \bigcap S^g \leq S \bigcap S^g = \langle\tau\rangle$. Так как, по предположению, $\tau \notin O_2(N_G(P))$, то $O_2(N_G(P)) \bigcap S^g = 1$. По лемме 6, где $G_1 = N_G(P)$, $G_2 = O_2(N_G(P))$, $A = S$ и $B = S^g$, с учетом того, что $L_{n-1}(2)$ — группа характеристики два, содержащая пару силовских 2-подгрупп с тривиальным пересечением, имеем $S \bigcap S^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с условием $min_G(S,S) \neq 1$. Следовательно, $\tau \in O_2(N_G(P))$ и поэтому $\langle\tau^{N_G(P)}\rangle \leq min_G(S,S)$. Очевидно, что $\langle\tau^{N_G(P)}\rangle \leq O_2(N_G(P))$.

С другой стороны, согласно [4, лемма 6] для корневых подгрупп X_{r_i} порядка два, соответствующих при $i = 1,2$ параболическим подгруппам P_1 и

P_2 и $U = S\bigcap Soc(G)$ имеем $U\bigcap U^{n_i} = X_{r_i}$ для некоторого $n_i \in Soc(G)$ и $\langle X_{r_i}^U\rangle = O_2(P_i)$. Подгруппы $O_2(P_i)$ абелевы, а подгруппа $O_2(P)$ неабелева, поэтому $X_{r_i} \nleq Z(O_2(P))$, иначе $X_{r_i}^U \leq Z(O_2(P))$. Противоречие с неабелевостью $O_2(P)$.

Рассмотрим подгруппу $X_{r_i}^{u\tau}$, где $u \in U$. Поскольку $O_2(P_i)\lhd U$ и $Z(O_2(P))\lhd U$, то $X_{r_i}^u < P_i$, но $X_{r_i}^u \nleq Z(O_2(P)) = O_2(P_1)\bigcap O_2(P_2)$. Тогда $X_{r_i}^{u\tau} \leq O_2(P_{\bar{i}})$, где $\bar{i}$ — дополнение i в $1, 2$. Следовательно, $X_{r_i}^{u\tau} \neq X_{r_i}$ ни для какого $u \in U$. Поэтому $C_S(X_{r_i}) = C_U(X_{r_i})$.

Допустим, что $D = S\bigcap S^{n_i} > X_{r_i}$. Так как $U\bigcap U^{n_i} = X_{r_i}$, то $|D| = 4$. Но тогда $C_S(X_{r_i}) \geq D$ и $C_S(X_{r_i}) > C_U(X_{r_i})$. Противоречие. Следовательно, $X_{r_i} \in min_G(S, S)$. Но тогда $O_2(P) = \langle O_2(P_1), O_2(P_2)\rangle \leq min_G(S, S)$. Кроме того, $\langle\tau\rangle \leq min_G(S, S)$. Поэтому $min_G(S, S) \geq O_2(N_G(P))$. Если допустить, что есть элемент $D \in m_G(S, S)$ и $D \nleq O_2(N_G(P))$, то, повторив рассуждения выше при доказательстве $\overline{\tau} = \overline{1}$, где требовалось только, чтобы $\langle\tau\rangle \in m_G(S, S)$, получаем противоречие. Поэтому $min_G(S, S) = O_2(N_G(P))$.

Импликация (2) влечет (1) следует из [3, теорема B(2б)]. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Докажем, что из (1) следует (2).

Из (1) и [3, теорема B(2б)] следует, что A и B — 2-подгруппы. Без ограничения общности можно считать, что A и B лежат в S. Пусть $D \in m_G(S, S)$. Тогда $D = S\bigcap S^g$ для некоторого g из G и, согласно теореме 1, $|D| = 2$. Так как $D = S\bigcap S^g \geq A\bigcap B^g$, то $2 = |D| = |S\bigcap S^g| \geq |A\bigcap B^g|$. Но условие $min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что $|A\bigcap B^g| > 1$. Поэтому $D = A\bigcap B^g$. Следовательно, $D \leq min_G(A, B)$. В силу произвольности D имеем $min_G(S, S) \leq min_G(A, B) \leq A$. Аналогично и $min_G(S, S) \leq min_G(A, B) \leq B$. Значит, A и B являются надгруппами $min_G(S, S)$ и из (1) в (2) доказано.

Докажем, что из (2) следует (1). Так как выполняется условие (2), то A и B являются надгруппами $min_G(S, S)$. По теореме 1 имеем $min_G(S, S) = O_2(N_G(B))$, где $\overline{N} = N_G(B)/O_2(N_G(B)) \simeq L_{n-1}(2)$, $n \geq 3$, для соответствующей параболической подгруппы B. Для доказательства того, что из (2) следует (1), достаточно показать, что $min_G(min_G(S, S), min_G(S, S)) \neq 1$. Допустим, что это утверждение ложно. Тогда в группе G найдется элемент h, такой, что $min_G(S, S)\bigcap(min_G(S, S))^h = 1$, что эквивалентно тому, что
$O_2(N_G(B))\bigcap O_2(N_G(B))^h = 1$. Так как $\overline{N} \simeq L_{n-2}(2)$, то $min_{\overline{N}}(\overline{S}, \overline{S}) = 1$. Следовательно, согласно [3, лемма 3.1] имеем $min_G(S, S) = 1$. Противоречие. Теорема доказана.

References

[1] V.D. Mazurov, V.I. Zenkov, *On Intersections of Sylow Subgroups in Finite Groups*, Algebra i logika, **35**:4 (1996), 424–432. MR1444428

[2] V.I. Zenkov, *Intersections of Abelian Subroups in Finite Groups*, Mat. zametki, **56**:2 (1994), 150–152. MR1308932

[3] V.I. Zenkov, *Intersection of Nilpotent Subgroups in Finite Groups*, Fund. and Appl. Math., **2**:1 (1996), 1–92. MR1788997

[4] V.I. Zenkov, Y.N. Nuzhin, *On Intersections of Pimary Subgroups of Odd Order in Finite Almost Simple Groups*, Fund. and Appl. Math., **9**:6 (2014), 115–123.

[5] V.I. Zenkov, *On Intersections of Primary Supgroups in Group Aut*$(L_n(2))$*, I*, Tr. of Mathematics and Mechanics Institute UrD RAS, **21**:1 (2015), 105–111.

[6] V.I. Zenkov, *On Intersections of Two Nilpotent Subgroups in Finite Groups with Socle* $L_2(q)$, Sib. Math. Journal, **57**:6 (2016), 1280–1290. MR3613999

[7] J.H. Convay [et. al], *Atlas of Finite Groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[8] D. Gorenstein *Finite Simple Groups. Introduction to its Classification*, Moscow, 1996.

[9] A.R. Jamali, M. Viseh, *On Nilpotent Subgroups Containing Nontrivial Normal Subgroups*, J. of Group Theory, **13**:4 (2010), 411–416. MR2653528

[10] V.I. Zenkov, *On Intersections of Nilpotent Subgroups in Finite Symmetric and Alternative Groups*, Tr. of Mathematics and Mechanics Institute UrD RAS, **19**:3 (2013), 145–149.

[11] M. Aschbaher, G.M. Seitz, *Involutions in Chevalley Groups over Fields of Even Order*, Nagoya Mathematical Journal. **63** (1976), 1–91.

Viktor Ivanovich Zenkov
N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskoi street, 16,
620049, Ekaterinburg, Russia
Yeltsin Ural Federal University,
Mira street, 19,
Ekaterinburg, Russia
E-mail address: V1I9Z52@mail.ru