S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 733–740 (2018) УДК 519.17

DOI 10.17377/semi.2018.15.059 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ГРАФА ШИЛЛА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$

И.Н. БЕЛОУСОВ

Abstract. Automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$ are described. It is proved that a distance-regular graph with this intersection array is not vertex-transitive.

Keywords: automorphism, distance-regular graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u, см. [1]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$ (см. [2]).

Belousov, I.N., Automorphisms of Shilla graph with intersection array $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061-П..

Поступила 20 марта 2017 г., опубликована 19 июня 2018 г.

В [3] изучены дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу с параметрами (115,18,1,3). С помощью теоремы 1 из [3] получаются

Предложение 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(115,18,1,3)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(576,115,18,24)$, $(484,115,18,30)$ *или* $(392,115,18,40)$;

(2) *диаметр* Γ *равен* 3, Γ *имеет массив пересечений* $\{115,96,16;1,8,92\}$ *и спектр* $115^1, 23^{217}, 3^{713}, -9^{805}$;

(3) *диаметр* Γ *равен* 4 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$.

Предложение 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(115,18,1,3)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,23\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=5$ *и* $\alpha_1(g)=15,55$, *либо* $p=23$ *и* $\alpha_1(g)=23$;

(2) Ω *является* l*-кокликой*, $1\le l\le 13$, $p=3$, l *сравнимо с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g)=24s+23-5l\neq 0$;

(3) $\Omega=a^{\perp}$ *для некоторой вершины* $a\in\Omega$ *и* $p=2$.

Заметим, что граф Γ с массивом пересечений $\{115,96,16;1,8,92\}$ является графом Шилла с $a=23$ и $b=5$. В данной работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{115,96,16;1,8,92\}$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115,96,16;1,8,92\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,23,31\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо*

(*i*) $p=31$, $\alpha_1(g)=124$, $\alpha_2(g)=1364$ *и* $\alpha_3(g)=248$ *или* $\alpha_1(g)=496$, $\alpha_2(g)=248$ *и* $\alpha_3(g)=992$, *либо*

(*ii*) $p=7$, $\alpha_1(g)=28(3s-8l+1)$, $\alpha_2(g)=28(59-9s+4l)$ *и* $\alpha_3(g)=56(3s+2l+1)$, $l\le 2, s\le 7$, *либо*

(*iii*) $p=2$, $\alpha_1(g)=8(3s-4l)$ *и* $\alpha_3(g)=8(6s+2l+5)$;

(2) Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, *либо* $p=5$, $|\Omega|=1$, $\alpha_1(g)=60s-160l+35$ *и* $\alpha_3(g)=120s+80l-80$, *либо* $p=23$, $|\Omega|=11$, $\alpha_1(g)=23(12s+32t+15)$ *и* $\alpha_3(g)=23(24s-16t)$;

(3) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p\le 11$.

Результаты теоремы 1 уточняются в случае, когда окрестности вершин в графе сильно регулярны с параметрами $(115,18,1,3)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115,96,16;1,8,92\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(115,18,1,3)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *— непустой граф. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,5,7,23,31\}$ *и либо*

(1) Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, *либо* $p=5$ *и* $|\Omega|=1$, *либо* $p=23$ *и* $|\Omega|=11$, *либо*

(2) Ω *является* 2*-кликовым расширением вполне регулярного графа* Δ *с параметрами* $(v', 9, 0, 4)$ *диаметра, большего* 2, $p = 2$.

Следствие. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$ *не является вершинно симметричным.*

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$. Тогда $v = 1 + 115 + 1380 + 240 = 1736 = 8 \cdot 7 \cdot 31$. По предложению 4.4.6 из [3] порядок клики L из Γ не больше 13.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$. *Тогда для чисел пересечения графа* Γ *верны равенства*
(1) $p^1_{11} = 18$, $p^1_{12} = 96$, $p^1_{22} = 1092$, $p^1_{23} = 192$, $p^1_{33} = 48$;
(2) $p^2_{11} = 8$, $p^2_{12} = 91$, $p^2_{13} = 16$, $p^2_{22} = 1096$, $p^2_{23} = 192$, $p^2_{33} = 32$;
(3) $p^3_{12} = 92$, $p^3_{13} = 23$, $p^3_{22} = 1104$, $p^3_{23} = 184$, $p^3_{33} = 32$.

Лемма 2. [4, §3] *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ — *индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ и неглавными собственными значениями 3 и -5. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $d - 3 \le w(18-d)/(115-w) \le d + 5$, в частности, число вершин в коклике не больше 25. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени 6 на w вершинах, то $w \ge 23$.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ диаметра d на n вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \ge 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $k = p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I — единичная матрица порядка $d + 1$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. §

3.7 [5]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$ *и спектром* $115^1, 23^{217}, 3^{713}, -9^{805}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 217, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 713, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$,

$$\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/80,$$
$$\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + 2\alpha_3(g))/60 - 31/3.$$

Если $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 217$ *и* $\chi_2(g) - 713$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 217 & 217/5 & 0 & -217/10 \\ 713 & 93/5 & -31/3 & 713/15 \\ 805 & -63 & 28/3 & -161/6 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/5 - \alpha_3(g)/10)/8$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (345\alpha_0(g) + 9\alpha_1(g) - 5\alpha_2(g) + 23\alpha_3(g))/(56 \cdot 15)$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1736 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + 2\alpha_3(g))/60 - 31/3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [6]. □

До конца работы пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что для произвольной вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ — регулярный граф степени 23 на 240 вершинах.

Лемма 4. *Если* Ω *— пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 31$, $\alpha_1(g) = 124$, $\alpha_2(g) = 1364$ *и* $\alpha_3(g) = 248$ *или* $\alpha_1(g) = 496$, $\alpha_2(g) = 248$ *и* $\alpha_3(g) = 992$;

(2) $p = 7$, $\alpha_1(g) = 28(3s - 8l + 1)$, $\alpha_2(g) = 28(59 - 9s + 4l)$ *и* $\alpha_3(g) = 56(3s + 2l + 1)$, $l \le 2, s \le 7$;

(3) $p = 2$, $\alpha_1(g) = 8(3s - 4l)$ *и* $\alpha_3(g) = 8(6s + 2l + 5)$.

Доказательство. Для $i > 0$ положим $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $1736 = 2^3 \cdot 7 \cdot 31$, то $p = 2, 7$ или 31.

Пусть $p = 31$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 56$, $\chi_1(g) = 31(2w_1 - w_3)/80$, поэтому $w_3 = 80l + 2w_1$. Далее, $\chi_2(g) = 31(w_1 + 2(80l + 2w_1) - 20)/60$, $w_1 = 4(3s - 8l + 1)$, $w_2 = 4(4l + 11 - 9s)$ и $w_3 = 8(3s + 2l + 1)$. Отсюда либо $l = 0, s = 0$, $w_1 = 4$, $w_2 = 44$ и $w_3 = 8$, либо $l = 0, s = 1$, $w_1 = 16$, $w_2 = 8$ и $w_3 = 32$. $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 42$, $\alpha_2(g) = 798 - 98l - 210s$.

Пусть $p = 7$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 248$, $\chi_1(g) = 7(2w_1 - w_3)/80$, поэтому $w_3 = 80l + 2w_1$. Далее, $\chi_2(g) = 7(w_1 + 2(80l + 2w_1))/60 - 31/3$, $w_1 = 4(3s - 8l + 1)$, $w_2 = 4(59 - 9s + 4l)$ и $w_3 = 8(3s + 2l + 1)$. Отсюда $l \le 2, s \le 7$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (2w_1 - w_3)/40$ нечетно, и $w_3 = 2w_1 + 40l + 20$. Далее, число $\chi_2(g) = (w_1 + 16l - 54)/6$ нечетно, поэтому $w_1 = 4(3s - 4l)$ и $w_3 = 4(6s + 2l + 5)$. Лемма доказана. □

В леммах 5–6 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 17$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, *то либо* $p = 5$, $|\Omega| = 1$, $\alpha_1(g) = 60s - 160l + 35$ *и* $\alpha_3(g) = 120s + 80l - 80$, *либо* $p = 23$, $|\Omega| = 11$, $\alpha_1(g) = 23(12s + 32t + 15)$ *и* $\alpha_3(g) = 23(24s - 16t)$;

(2) *если* $[a] \subset \Omega$ *для некоторой вершины* a, *то* $p \leq 5$ *и* $|\Omega| \neq 116$.

Доказательство. Пусть Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ. Тогда $116|\Omega| \leq 1736$ и $|\Omega| \leq 14$.

Если $|\Omega| = 1$, то p делит 115 и 240, поэтому $p = 5$, $\chi_1(g) = (2w_1 - w_3 + 2)/16$ сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому $w_3 = 80l + 2w_1 - 30$. Далее, $\chi_2(g) = (5 + w_1 + 2(80l + 2w_1 - 30) - 124)/12$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $w_1 = 12s - 32l + 7$ и $w_3 = 24s + 16l - 16$.

Пусть $|\Omega| > 1$. Тогда p делит 115, $241 - |\Omega|$ и $34 - |\Omega|$, поэтому $p = 23$ и $|\Omega| = 11$. Далее, $w_1 + w_2 + w_3 = 75$, $\chi_1(g) = 23(2w_1 - w_3)/80 + 11/8$, поэтому $w_3 = 2w_1 - 10l$, $23l + 11$ делится на 8, $l = 8t + 3$ и $w_3 = 2w_1 - 80t - 30$. Теперь $\chi_2(g) = (275 + 23(w_1 + 2(2w_1 - 80t - 30)) - 620)/60 = 23(w_1 - 32t - 15)/12$, поэтому $w_1 = 12s + 32t + 15$, $w_3 = 24s - 16t$ и $w_2 = 75 - (12s + 32t + 15) - (24s - 16t) = 60 - 36s - 16t$.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Пусть $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$. Тогда орбита $u^{\langle g \rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликой. Допустим, что $|\Omega| = 116$. Тогда $|\Gamma - \Omega| =$ ‘620 и $p = 2, 3, 5$. Для вершины $b \in [a]$ имеем $|[b] - a^{\perp}| = 96$, поэтому $p = 2, 3$. Так как $p^2_{13} = 16$, то $p \neq 3$. Так как $p^3_{33} = 32$, то для вершины w со свойством $d(w, w^g) = 3$ имеем $a \in \Gamma_3(w) \cap \Gamma_3(w^g)$, противоречие. Поэтому $\alpha_3(g) = 0$. Аналогично, $p^1_{33} = 48$, $p^2_{33} = 32$, поэтому $d(w, w^g) \neq 1, 2$ для вершины $w \in \Gamma_3(a)$. Значит, $|\Omega| \neq 116$.

Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Omega$. Если $[e] \cap \Gamma_3(a)$ содержится в Ω, то для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(e)$ подграф $[u] \cap \Omega = [a] \cap [e]$. Противоречие с тем, что для $b \in [a] \cap [e]$ имеем $|[b] \cap (\Gamma_2(a) - \Omega)| \leq 18$.

Пусть $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$. Тогда $[u] \cap \Omega = [a] \cap [u]$ и для вершины $e \in \Gamma_2(a) \cap \Omega$ подграф $[e] \cap \Gamma_2(a)$ содержится в Ω. В этом случае $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ – регулярный граф степени 91 и $Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 92 вершин из Ω для любой вершины $z \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$. Далее, для вершин $b \in [a] \cap [e]$ и $w \in [b] - \Omega$ подграф $[e] \cap [w]$ содержит β вершин из $\Omega(a)$ и $8 - \beta$ вершин из $\Gamma_3(a) - \Omega$.

Пусть $p \geq 7$. Тогда подграф $[a] \cap [u]$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликой. Если $[a] \cap [u]$ является кокликой, то $p = 7$ и для различных вершин $b, c \in [a] \cap [u]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a и 7 вершин из $u^{\langle g \rangle}$, противоречие с тем, что тогда $|[a]| \geq 8 \cdot 19$. Значит, $[a] \cap [u]$ является кликой для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$. Так как порядок клики в Γ не больше 13, то $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$. Далее, $[b] - u^{\langle g \rangle}$ содержит $11p$ вершин вне Ω и $p = 7$. Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Omega$. Если $|[e] \cap \Gamma_3(a) - \Omega| = 7$, $y \in [e] \cap \Gamma_3(a) - \Omega$, то $[e] \cap [y]$ содержит не менее 12 вершин из Ω, поэтому $y^{\langle g \rangle}$ является 7-кликой и $\Omega(e) \cap [y]$ является объединением изолированных клик (причем не содержит 6-клик). Пусть $b \in [a] \cap [e]$, $w \in [b] - \Omega$ и подграф $[e] \cap [w]$ содержит β вершин из $\Omega(a)$. С помощью рассуждений из предыдущего абзаца получим $7(8 - \beta) \leq 14$ и $\beta \geq 6$, поэтому $[a] \cap [w] = [e] \cap [w]$. Противоречие с тем, что $|[b] \cap (\Gamma_2(a) - \Omega)| \leq 18$. Итак, любая вершина из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ смежна точно с 3 вершинами из $\Gamma_3(a)\cap\Omega$ и $2|\Gamma_2(a)\cap\Omega| = 92|\Gamma_3(a)\cap\Omega|$ и $46(230-7\beta) = 1380-7\gamma$, противоречие. Итак, $p \leq 5$.Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Если Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии, не большем двух в Γ, то p не больше* 11.

Доказательство. Если $p > 17$, то содержащая a связная компонента Δ графа Ω является вполне регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda' = 18$, $\mu' = 8$. Далее, 8 делит $k'(k'-19)$ и $|\Delta| \geq 1 + k' + k'(k'-19)/8$. Если 8 делит $k'-19$, то $k' = 8l+3$, $l \leq 13$ и p делит $112 - 8l = 8(14-l)$, противоречие. Если 8 делит k', то $k' = 8l$, $l \leq 14$ и p делит $115 - 8l$, поэтому $(l,p) = (4,83),(6,67),(7,59),(9,43),(12,19)$.

Пусть $e \in \Omega\cap\Gamma_3(a)$. Если $p > 19$, то $[e]\cap\Gamma_3(a)$ содержится в Ω. Так как $p^3_{33} = 32$, то $\Gamma_3(a)\cap\Gamma_3(e)$ содержится в Ω, поэтому $\Gamma_3(a)$ содержится в Ω. Отсюда Γ содержится в Ω, противоречие. Значит, $p = 19$, $k' = 96$ и $[a]-\Omega$ является 19-кликой, противоречие.

Заметим, что в случае $p \geq 11$ для любой вершины $u \in \Gamma-\Omega$ подграф $[u]\cap\Omega$ является кликой. Поэтому $|[u]\cap\Omega| \leq 20-p$.

Пусть $p = 13$ (случай $p = 17$ рассматривается аналогично). Тогда $\lambda_\Omega = 5, 18$, $\mu_\Omega = 8$, степени вершин в Ω равны $24, 37, 50, 63, 76, 89, 102$. Так как $k_3 = 240$, то число $|\Omega\cap\Gamma_3(a)|$ сравнимо с 6 по модулю 13. Если степень вершины a в Ω равна 102 то для вершины $u \in [a]-\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[u]$ является кликой порядка, не меньшего 8, так как степень u в графе $[a]-\Omega$ не больше 10, противоречие. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $26|\Omega|$, но не больше $7(1736-|\Omega|)$, поэтому $|\Omega| \leq 467$.

Допустим, что Δ — связная компонента графа Ω с $\lambda_\Delta = 5$. Тогда Δ является вполне регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda' = 5$, $\mu' = 8$. Так как $p^3_{33} = 32$, то $|\Delta| \geq 1 + k' + k'(k'-6)/8 + (1+10+6)$, поэтому $k' = 24$ и число вершин в Δ сравнимо с 5 по модулю 13. Так как $v = 1736$ сравнимо с 7 по модулю 13, то Ω — несвязный граф. Для вершины $e \in \Omega-\Delta$ степень вершины из Δ в графе $\Gamma_3(e)$ не больше 23, противоречие.

Зафиксируем вершины $e \in \Gamma_3(a)\cap\Omega$, $c \in \Omega(e)\cap\Gamma_2(a)$. Тогда $[a]\cap[c]$ содержит 8 вершин из Ω, поэтому $\Omega(e)$ содержит не менее 14 вершин из $\Gamma_2(a)$. Далее, степень e в графе $\Gamma_3(a)\cap\Omega$ равна 10 или 23, $|\Gamma_2(a)\cap[e]| = |\Gamma_2(e)\cap[a]|$, поэтому степени в Ω вершин a и e различаются не более чем на 13. Так как $p^1_{33} = 48$, то степени в Ω вершин a и $b \in \Omega(a)$ различаются не более чем на 13.

Пусть степень a в графе Ω не меньше 76. Тогда $|\Omega| \geq 1 + 76 + 76\cdot 44/8 + (1+10+6) = 512$, противоречие. Значит, степень любой вершины в графе Ω не больше 63, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $52|\Omega|$, но не больше $7(1736-|\Omega|)$, поэтому $|\Omega| \leq 189$. Повторив указанные рассуждения несколько раз, получим, что степень любой вершины в графе Ω не больше 37 и $|\Omega| \leq 137$.

Допустим, что вершина $u \in \Gamma-\Omega$ смежна с 7 вершинами из Ω. Тогда для двух вершин b_1, b_2 из $u\cap\Omega$ подграф $[b_1]\cap[b_2]$ содержит 5 вершин из $u\cap\Omega(c)$ и 13 вершин из $u^{\langle g\rangle}$. Противоречие с тем, что Ω содержит не менее 24 вершин из $\Omega(b_1)$, не менее $6\cdot 18 = 108$ вершин из $\Omega_2(b_1)$ и не менее $1+10+6$ вершин из $\Omega_3(b_1)$, противоречие.

Теперь число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $78|\Omega|$, но не больше $6(1736-|\Omega|)$, поэтому $|\Omega| \leq 124$. В случае равенства $|\Omega| = 124$ граф Ω регулярен степени 37 и каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 6 вершинами из Ω. Далее, число ребер между $\Omega(a)$ и $[a]-\Omega$, деленное на 13, равно 30. Теперь $|\Omega_2(a)| = (30\cdot 31 + 7\cdot 18)/8 = 132$, противоречие. Итак, $|\Omega| \le 111$.

Пусть степень c в графе Ω равна 24, y — число вершин из $\Omega(c)$ степени 37 в Ω и $k_i = |\Omega_i(c)|$. Тогда $|[c]-\Omega| = 91$, $\Omega(c)$ содержит 8 вершин из $[a]$ и $[c]\cap[e]$ содержит не более 15 вершин из Ω. Поэтому $\Omega(c)$ содержит 3 или 16 вершин из $\Gamma_3(a)$. Пусть $d \in \Omega\cap\Gamma_3(c)$, $e \in \Omega\cap\Gamma_3(c)\cap\Gamma_3(d)$.

Если $\Omega(c)$ — регулярный граф степени 5, то число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ равно $31y + 18(24-y) = 8k_2$. Отсюда $13y = 8(k_2-54)$, $k_2 = 54, 67$ и $y = 0, 8$ соответственно. Если $k_3 = 19$, то $\Omega\cap\Gamma_3(c)$ — регулярный граф степени 10, противоречие с тем, что $\Omega(e)\cap\Gamma_3(c)$ содержит не более 2 вершин из $\Omega_2(d)\cap\Gamma_3(c)$ и не более 5 вершин из $\Omega\cap\Gamma_3(c)\cap\Gamma_3(d)$. Значит, $k_2 = 54$, $y = 0$ и $k_3 = 32$. Так как $\Omega\cap\Gamma_3(c)$ содержат по 11 вершин из $d^\perp, e^\perp$, то $\Omega\cap\Gamma_3(c)$ — регулярный граф степени 10 и Ω — регулярный граф степени 24. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно $91|\Omega|$, но не больше $6(1736-|\Omega|)$, поэтому $|\Omega| \le 98$, противоречие с тем, что $|\Omega| \ge 25+54+22$.

Итак, Ω — регулярный граф степени 37 и $|\Omega| \le 98$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \ge 1 + 37 + 37\cdot 18/8 + 22$. Лемма и теорема 1 доказаны. $\square$

Докажем теорему 2. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. По предложению 2 либо

(1) Ω является l-кокликой, $1 \le l \le 13$, $p = 3$, l сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 24s + 23 - 5l \ne 0$, либо

(2) $\Omega = a^\perp$ для некоторой вершины $a \in \Omega$ и $p = 2$.

В случае (1) μ-подграфы из Ω являются 2-кокликами и Ω — ректаграф с параметрами $(v', l, 0, 2)$, $l = 4, 7$. Заметим, что диаметр Ω не больше 3, поэтому $l = 7$. Так как $b_3 = 16$ в графе Γ, то вершина из $\Omega_2(a)$ смежна с 2 или 4 вершинами из $\Omega_3(a)$ и степени вершин в $\Omega_2(a)$ равны 3 или 1, противоречие с тем, что $|\Omega_2(a)| = 21$.

В случае (2) подграф Ω является 2-кликовым расширением вполне регулярного грава Δ с параметрами $(v', 9, 0, 4)$. Так как сильно регулярный граф с параметрами $(28, 9, 0, 4)$ не существует (нарушается граница Цветковича для коклик), то диаметр Δ не меньше 3. Теорема 2 доказана.

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 1736$, по теореме 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 31\}$.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 31 из G, g — элемент простого порядка $p < 31$ из $C_G(f)$, то либо Ω — пустой граф и $p = 2$, либо $p \le 5$;*

(2) *$S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен группе $L_3(5)$ порядка $2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 31$ и $\bar{T}_a \cong E_{16} : L_4(2)$ или группе $L_5(2)$ порядка $2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 31$ и $\bar{T}_a \cong E_{25} : GL_2(5)$.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 31 из G, g — элемент простого порядка $p < 31$ из $C_(f)$. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 124$ или $\alpha_1(f) = 496$. В любом случае $\alpha_1(f)$ не делится на 7. Если Ω — пустой граф, то по теореме 1 $p = 2$, $\alpha_1(g) = 8(3s-4l)$ и $\alpha_3(g) = 8(6s+2l+5)$ делятся на 31. Поэтому $s = 31t + 20$, $l = 31m + 15$, $\alpha_1(g) = 8\cdot 31(3t-4m)$ и $\alpha_3(g) = 8\cdot 31(6t+2m+5)$. Отсюда $\alpha_1(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 16\cdot 31$ и $\alpha_3(g) = 40\cdot 31$.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega| = 31n$. Далее, $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g)+2\alpha_1(g)-\alpha_3(g))/80$ и $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + 2\alpha_3(g))/60 - 31/3$, поэтому $10\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 80 и $25\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + 2\alpha_3(g)$ делится на 20. Отсюда $\alpha_3(g)$ делится на 8, поэтому $\alpha_3(g)$ делится на $31 \cdot 8p$. Если $p \geq 7$, то $\alpha_3(g) = 0$.

Если $p = 11$, то число $31n$ сравнимо с 9 по модулю 11, поэтому $n = 11l + 1$, $|\Omega| = 341l + 31$. Далее, $165(11l + 1) + \alpha_1(g)$ делится на 80 и $\alpha_1(g)$ делится на $31 \cdot 11 \cdot 5$. Если $\alpha_1(g) = 0$, то $11l + 1$ делится на 16 и $l > 5$, противоречие. Если же $\alpha_1(g) = 31 \cdot 11 \cdot 5$, то $|\Omega| = 31$, $\chi_2(g) = (44 - 31)/3$, противоречие.

Если $p = 7$, то число $31n$ делится на 7, поэтому $n = 7l$, $|\Omega| = 217l$. Далее, $1085l + \alpha_1(g)$ делится на 40 и $\alpha_1(g)$ делится на $31 \cdot 7 \cdot 5$. Если $\alpha_1(g) = 0$, то l делится на 8, поэтому $l = 0$, противоречие. Если же $\alpha_1(g) = 31 \cdot 11 \cdot 5$, то $l + 1$ делится на 8, поэтому $l = 7$, противоречие.

Так как $v = 8 \cdot 7 \cdot 31$, то $\pi(S(G)) \subseteq \{2, 7, 31\}$. Ввиду утверждения (1) леммы $|S(G)|$ не делится на 31.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [7, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(31)$, $L_3(5)$, $L_2(32)$, $L_2(5^3)$, $G_2(5)$, $L_5(2)$, $L_6(2)$.

Группы $L_2(31)$, $L_2(32)$, $L_2(5^3)$, $G_2(5)$, $L_6(2)$ не содержат собственных подгрупп индекса, делящего $56 \cdot 31$. Группа $L_5(2)$ содержит подгруппу $E_{16} : L_4(2)$ индекса 31. Группа $L_3(5)$ содержит подгруппу $E_{25} : GL_2(5)$ индекса 31. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство следствия. Имеем $|S(G) : S(G)_a| = 14, 28, 56$, поэтому $S(G)$ содержит единственный главный фактор V группы G, являющийся 7-группой, причем элемент f порядка 31 из G действует без неподвижных точек на V. Ввиду [8] неприводимый $L_5(2)$-модуль в характеристике 7 определен над $GF(7)$ и имеет размерность 30, 94 или 280. Отсюда $|V| = 7^{30}$ и $|V_a| = 7^{29}$. Аналогично и для группы $L_3(5)$ имеем $|V| = 7^{30}$ и $|V_a| = 7^{29}$. Так как порядок силовской 7-подгруппы из S_{115} равен 7^{17}, то подгруппа порядка 7^{12} из V_a поточечно фиксирует $[a]$, противоречие с леммой 5. Следствие доказано.

References

[1] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh , *On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **285** (2014), 128–135. MR3363313

[2] P.J. Cameron, *Graphs, Permutation Groups*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[3] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra*, Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407. MR1241907

[4] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. MR2766516

[5] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Ivan Nikolaevich Belousov

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

S.Kovalevskaya str., 16,

620990, Yekaterinburg, Russia

E-mail address: i_belousov@mail.ru