S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 74–85 (2018) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2018.15.009 MSC 20K01

О ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ ДИЭДРА И ЛИНЕЙНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ 2

А.А. ШЛЕПКИН

Abstract. The paper establishes the structure of periodic groups and Shunkov groups saturated with groups consisting of the groups $\mathfrak{M}$ consisting of the groups $L_2(q)$, where $q \equiv 3, 5 \pmod 8$ and dihedral groups with Sylow 2-subgroup of order 2. It is proved that a periodic group saturated with groups from $\mathfrak{M}$ is either isomorphic to a prime Group $L_2(Q)$ for some locally-finite field Q, or is isomorphic to a locally dihedral group with Sylow 2-subgroup of order 2. Also, the existence of the periodic part of the Shunkov group saturated with groups from the set $\mathfrak{M}$ is proved, and the structure of this periodic part is established.

Keywords: group saturated with a set of groups.

1. Введение

В данной статье продолжены исследования начатые в [12]. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A} = \{L_2(q),\ q > 3,\ q = 3,\ 5\ (mod\ 8)\}$, $\mathfrak{B}$ – множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, либо изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая либо изоморфна группе $L_2(Q)$*

Shlepkin, A.A., On groups saturated with dihedral groups and linear groups of degree 2.

Поступила 29 июня 2017 г., опубликована 30 января 2018 г.

для подходящего локально конечного поля Q, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.

2. Определения, известные факты, вспомогательные утверждения

Определение 1 ([9], [10]). *Группа G называется группой Шункова (сопряженно-би- примитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.*

Определение 2 ([16]). *Группа G называется локально диэдральной группой (локально конечным диэдром), если она является объединением цепочки вложенных друг в друга конечных групп диэдра.*

Определение 3 ([14]). *Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X.*

Определение 4 ([4]). *Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$. Тогда множество $\mathfrak{R}$ будем называть насыщающим множеством для группы G.*

Определение 5. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись*

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{X}$$

означает, что группа G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Соответственно запись

$$G \mathrel{\widetilde{\notin}} \mathfrak{X}$$

означает, что группа G не изоморфна никакой группе из множества $\mathfrak{X}$.

Определение 6. *Пусть G — группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через*

$$\mathfrak{X}_G(K) = \{H \mid K \le H \le G, H \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{X}\}$$

будем обозначать множество всех подгрупп H группы G, содержащих подгруппу K и изоморфных группам из множества $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то

$$\mathfrak{X}_G(1) = \{H \mid H \le G, H \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{X}\}$$

будет обозначать множество всех подгрупп H группы G, изоморфных группам из множества $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе G идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Определение 7 ([2], с. 90, 150). *Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$.*

Предложение 1 ([2], теорема 23.1.1). *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа .*

Предложение 2 ([17]). *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Предложение 3 (Известные факты). *Пусть G – периодическая группа, x, y – две различные инволюции из G. Тогда*

1. *$\langle x, y\rangle = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle = \langle y\rangle$ – конечная группа диэдра, где $d = xy$, $d^x = d^y = d^{-1}$.*

2. *Если элемент d нечетного порядка, то группа диэдра $\langle x, y\rangle$ содержит один класс сопряженных инволюций – x^G.*

3. *Если элемент d четного порядка, то группа диэдра $\langle x, y\rangle$ содержит три класса сопряженных инволюций – x^G, z^G, $(zx)^G$, где $\langle z\rangle$ – силовская 2-подгруппа из $\langle d\rangle$.*

Предложение 4 ([1]). *Конечное инвариантное множество элементов конечного порядка в любой группе порождает конечную нормальную подгруппу.*

Предложение 5 ([11], лемма 6.16). *Пусть G — группа с конечной инволюцией и сильно вложенной подгруппой B, j — инволюция из B, v — инволюция из $G \setminus B$, $H = B^v \cap B$. Тогда*

1. *В группе G все инволюции сопряжены, j^B – множество всех инволюций из B.*

2. *$B = C_G(j)H$, подгруппа H действует сопряжениями на множестве всех инволюций из B транзитивно. Любой смежный класс $C_G(j)b$, $b \in B$, содержит точно один строго вещественный относительно v элемент.*

3. *Каждый элемент $g \in G \setminus B$ обладает представлением $g = cr$, где $c \in C_G(j)$, а r – инволюция из $G \setminus B$.*

Предложение 6 ([19]). *Пусть G – периодическая группа, насыщенная группами диэдра. Тогда G – локально диэдральная группа и $G = L \leftthreetimes \langle t\rangle$, где L – локально циклическая группа, t – инволюция, и для любого $x \in L$, $x^t = x^{-1}$.*

Предложение 7 ([7]). *Пусть G — периодическая группа, насыщенна группами из множества $\{L_2(p^n)\}$. Тогда $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Предложение 8 ([12], теорема 1). *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, состоящим из одной группы A_5 и конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2, либо изоморфна группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Предложение 9 ([12], предложение 4). *Пусть G — группа Шункова, a — элемент простого порядка из G, x — инволюция из G. Тогда $\langle x, a\rangle$ — конечная группа.*

Предложение 10 ([12], предложение 7)**.** *Если в группе Шункова G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Предложение 11 ([5])**.** *Группа Шункова G, насыщенная группами диэдра, обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G)$ изоморфна локально диэдральной.*

Предложение 12 ([12], теорема 2)**.** *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, состоящим из одной группы A_5 и конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2, обладает периодической частью $T(G)$, которая либо изоморфна группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Предложение 13 ([7])**.** *Пусть группа Шункова G насыщенна группами из множества $\{L_2(p^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Предложение 14. *Пусть $G = L_2(q)$, где q — нечётное число, большее 3. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $|G| = (q-1)q(q+1)/2$.
2. *Если a — инволюция из G, то $C_G(a)$ — группа диэдра, и либо $|C_G(a)| = q+1$, либо $|C_G(a)| = q-1$.*
3. *Все инволюции из G сопряжены.*
4. *Если a, b — две неперестановочные инволюции из G, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$.*
5. *Если a, b — две различные инволюции из G, то $\pi(C_G(a) \cap C_G(b)) = \{2\}$.*

Доказательство. Утверждения 1– 3 хорошо известны, их доказательства можно найти, например, в [21]. Утверждения 4 – 5 вытекают из утверждения 3 и списка максимальных подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [20, стр. 377]).

Предложение доказано.

3. Доказательство Теоремы 1

Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 1. *Группа G бесконечна.*

Доказательство. Действительно, если G — конечная группа, то по условию насыщенности $G \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Следовательно, либо G изоморфна группе $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, либо G изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 2. *$\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ – бесконечное множество, где $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$ и существует такая группа $X \in \mathfrak{B}(1)$, что $X \not\leq Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{A}(1)$.*

Доказательство. То, что $\mathfrak{M}(1)$ бесконечное множество вытекает из леммы 1. В случае $\mathfrak{A}(1) = \varnothing$, G является локально диэдральой группой (предложение 6). Противоречие с тем, что G – контрпример. В случае $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$, G изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (предложение 7). Противоречие с тем, что G – контрпример. Если группы X из условия леммы не найдется, то в качестве насыщающго множества для группы G можно взять $\mathfrak{A}(1)$, и по предложению 7 G изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G – контрпример. □

Лемма 3. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из группы G. Из предложения 3 (пункт 1) вытекает, что $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо $R \in \mathfrak{A}(1)$, либо $R \in \mathfrak{B}(1)$. В каждом из этих случаев инволюции x, y сопряжены в R (предложения 14, 3 (пункт 2)). Так как R — подгруппа G, то инволюции x, y сопряжены в группе G. □

Лемма 4. *Пусть z – инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ – бесконечная локально диэдральная группа.*

Доказательство. Если $C_G(z)$ — конечная группа, то по предложению 2 и лемме 1 G – бесконечная локально конечная группа. Пусть X из заключения леммы 2, K – произвольная конечная подгруппа группы G. По условию насыщенности и лемме 2 $\langle X, K\rangle < H$, где $H \in \mathfrak{B}(1)$. Следовательно, H – группа диэдра, В силу произвольности выбора K как конечной подгруппы группы G получаем, что группа G насыщена группами диэдра, и G – локально диэдральная группа (предложение 6). Противоречие с тем, что G – контрпример.

Итак, $C_G(z)$ — бесконечная группа. Пусть K – конечная подгруппа из $C_G(z)$, отличная от группы $\langle z\rangle$. Ясно, что $\langle z, K\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, K\rangle \leq C_H(z) < H < G, \text{ где } H \in \mathfrak{A}(1).$$

Так как H изоморфна $L_2(q)$, то по предложению 14 $C_H(z)$ изоморфна конечной группе диэдра. Следовательно, группа $C_G(z)$ насыщена грппами диэдра. По предложению 6 $C_G(z)$ — бесконечная локально диэдральная группа. □

Зафиксируем некоторую инволюцию z из группы G.

Лемма 5. *$C_G(z) = C_L(z) < L < G$, где $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 4

$$C_G(z) = \{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\} -$$

счетная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, c_1\rangle < H_1, \text{где } H_1 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_1 \simeq L_2(q_1)$, где $q_1 \equiv 3, 5 \pmod 8$. Пусть n_1 – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_1} \notin H_1$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_1}(z), c_{n_1}\rangle < H_2, \text{ где } H_2 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_2 \simeq L_2(q_2)$, где $q_2 \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2|$. Предположим, что для $k \geqslant 2$ мы построили группу H_k. Пусть n_k – минимально возможное значение индекса n при котором $c_{n_k} \notin H_k$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_k}(z), c_{n_k}\rangle < H_{k+1}, \text{ где } H_{k+1} \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_{k+1} \simeq L_2(q_{k+1})$, где $q_{k+1} \equiv 3, 5 \pmod 8$, и $C_{H_k}(z) < C_{H_{k+1}}(z)$. По построению $|H_1| < |H_2| < \cdots < |H_k| < |H_{k+1}|$. Действуя подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность групп

$$H_1,\ H_2,\ \cdots\ , H_n,\ \cdots$$

со следующими свойствами : для любого n

$$H_n \simeq L_2(q_n), \text{где } q_n \equiv 3, 5 \pmod 8,$$

$$C_{H_1}(z) < C_{H_2}(z) <\ \cdots\ < C_{H_n}(z) <\ \cdots$$

и

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_{H_n}(z) = C_G(z).$$

Так как для любого $n > 2$, $C_{H_n}(z)$ содержит две неперестановочные инволюции, то по предложению 14 (пункты 2, 4) последовательность групп

$$H_2,\ \cdots\ , H_n,\ \cdots$$

превращается в цепочку вложенных друг в друга групп

$$H_2 <\ \cdots\ < H_n <\ \cdots .$$

Ясно, что

$$\cup_{n=2}^{\infty} H_n = L \ –$$

бесконечная, локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{A}(1)$. По предложению 7 $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной харатеристики. $\square$

Зафиксируем группу L, поле Q из утверждения леммы 5 и цепочку

$$H_2 <\ \cdots\ < H_n <\ \cdots$$

из доказательства леммы 5.

Лемма 6. *Для любой инволюции w из L, $C_G(w) = C_L(w) < L$.*

Доказательство. Действительно, для некоторого $x \in L$, $z^x = w$. Тогда $C_G(z)^x = C_{G^x}(z^x) = C_G(w)$. Так как $C_G(z)^x < L$, то $C_G(w) < L$. $\square$

Лемма 7. *L – сильно вложенная подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть $g \in N_G(L) \setminus L$. Возьмем такую группу H_n, что $|H_n| > |A_5|$. По условию насыщенности $\langle g, H_n\rangle \leq K$, где $K \in \mathfrak{A}(1)$. По лемме 5 $C_K(z) < L$. Поскольку $C_K(z)$ – группа диэдра порядка более 4, то $C_K(z)$ содержит неперестановочные инволюции v, w. По предложению 14 (пункт 6) $K = \langle C_K(v), C_K(w)\rangle$. По лемме 6 $C_K(w) < C_L(w) < L$ и $C_K(v) < C_L(v) < L$. Следовательно, $K < L$ и как следствие $g \in L$. Противоречие с выбором g. Итак, $N_G(L) = L$.

Пусть $g \in G \setminus L$, и w – инволюция из $L \cap L^g$. По лемме 6 $C_G(w) < L \cap L^g$. Очевидно, $C_G(w)$ содержит неперестановочные инволюции. Отсюда и из предложения 14 (пункт 6)получаем, что $L = L^g$, и в этом случае. как показано выше, $g \in L$. Противоречие с выбором g. $\square$

Лемма 8. *Пусть v – инволюция из $G \setminus L$. Тогда*

1. $L = C_L(z)H$, *где* $H = L \cap L^v$ *– группа без инволюций.*
2. *Для любого* $h \in H$, $h^v = h^{-1}$, *и* H *– абелева группа.*
3. $\pi(H) \cap \pi(C_L(z)) = \varnothing$.
4. $C_L(z) \cap H = 1$.

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из леммы 7 и предложения 5.

Докажем второе утверждение. Пусть $1 \neq h \in C_H(v)$. По лемме 3 для некоторого $g \in G$, $v^g = z$. Следовательно, $h^g \in C_G(z) < L$ (лемма 5). Так как $\langle h, h^g, z\rangle < H_n$, для некоторого n, то $h \in C_{H_n}(w)$ для некоторой инволюции $w \in H_n$ (предложение 14 (пунты 2,3)).

Ясно, что в этом случае $w \in L$. По условию насыщенности $\langle v, w, h\rangle < K$, где $K \simeq L_2(q)$, и $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Так как инволюции v, w не перестановочны, то по предложению 14 (пункт 4) $K = \langle C_K(v), C_K(w)\rangle$. Так как $\langle h\rangle$ – нормальная подгруппа в $C_K(v)$, и одновременно $\langle h\rangle$ – нормальная подгруппа в $C_K(w)$, то $\langle h\rangle$, очевидно, нормальная подгруппа в K, что невозможно. Таким образом, $C_H(v) = 1$, и поскольку $H \leftthreetimes \langle v\rangle$ – группа, то утверждение 2 доказано

Докажем утверждение 3. Предположим обратное, и пусть b – элемент простого порядка из H, и $|b| \in \pi(H) \cap \pi(C_L(z))$. Тогда $|b|$ – нечетное число и $C_L(b)$ содержит некоторую инволюцию w. Так как $b^v = b^{-1}$, то по условию насыщенности $\langle w, v, b\rangle < K$, где $K \simeq L_2(q)$ и $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Следовательно, $b \in C_K(w) \cap C_K(w^v)$. По предложению 14 (пункт 5) $w = w^v$. Но тогда $w \in L \cap L^v$, что невозможно.

Утверждение 4 – прямое следствие утверждений 1 – 3. $\square$

Завершим доказательство теоремы. По лемме 5 $L \simeq L_2(Q)$, где Q – локально конечное поле нечетной характеристики. По лемме 8 $L = C_L(z)H$, где H – абелева группа без инволюций, и $C_L(z) \cap H = 1$. Следовательно, либо H – локально циклическая группа, либо H – элементарная абелева p–группа, где p – характеристика поля Q. Но ни первое, ни второе невозможно ввиду того, что группа G изоморфна $L_2(Q)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

$\square$

4. Доказательство теоремы 2

Пусть G – контрпример к утверждению теоремы.

Лемма 9. *Группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то G обладает конечной периодической частью $T(G)$ (предложение 4). По условию насыщенности либо $T(G)$ изоморфна группе $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, либо $T(G)$ изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример. $\square$

Лемма 10. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ – *бесконечное множество, где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$ *и существует такая группа* $X \in \mathfrak{B}(1)$, *что* $X \not\leq Y$ *ни для какой группы* $Y \in \mathfrak{A}(1)$.

Доказательство. То, что $\mathfrak{M}(1)$ бесконечное множество вытекает из леммы 9. В случае $\mathfrak{A}(1) = \varnothing$ по предложению 11 G обладает периодическо частью $T(G)$ которая является локально диэдральой группой. Противоречие с тем, что G – контрпример. В случае $B(1) = \varnothing$, G обладает периодической частью $T(G)$ (предложение 13), и $T(G)$ изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q. Противоречие с тем. что G – контрпример. Если группы X из условия леммы не найдется, то в качестве насыщающего множества можно взять множество $\mathfrak{A}(1)$, и в данном случае, как отмечалось выше, G обладает периодической частью, которая изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (предложение 13). Противоречие с тем, что G – контрпример. □

Лемма 11. *Группа G не содержит собственных нормальных периодических подгрупп.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть N — нормальная периодическая подгруппа группы G.

Предположим, что N не содержит инволюций. Возьмем инволюцию $z \in G \setminus N$. Так как G – группа Шункова, то по предложению 9 для любого $b \in N$ группа $\langle z, z^b \rangle$ является конечной группой диэдра вида $\langle b_1 \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, где $b_1 = zz^b = zb^{-1}zb$. Поскольку N нормальная подгруппа группы G, то $b_1 \in N$. Если $z^b = z$, то $\langle z, b \rangle$ – конечная абелева группа. По условию насыщенности $\langle z, b \rangle < H$, $H \in \mathfrak{M}(1)$. Очевидно, $H \cap N$ – нормальная подгруппа группы H. Последнее означает, что H – не простая группа. Но тогда H – конечная группа диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2, и $b^z = b^{-1}$, что невозможно. Итак, для любого $b \in N, z^b \neq z$ и $C_N(z) = 1$. Так как $z^b = z^{b_1^k}$, то $z = z^{b_1^k b^{-1}}$, и по доказанному выше $b_1^k b^{-1} = 1$. Следовательно, $b = b_1^k$ и $b^z = b^{-1}$. По предложению 2 $N \leftthreetimes \langle z \rangle$ – локально конечная группа. Следовательно, N – локально конечная группа. Пусть $H \in \mathfrak{A}(1)$ (лемма 10). Тогда $H \simeq L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. По предложению 1 NH – локально конечная группа. Возьмем неединичный элемент $b \in N$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, H \rangle \leq K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Так как группа K содержит подгруппу H, то $K \in \mathfrak{A}(1)$ и $K \simeq L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Но $N \cap K$ – нормальная подгруппа группы K, что невозможно.

Предположим, что в N есть инволюция z. Если все инволюции из G находятся в N, то $N = T(G)$. Действительно, пусть b — элемент конечного порядка из группы G. По условию насыщенности $\langle b \rangle < H$, где $H \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, H порождается инволюциями, $H < N$ и $N = T(G)$. Противоречие с тем, что G – контрпример. Итак, в множестве $G \setminus N$ найдется инволюция v. По предложению 9 группа $\langle z, v \rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle z, v \rangle \leq H$, где $H \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $H \cap N$ – нормальная подгуппа группы H, то $H \in \mathfrak{B}(1)$. С другой стороны, $H \cap N$ содержит инволюцию z, а в группах из $\mathfrak{B}(1)$ нет собственных нормальных подгрупп, содержащих инволюции. Противоречие, которое завершает доказательство леммы. □

Лемма 12. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Поскольку в группе Шункова любые две инолюции порождают конечную группу (предложение 9), то доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство леммы 3. □

Лемма 13. *Множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит группу H такую, что $H \simeq L_2(q)$ и $q > 5$.*

Доказательство. Предположим, что для любой группы $H \in \mathfrak{A}(1)$, $H \simeq L_2(5)$. По лемме 10 и предложению 12 G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) \simeq L_2(5)$. Противоречие с тем, что G – контрпример. □

Лемма 14. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, z — инволюция из S. Тогда*

1. *S — элементарная абелева группа порядка 4 (четверная группа).*
2. *$C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$, которая является бесконечной локально диэдральной группой.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Если $|S| = 2$, то по предложению 10 любая конечная 2-подгруппа из G имеет порядок 2. Следовательно, в качестве насыщающего множества для группы G можно взять $\mathfrak{B}(1)$. По предложению 11 и лемме 9 $T(G)$ – бесконечная локально диэдральная группа. Противоречие с тем, что G – контрпример. Итак, $|S| > 2$. Если S – конечная группа, то все доказано ввиду предложения 10 и условия теоремы. Если S – бесконечная группа, то в ней найдется конечная подгруппа R такая, что $|R| > 4$. По условию насыщенности $R < H \in \mathfrak{A}(1)$. В этом случае R — четверная группа. Противоречие с выбором R. Пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2. Пусть K – конечная подгруппа из $C_G(z)$, отличная от $\langle z \rangle$ (пункт 1, доказанный выше, и лемма 12). Ясно, что $\langle z, K \rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, K \rangle < H < G \text{ и } H \in \mathfrak{M}(1).$$

Ввиду лемм 12, 10, $H \in \mathfrak{A}(1)$. Но в этом случае $C_H(z)$ – конечная группа диэдра и $\langle z, K \rangle < C_H(z)$. Так как $C_H(z) < C_G(z)$, то группа $C_G(z)$ насыщена группами диэдра и по предложению 11 она обладает периодической частью $T(C_G(z))$, которая является локально диэдральной группой. Осталось показать, что $T(C_G(z))$ – бесконечная группа. Пусть $T(C_G(z))$ – конечная группа. По лемме 13 $T(C_G(z))$ содержит элемент a такой, что $|a| = p$ – простое нечетное число. По лемме 11 и предложению 4 множество $a^G = \{a^g | g \in G\}$ бесконечно. По предложению 9, бесконечным будет следующее множество конечных групп – $\{\langle z, a^g \rangle | g \in G\}$. По условию насыщенности $\langle z, a^g \rangle \leq H_g$, где $H_g \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $\mathfrak{H}_g = \{H_g | g \in G\}$ – бесконечное множество. Так как $C_G(a^g)$ содержит инволюции (например, z^g), то H_g всегда можно выбрать так, что $H_g \in \mathfrak{A}(1)$, и $H_g \not\simeq L_2(5)$. Поскольку $T(C_G(z))$ конечная группа, то множество $\mathfrak{C}_g = \{C_{H_g}(z) | H_g \in \mathfrak{H}_g\}$ конечно. Отсюда вытекает следующее представление множества $\mathfrak{H}_g$ в виде конечного числа непересекающихся множеств

$$\mathfrak{H}_g = \mathfrak{H}_g^{(1)} \cup \cdots \cup \mathfrak{H}_g^{(n)},$$

где для любых двух групп H_{g_1}, H_{g_2} из множества $\mathfrak{H}_g^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $C_{H_{g_1}}(z) = C_{H_{g_2}}(z)$. Из предложения 14 (пункты 2,4) и того факта, что $H_g \not\simeq L_2(5)$ вытекает равенство $H_{g_1} = H_{g_2}$. Таким образом, $\mathfrak{H}_g^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – конечные множества и как следствие, конечным будет множество $\mathfrak{H}_g$. Противоречие с тем, что $\mathfrak{H}_g$ – бесконечное множесто. Пункт 2 доказан.

□

Зафиксируем инволюцию z из условия леммы 14.

Лемма 15. *$T(C_G(z)) = C_L(z) < L < G$, где $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 14 (пункт 2)

$$T(C_G(z)) = \{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\} -$$

счетная группа. Можно считать, что c_1 – неединичный элемент, не равный z. По условию насыщенности

$$\langle z, c_1\rangle < H_1, \text{где } H_1 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_1 \simeq L_2(q_1)$, где $q_1 \equiv 3, 5 \pmod 8$. Пусть n_1 – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_1} \notin H_1$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_1}(z), c_{n_1}\rangle < H_2, \text{ где } H_2 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_2 \simeq L_2(q_2)$, где $q_2 \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2|$. Предположим, что для $k \geqslant 2$ мы построили группу H_k. Пусть n_k – минимально возможное значение индекса n при котором $c_{n_k} \notin H_k$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_k}(z), c_{n_k}\rangle < H_{k+1}, \text{ где } H_{k+1} \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_{k+1} \simeq L_2(q_{k+1})$, где $q_{k+1} \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2| < \cdots < |H_k| < |H_{k+1}|$. Действуя подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность групп

$$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_n,\ \cdots$$

со следующими свойствами : для любого n

$$H_n \simeq L_2(q_n), \text{где } q_n \equiv 3, 5 \pmod 8,$$

$$C_{H_1}(z) < C_{H_2}(z) < \ \cdots \ < C_{H_n}(z) < \ \cdots$$

и

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_{H_n}(z) = T(C_G(z)).$$

Так как для любого $n > 1$, $C_{H_n}(z)$ содержит две неперестановочные инволюции, то по предложению 14 (пункты 2, 4) последовательность групп

$$H_2,\ \cdots, H_n,\ \cdots$$

превращается в цепочку вложенных друг в друга групп

$$H_2 < \ \cdots \ < H_n < \ \cdots .$$

Ясно, что

$$\cup_{n=2}^{\infty} H_n = L -$$

бесконечная, локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{A}(1)$. По предложению 13 $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Рассмотрим группу L из утверждения леммы 15. По лемме 13 группа $C_L(z)$ содержит элемент a такой, что $|a| = p$ – простое нечетное число. По лемме 11 множество $a^G = \{a^g | g \in G\} \not\subset L$. Пусть $b \in a^G \setminus L$. По условию насыщенности и предложению 9 $\langle z, b\rangle \leq H$, где $H \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $H \simeq L_2(q)$ и $q > 5$. Ясно, что $H \not< L$. Так как $z \in L \cap H$, то $C_H(z) < L \cap H$. Поскольку $|C_H(z)| > 4$, то $C_H(z)$ содержит две неперестановочные инволюции t, w. Так как все инволюции в L сопряжены, то $C_H(t) < L$ и $C_H(w) < L$. По предложению 14 (пункты 2, 4) $H < L$. Противоречие с выбором H.

$\square$

References

[1] A.P. Dicman, *O centre p-grupp*, V sb. Trudy seminara po teorii grupp, (1938), 30–34.

[2] M.I. Kargapolov, *Osnovy teorii grupp*, M.: Nauka, 1982. MR0677282

[3] Kourovskaya tetrad', *Nereshennye voprosy teorii grupp, 16 izdanie*, IM SO RAN, Novosibirsk, 2006.

[4] A.A. Kuznetsov, K.A. Filippov, *Gruppy, nasyshchennye zadannym mnozhestvom grupp*, Siberian Eltctronic Mathematical Repots, **8** (2011), 230–246. MR2876557

[5] A.G. Rubashkin, *Gruppy, nasyshchennye zadannymi mnozhestvami konechnyh grupp*, Dissertaciya kand. fiz. -mat. nauk, Krasnoyarsk, 2005.

[6] A.G. Rubashkin, K.A. Filippov, *O periodicheskih gruppah, nasyshchennyh gruppami $L_2(p^n)$*, Siberian Mathematical Journal, **46**:6 (2005), 1388–1392. MR2195037

[7] K.A. Filippov, *O periodicheskoj chasti gruppy SHunkova, nasyshchennoj $L_2(p^n)$*, Vestnik SibGAU, **1** (2012), 611–617.

[8] K.A. Filippov, *O periodicheskih gruppah, nasyshchennyh konechnymi prostymi gruppami*, Siberian Mathematical Journal, **53**:2 (2012), 430–438. MR2975946

[9] A.N. Ostylovskij, V.P. Shunkov, *O lokal'noj konechnosti odnogo klassa grupp s usloviem minimal'nosti*, V sb. Issledovaniya po teorii grupp, Krasnoyarsk, (1975), 32–48. MR0430080

[10] V.I. Senashov, V.P. Shunkov, *Gruppy s usloviyami konechnosti*, Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2001. MR2056640

[11] A.I. Sozutov, N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *Beskonechnye gruppy s involyuciyami*, Krasnoyarsk: Izd-vo SFU, 2011.

[12] A.A. Shlepkin, *O periodicheskih gruppah, nasyshchennyh gruppami diehdra i A_5* , Izvestiya Irkutskogo universiteta, **20** (2017), 96–108. Zbl 06778789

[13] A.K. Shlepkin *O sopryazhenno biprimitivno konechnyh gruppah s usloviem primarnoj minimal'nosti*, Algebra i Logika, **22**:2 (1983), 226–231. MR0750712

[14] A.K. Shlepkin, *Sopryazhenno biprimitivno konechnye gruppy, soderzhashchie konechnye nerazreshimye podgruppy*, Tret'ya mezhdunar. konf. po algebre. Sb. tez., Krasnoyarsk, 1993.

[15] A.K. Shlepkin *Gruppy Shunkova s dopolnitel'nymi ogranicheniyami*, Dissertaciya dok. fiz.–mat. nauk., Krasnoyarsk, 1999.

[16] A.K. Shlepkin, A.G. Rubashkin, *Ob odnom klasse periodicheskih grupp*, Algebra i Logika, **44**:1 (2005), 114–125. MR2165877

[17] V.P. Shunkov *O periodicheskih gruppah s pochti regulyarnoj involyuciej*, Algebra i Logika, **11**:4 (1972), 470–494. MR0320166

[18] A.A. Cherep, *Ob ehlementah konechnogo poryadka v biprimitivno konechnyh gruppah*, Algebra i Logika, **26**:4 (1987), 518–521. MR0963100

[19] Amberg B., *Periodic groups saturated by dihedral subgroups*, in: Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70–th birthday of Anatoly Yakovlev / ed. B. Amberg, L. Kazarin, Saint-Petersburg, (2010), 79–80.

[20] John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Roney-Dougal, *The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups*, Cambridge university press, 2013. Zbl 1303.20053

[21] Carter R. W., *Simple groups of Lie type*, New York: Wiley and Sons, 1972. MR0407163

Aleksei Anatolievich Shlepkin
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: shlyopkin@gmail.com