S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 741–758 (2018) УДК 514.74,517.977
DOI 10.17377/semi.2018.15.060 MSC 53D05,39B22

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ

В.А. КЫРОВ

Abstract. As is known, the geometry of the local maximum mobility is an n-dimensional pseudo-Euclidean geometry. In this paper, we find all the $(n+1)$-dimensional geometries of the local maximal mobility whose metric functions contain the metric function of pseudo-Euclidean geometry as an argument. Such geometries are: $(n+1)$-dimensional pseudo-Euclidean geometry, $(n+1)$-dimensional special extension of n-dimensional pseudo-Euclidean geometry, $(n+1)$-dimensional geometry of constant curvature on a pseudo sphere.

Keywords: pseudo-Euclidean geometry, functional equation, differential equation, metric function.

Введение

n-мерная геометрия локальной максимальной подвижности допускает группу движений размерности $n(n+1)/2$ [1]. Многие из таких геометрий хорошо известны. К их числу относятся: евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. Полной же классификации таких геометрий нет.

В работах [2, 3] Г.Г. Михайличенко дается полная классификация двумерных феноменологически симметричных (ФС) геометрий, которые являются геометриями локальной максимальной подвижности, т.е. фактически построена полная классификация двумерных геометрий локальной максимальной подвижности. Эта классификация, кроме хорошо известных геометрий (евклидова,

Kyrov, V.A., The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries.

Поступила 21 февраля 2018 г., опубликована 5 июля 2018 г.

псевдоевклидова, симплектическая, сферическая и др.), содержит и неизвестные геометрии (симплициальная, гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева). Заметим, что группы движений всех этих геометрий трехпараметрические. Методы, разработанные Михайличенко для классификации двумерных ФС геометрий неприменимы для классификации таких геометрий большей размерности.

В.Х. Лев занимался классификацией трехмерных ФС геометрий (геометрий локальной максимальной подвижности) [4], которая также содержит как известные геометрии, так и неизвестные. Методом Лева классификацию четырехмерных геометрий и геометрий более высокой размерности, ввиду больших технических сложностей, построить не удалось.

В.А. Кыровым разработан новый метод классификации ФС геометрий (геометрий локальной максимальной подвижности), названный методом вложения, который апробирован в работах [5, 6, 7]. Суть этого метода состоит в нахождении метрических функций всех ФС геометрий по известным метрическим функциям ФС геометрий размерности на единицу меньше, содержащих их внутри себя как аргумент. В настоящей работе с помощью метода вложения по известной метрической функции псевдоевклидовой n-мерной геометрии

$$g(i,j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2,$$

где i, j — произвольные две точки с координатами $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ и $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$ — ее сигнатура, из предположения аналитичности, находятся все $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности, метрические функции которых имеют вид:

$$f(i,j) = \chi(\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2, w_i, w_j),$$

$(x_i^1, \ldots, x_i^n, w_i)$ и $(x_j^1, \ldots, x_j^n, w_j)$ — координаты точек i и j $(n+1)$-мерного простанства. Эта задача имеет положительное решение [5], например, ее решениями являются геометрии с метрическими функциями:

$$f(i,j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(w_i - w_j)^2, \ \varepsilon = \pm 1,$$

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2w_i + 2w_j}.$$

Данная задача ранее была решена для случая $n = 2$ [6].

В данной статье задача о вложении решается аналитически, т.е. неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора.

Задача о вложении ранее также решалась в геометрии двух множеств (ГДМ) [8, 9]. Так по функции $g = x\xi$, задающей ФС ГДМ ранга (2,2), находится функция, задающая ФС ГДМ ранга (3,2):

$$f = x\xi + \eta,$$

где x — локальная координата произвольной точки первого моногообразия, а (ξ, η) — локальные координаты точки второго многообразия, которая оказалась единственной. Решение искалось в виде

$$f = \chi(x\xi, \eta).$$

Аналогично решаются задачи о вложении ФС ГДМ ранга (3,2) в ФС ГДМ ранга (4,2) и ФС ГДМ ранга (4,2) в ФС ГДМ ранга (5,2). Доказывается, что ФС ГДМ ранга (5,2) не существует.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим $(n+1)$-мерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению n-мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L, $n \geq 2$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi : R \times L \times L \to R$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. Ниже она называется метрической, причем метрические аксиомы могут и не выполняться. На точках эта функция выглядит так:

$$f(i,j) = \chi(g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))), \pi_2(h(i)), \pi_2(h(j))), \tag{1}$$

где i, j — произвольные две точки из M, причем $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1, \ldots, x^n)$, а координату в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (1) принимает следующий вид:

$$f = f(i,j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \tag{2}$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i^1, \ldots, x_i^n, x_j^1, \ldots, x_j^n)$ — метрическая функция псевдоевклидовой геометрий сигнатуры $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$:

$$\theta = \varepsilon_1 (x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x_i^n - x_j^n)^2, \tag{3}$$

причем для евклидовой геометрии $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n$, а для псевдоевклидовой геометрии знаки различные. $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$. Выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для метрической функции (2) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0. \tag{4}$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1). $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2). $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3). $\lambda(i, a) = i$, если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают ([2], §1). Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. $\dim G = (n+1)(n+2)/2$.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (1.2), являющихся двухточечными инвариантами $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида ([11], §16)

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_n\partial_{x^n} + W\partial_w, \tag{5}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x^1, \ldots, x^n, w)$, $W = W(x^1, \ldots, x^n, w)$, $\alpha = 1, \ldots, n$ — аналитические функции в U. Через операторы (5) записывается условие локальной инвариантности метрической функции ([11], §17):

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \tag{6}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем метрическая функция $f(i, j)$ определена и аналитична в $U(i) \times U(j)$.

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точки имеет нулевые координаты $(0, \ldots, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (5) и метрической функции ([12], гл. 11):

$$\left\{\begin{array}{c} X_1 = X_1(w) + D_1(X_1)(w)x^1 + \cdots + D_n(X_1)(w)x^n + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = X_n(w) + D_1(X_n)(w)x^1 + \cdots + D_n(X_n)(w)x^n + \cdots, \\ W = W(w) + D_1(W)(w)x^1 + \cdots + D_n(W)(w)x^n + \cdots, \end{array}\right. \tag{7}$$

$$f(\theta, w_i, w_j) = f(w_i, w_j) + D_1(f)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{11}(f)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \tag{8}$$

где, например, $X_\gamma(w) = X_\gamma(0, \ldots, 0, w)$, $D_\alpha(X_\gamma)(w) = \dfrac{\partial X_\gamma(x^1, \ldots, x^n, w)}{\partial x^\alpha}|_{x=0}$, $D_{\alpha\beta}(X_\gamma)(w) = \dfrac{\partial^2 X_\gamma(x^1, \ldots, x^n, w)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}|_{x=0}$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, а также $f(w_i, w_j) = f(0, w_i, w_j)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$, $D_1(f)(w_i, w_j) = \dfrac{\partial f(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta}|_{\theta=0}$. Основные результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность $U(k)$. Возьмем так же две точки $i, j \in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U(k), \quad \textit{причем} \;\; \langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle \in S_f \quad \forall i' \in U(i), \; \forall j' \in U(j).$$

Тогда метрическая функция $f(i, j)$, в аналитическом многообразии M задающая $(n+1)$-мерную геометрию локальной максимальной подвижности, в окрестности $U(i)\times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабом *преобразовании (аналитическая функция от метрической функции $\varphi(f) \to f$) имеет вид*

$$f(i,j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(w_i - w_j)^2, \tag{9}$$

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2w_i + 2w_j}, \tag{10}$$

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2w_i + 2w_j} + \varepsilon e^{2w_i - 2w_j} + \varepsilon e^{2w_j - 2w_i}. \tag{11}$$

Базисные операторы алгебр Ли групп движений геометрий с метрическими функциями (9) — (11) *следующие*:

$$X^\gamma = \partial_{x^\gamma},\ X^{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha x^\beta \partial_{x^\alpha} + \varepsilon_\beta x^\alpha \partial_{x^\beta}, \tag{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} X^\gamma = \partial_{x^\gamma},\ X^{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha x^\beta \partial_{x^\alpha} + \varepsilon_\beta x^\alpha \partial_{x^\beta}, \\ X^0 = -2x^1\partial_{x^1} - \cdots - 2x^n\partial_{x^n} + \partial_z,\ X^{n+\gamma} = -2x^\gamma x^1 \partial_{x^1} - \cdots \\ -(2(x^\gamma)^2 - \varepsilon_\gamma(\varepsilon_1(x_1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2))\partial_{x^\gamma} - 2x^\gamma x^n \partial_{x^n} + x^\gamma \partial_w, \end{array} \right. \tag{13}$$

(14)
$$\left\{ \begin{array}{c} X^\gamma = \partial_{x^\gamma},\ X^{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha x^\beta \partial_{x^\alpha} + \varepsilon_\beta x^\alpha \partial_{x^\beta}, \\ X^0 = -2x^1\partial_{x^1} - \cdots - 2x^n\partial_{x^n} + \partial_z,\ X^{n+\gamma} = -2x^\gamma x^1 \partial_{x^1} - \cdots \\ -(2(x^\gamma)^2 - \varepsilon_\gamma(\varepsilon_1(x_1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) - \varepsilon\varepsilon_\gamma e^{-4w})\partial_{x^\gamma} - 2x^\gamma x^n \partial_{x^n} + x^\gamma \partial_w, \end{array} \right.$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$, $\alpha > \beta$.

Заметим, что выражение (9) задает либо евклидову $(n+1)$-мерную геометрию ($\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$), либо псевдоевклидову $(n+1)$-мерную геометрию (различные $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon$). Выражение (10) задает особое $(n+1)$-мерное расширение либо евклидовой n-мерной геометрии ($\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n$), либо псевдоевклидовой n-мерной геометрии (различные $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$). Выражение (11) задает метрические функции геометрий постоянных кривизн на псевдосфере, например, геометрию Лобачевского ($\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$). Чтобы в этом убедиться, перейдем к новым координатам $x^\alpha \to x^\alpha$, $e^{-2w} \to w$. Тогда будем иметь:

$$f(i,j) = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon w_i^2 + \varepsilon w_j^2}{w_i w_j}.$$

При $n = 2$ и 3 об этом говорится в монографии ([2], гл.1).

Рассмотрим многообразие M размерности $n+2$ с метрической функцией (10):

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i + 2w_j},$$

причем $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, w)$ — локальные координаты произвольной точки. Легко заметить [10], что на подмногообразии многообразия M, задаваемом уравнением

$$w = 0$$

реализуется псевдоевклидова геометрия с метрической функцией (9), а на подмногообразии, задаваемом уравнением

$$x^{n+1} = e^{-2w}$$

— геометрия с метрической функцией, получаемой из (11): $f'(i,j) = f(i,j) - 2\varepsilon$.

2. Доказательство первой части теоремы

Искомая метрическая функция (2) является двухточечным инвариантом $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений, поэтому условие локальной инвариантности (6) в явном виде записывается так:

(15)
$$2\big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j))\big]\tfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} + \\ + W(i)\tfrac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\tfrac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0.$$

Заметим, что выражение (15) выполняется тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$, где $U(k)$ — координатная окрестность. Ниже доказываются вспомогательные утверждения в классе аналитических функций, но по методу доказательств они также справедливы для дифференцируемых функций класса C^2 .

Лемма 1. *В тождестве* (15) *справедливо неравенство*

$$\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть в окрестности $U(i) \times U(j)$ выполняется равенство

$$\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) = 0, \tag{16}$$

где $l = 1, \ldots, n$. Дифференцируя это равенство по переменной w_i, а результат по переменным $x_j^1, \ldots, x_j^n$, будем иметь $X'_{1w} = 0, \ldots, X'_{nw} = 0$, следовательно $X_l = X_l(x^1, \ldots, x^n)$, $l = 1, \ldots, n$. В результате выражение (16) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений n-мерной псевдоевклидовой геометрии с метрической функцией (3). Это уравнение имеет следующие решения: $X_l = c_{lk}\varepsilon_k x^k + c_l$, $c_l, c_{lk} = -c_{kl} = \mathrm{const}$, $k, l = 1, \ldots, n$ [5].

Запишем теперь тождество (15) с учетом (16)

$$W(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0. \tag{17}$$

Пусть сначала $W = 0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений имеет вид:

$$X = (c_{1k}\varepsilon_k x^k + c_1)\partial_{x^1} + \cdots + (c_{nk}\varepsilon_k x^k + c_n)\partial_{x^n}.$$

Придавая произвольным постоянным c_l, c_{lk} значения 0 и 1, получаем $n(n+1)/2$ базисных операторов, а должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие.

Пусть теперь $W \neq 0$. Тогда от выражения (17) переходим к тождеству

$$\frac{W(i)}{W(j)} = \varphi(\theta, w_i, w_j), \tag{18}$$

для чего левую и правую части делим на произведение $W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} \neq 0$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, w_i, w_j) = -\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$. Дифференцируем (18) по x_i^l и по x_j^l:

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(j)} = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\varphi_\theta, \; -\frac{W(i)W'_{x^l}(j)}{W^2(j)} = -2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\varphi_\theta,$$

затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(i)} = \frac{W'_{x^l}(j)}{W(j)} = \alpha^l = \mathrm{const}.$$

Таким образом, получаем $W'_{x^l} = \alpha^l W$. После интегрирования имеем

$$W = c(w)e^{\alpha^1 x^1 + \cdots + \alpha^n x^n} \neq 0.$$

Полученное подставляем в (18)

$$e^{\alpha^1 u^1 + \cdots + \alpha^n u^n} = \varphi(\varepsilon_1 (u^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (u^n)^2, w_i, w_j) c(w_j)/c(w_i),\ u^l = x_i^l - x_j^l.$$

Продифференцируем это равенство по u^l:

$$\alpha^l e^{\alpha^1 u^1 + \cdots + \alpha^n u^n} = 2\varepsilon_l u^l \varphi'_\theta(\varepsilon_1 (u^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (u^n)^2, w_i, w_j) c(w_j)/c(w_i).$$

Затем равенство с индексом l умножаем на $\varepsilon_k u^k$ и вычитаем из него равенство с индексом k, умноженное на $\varepsilon_l u^l$:

$$(\alpha^l \varepsilon_k u^k - \alpha^k \varepsilon_l u^l) e^{\alpha^1 u^1 + \cdots + \alpha^n u^n} = 0.$$

Из последнего следует $\alpha^l = 0$. Тогда $W = c(w)$. Подставляя найденное в (17), имеем

$$c(w_i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + c(w_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int dw/c(w) = \overline{w}$. Тогда в новых координатах $W = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений имеет вид:

$$X = (c_{1k}\varepsilon_k x^k + c_1)\partial_{x^1} + \cdots + (c_{nk}\varepsilon_k x^k + c_n)\partial_{x^n} + \partial_{\overline{w}}.$$

Видно, что этот оператор является линейной комбинацией $n(n+1)/2 + 1$ базисных операторов, которых должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие. $\square$

Лемма 2. *В тождестве* (15)

$$W \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть в (15) $W = 0$. Тогда из леммы 1 следует $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} = 0$, что противоречит условию невырожденности (4). $\square$

Лемма 3. *В тождестве* (15) *для функции* $W(x^1, \ldots, x^n, w)$ *справедливо неравенство:*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n}\right)^2 = 0,$$

откуда следует

$$W = W(w) \neq 0.$$

В тождестве (15) осуществим замену координат: $\displaystyle\int dw/W(w) = \overline{w}$. Очевидно, в новых координатах $W(\overline{w}) = 1$. В результате (15) примет вид

$$2\big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j))\big]\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} +$$

$$+\frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_j} = 0.$$

Деля последнее тождество на ненулевую производную $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial\theta}$, получаем функциональное уравнение

$$\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)(X_1(i)-X_1(j))+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)(X_n(i)-X_n(j))=\phi(\theta,\overline{w}_i,\overline{w}_j), \tag{19}$$

где

$$\phi(\theta,\overline{w}_i,\overline{w}_j)=-\Big(\frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{w}_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial\overline{w}_j}\Big)/2\frac{\partial f(i,j)}{\partial\theta}.$$

Уравнение (19) дифференцируем по x_i^l, по x_j^l:

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_l(X_l(i)-X_l(j))+\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)X'_{1x^l}(i)+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)X'_{nx^l}(i)=\\ \qquad=2\varepsilon_l(x_i^l-x_j^l)\phi'_\theta(\theta,\overline{w}_i,\overline{w}_j),\\ \varepsilon_l(X_l(i)-X_l(j))+\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)X'_{1x^l}(j)+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)X'_{nx^l}(j)=\\ \qquad=2\varepsilon_l(x_i^l-x_j^l)\phi'_\theta(\theta,\overline{w}_i,\overline{w}_j).\end{array}\right. \tag{20}$$

Далее из первого уравнения вычитаем второе:

$$\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)(X'_{1x^l}(i)-X'_{1x^l}(j))+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)(X'_{nx^l}(i)-X'_{nx^l}(j))=0.$$

Теперь полученное дифференцируем дважды в следующем порядке: по x_i^k и x_j^s; x_i^k и $\overline{w}_j$:

$$\varepsilon_k X'_{kx^lx^s}(j)+\varepsilon_s X'_{sx^lx^k}(i)=0,\ X'_{kx^l\overline{w}}=0,\ k,l,s=1,\ldots,n.$$

Разделяем переменные:

$$X'_{kx^l\overline{w}}=0,\ \varepsilon_k X'_{kx^lx^s}=c_{kls},\ c_{kls}=-c_{slk}=\mathrm{const},\ c_{kls}=c_{ksl}.$$

Легко проверить, что $c_{kls}=-c_{slk}=-c_{skl}=c_{lks}=c_{lsk}=-c_{ksl}$, с другой стороны $c_{kls}=c_{ksl}$, поэтому $c_{kls}=0$. Тогда будем иметь: $X_k=a_{kl}x^l+A_k(\overline{w})$, $a_{kl}=a_{lk}=\mathrm{const}$. Затем найденное подставляем в (20)

$$\varepsilon_l(A_l(\overline{w}_i)-A_l(\overline{w}_j))+\varepsilon_l[a_{l1}(x_i^1-x_j^1)+\cdots+a_{ln}(x_i^n-x_j^n)]+$$
$$+\varepsilon_1a_{1l}(x_i^1-x_j^1)+\cdots+\varepsilon_na_{nl}(x_i^n-x_j^n)=2\varepsilon_l(x_i^l-x_j^l)\phi'_\theta(\theta,\overline{w}_i,\overline{w}_j).$$

Далее полученное равенство умножаем на $\varepsilon_k(x_i^k-x_j^k)$ и из него вычитаем это же равенство, но с индексом k, умноженное на $\varepsilon_l(x_i^l-x_j^l)$, при условии $k\neq l$:

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_k[\varepsilon_k(x_i^k-x_j^k)(A_l(\overline{w}_i)-A_l(\overline{w}_j))+(\varepsilon_la_{l1}+\varepsilon_1a_{1l})(x_i^k-x_j^k)(x_i^1-x_j^1)+\cdots\\ \qquad+(\varepsilon_la_{ln}+\varepsilon_na_{nl})(x_i^k-x_j^k)(x_i^n-x_j^n)]=\\ =\varepsilon_l[\varepsilon_k(x_i^l-x_j^l)(A_k(\overline{w}_i)-A_k(\overline{w}_j))+(\varepsilon_ka_{k1}+\varepsilon_1a_{1k})(x_i^l-x_j^l)(x_i^1-x_j^1)+\cdots\\ \qquad+(\varepsilon_ka_{kn}+\varepsilon_na_{nk})(x_i^l-x_j^l)(x_i^n-x_j^n)].\end{array}\right.$$

Сравнивая коэффициенты, будем иметь $n(n+1)/2+1$ независимых постоянных: $\varepsilon_la_{ls}+\varepsilon_sa_{sl}=0$, $s\neq l$, $\varepsilon_la_{ll}=\varepsilon_ka_{kk}$, $A_l(\overline{w})=A_l=\mathrm{const}$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений запишется так:

$$X=(a_{1k}\varepsilon_kx^k+A_1)\partial_{x^1}+\cdots+(a_{nk}\varepsilon_kx^k+A_n)\partial_{x^n}+\partial_{\overline{w}}.$$

Придавая постоянным значения 0 и 1, получаем $n(n+1)/2+2$ базисных операторов алгебры Ли, а должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие. □

Приступаем теперь к доказательству первой части теоремы. Функциональное уравнение (2.1) удобно переписать в виде:

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)(X_1(i)-X_1(j))+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)(X_n(i)-X_n(j))+\\ \qquad+W(i)F_1+W(j)F_2=0,\end{array}\right. \tag{21}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta},\ F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \tag{22}$$

Из (1.6) и (1.8), очевидно, следуют аналитичность функций (2.8) и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда имеем разложение в ряд Тейлора ([12], гл. 11):

(23)

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(\theta, w_i, w_j) = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2} D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots \\ F_2(\theta, w_i, w_j) = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2} D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots \end{array}\right.$$

Отметим, что случай $n = 2$ был рассмотрен в работе [6]. Далее подробно разбирается случай $n = 3$, а затем для произвольного n.

Рассмотрим случай $n = 3$. Разложения (7) и (23) подставляем в тождество (21) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i^1, x_i^2, x_i^3 x_j^1, x_j^2, x_j^3. Эта задача существенно упрощается применением математического пакета программ MAPLE 17 ([13], гл. 8).

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 0:

$$W(w_j) f_2(w_i, w_j) + W(w_i) f_1(w_i, w_j) = 0.$$

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 1:

$$\begin{array}{l} D_1(W)(w_i) f_1(w_i, w_j) + \varepsilon_1(X_1(w_i) - X_1(w_j)) = 0, \\ D_1(W)(w_j) f_2(w_i, w_j) - \varepsilon_1(X_1(w_i) - X_1(w_j)) = 0, \\ D_2(W)(w_i) f_1(w_i, w_j) + \varepsilon_2(X_2(w_i) - X_2(w_j)) = 0, \\ D_2(W)(w_j) f_2(w_i, w_j) - \varepsilon_2(X_2(w_i) - X_2(w_j)) = 0, \\ D_3(W)(w_i) f_1(w_i, w_j) + \varepsilon_3(X_3(w_i) - X_3(w_j)) = 0, \\ D_3(W)(w_j) f_2(w_i, w_j) - \varepsilon_3(X_3(w_i) - X_3(w_j)) = 0. \end{array}$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_2 D_1(X_2)(w_i)+\varepsilon_1 D_2(X_1)(w_j)=0,\\
\varepsilon_3 D_1(X_3)(w_i)+\varepsilon_1 D_3(X_1)(w_j)=0,\\
\varepsilon_3 D_2(X_3)(w_i)+\varepsilon_2 D_3(X_2)(w_j)=0,\\
D_{12}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+\varepsilon_2 D_1(X_2)(w_i)+\varepsilon_1 D_2(X_1)(w_i)=0,\\
D_{13}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+\varepsilon_3 D_1(X_3)(w_i)+\varepsilon_1 D_3(X_1)(w_i)=0,\\
D_{23}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+\varepsilon_3 D_2(X_3)(w_i)+\varepsilon_2 D_3(X_2)(w_i)=0,\\
D_{12}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+\varepsilon_2 D_1(X_2)(w_j)+\varepsilon_1 D_2(X_1)(w_j)=0,\\
D_{13}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+\varepsilon_3 D_1(X_3)(w_j)+\varepsilon_1 D_3(X_1)(w_j)=0,\\
D_{23}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+\varepsilon_3 D_2(X_3)(w_j)+\varepsilon_2 D_3(X_2)(w_j)=0,\\
\varepsilon_1 D_{11}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+2D_1(X_1)(w_i)=0,\\
\varepsilon_2 D_{22}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+2D_2(X_2)(w_i)=0,\\
\varepsilon_3 D_{33}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+2D_3(X_3)(w_i)=0,\\
\varepsilon_1 D_{11}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+2D_1(X_1)(w_j)=0,\\
\varepsilon_2 D_{22}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+2D_2(X_2)(w_j)=0,\\
\varepsilon_3 D_{33}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)+2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+\\
+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+2D_3(X_3)(w_j)=0,\\
2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+\\
+D_1(X_1)(w_i)+D_1(X_1)(w_j)=0,\\
2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+\\
+D_2(X_2)(w_i)+D_2(X_2)(w_j)=0,\\
2W(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)+2W(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)+\\
+D_3(X_3)(w_i)+D_3(X_3)(w_j)=0.
\end{gathered}
$$

Из получененой системы равенств, очевидно, следует:

$$
\begin{gathered}
D_{12}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=D_{12}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=0,\\
D_{13}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=D_{13}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=0,\\
D_{23}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=D_{23}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=0,\\
\varepsilon_1 D_{11}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=-\varepsilon_1 D_{11}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=\\
=D_1(X_1)(w_j)-D_1(X_1)(w_i),\\
\varepsilon_2 D_{22}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=-\varepsilon_2 D_{22}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=\\
=D_2(X_2)(w_j)-D_2(X_2)(w_i),\\
\varepsilon_3 D_{33}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=-\varepsilon_3 D_{33}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=\\
=D_3(X_3)(w_j)-D_3(X_3)(w_i).
\end{gathered}
$$

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 3, а затем комбинируем получаемые уравнения и разделяем переменные:

$$
\begin{gathered}
2D_1(W)(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)=2D_1(W)(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)=-p,\\
2D_2(W)(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)=2D_2(W)(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)=-r,\\
2D_3(W)(w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j)=2D_3(W)(w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j)=-q,\\
D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(W)(w_i)f_1(w_i,w_j)=0,\ D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(W)(w_j)f_2(w_i,w_j)=0,
\end{gathered}
$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=1,2,3$, $p,q,r=\mathrm{const}$.

Аналогично поступаем с более высокими степенями.

Полученные результаты можно просуммировать и записать компактно:

$$D_{\alpha_1}(W)(w_i)(F_1 - f_1(w_i, w_j) - D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta) = 0,$$
$$D_{\alpha_1}(W)(w_j)(F_2 - f_2(w_i, w_j) - D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta) = 0,$$

$$D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_i)(F_1 - f_1(w_i, w_j) - D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta) = 0,$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_j)(F_2 - f_2(w_i, w_j) - D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta) = 0,$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_i)D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_j)D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}(W)(w_i)F_1 = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}(W)(w_j)F_2 = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, 3,\ n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Запишем теперь коэффициенты для произвольного n.

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 0:

$$W(w_j)f_2(w_i, w_j) + W(w_i)f_1(w_i, w_j) = 0.$$

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 1:

$$\left\{\begin{array}{c} D_1(W)(w_i)f_1(w_i, w_j) + \varepsilon_1(X_1(w_i) - X_1(w_j)) = 0, \\ D_1(W)(w_j)f_2(w_i, w_j) - \varepsilon_1(X_1(w_i) - X_1(w_j)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_n(W)(w_i)f_1(w_i, w_j) + \varepsilon_n(X_n(w_i) - X_n(w_j)) = 0, \\ D_n(W)(w_j)f_2(w_i, w_j) - \varepsilon_n(X_n(w_i) - X_n(w_j)) = 0. \end{array}\right. \tag{24}$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед переменными со степенью 2:

$$\left\{\begin{array}{c} D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_i)f_1(w_i, w_j) = D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_j)f_2(w_i, w_j) = 0,\ \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \varepsilon_\alpha D_{\alpha\alpha}(W)(w_i)f_1(w_i, w_j) = -\varepsilon_\alpha D_{\alpha\alpha}(W)(w_j)f_2(w_i, w_j) = \\ = D_\alpha(X_\alpha)(w_j) - D_\alpha(X_\alpha)(w_i). \end{array}\right. \tag{25}$$

Сравниваем коэффициенты перед переменными со степенью 3, а затем комбинируем получаемые уравнения и разделяем переменные:

$$\left\{\begin{array}{c} 2D_\alpha(W)(w_i)D_\alpha(f_1)(w_i, w_j) = 2D_\alpha(W)(w_j)D_\alpha(f_2)(w_i, w_j) = -p_\alpha, \\ D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(W)(w_i)f_1(w_i, w_j) = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(W)(w_j)f_2(w_i, w_j) = 0, \end{array}\right. \tag{26}$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1, \dots, n,\ p_\alpha = \mathrm{const}$.

Аналогично поступаем в случае более высоких степеней.

Полученные результаты можно просуммировать и записать компактно:

$$\left\{\begin{array}{l} D_{\alpha_1}(W)(w_i)(F_1 - f_1(w_i, w_j) - D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta) = 0, \\ D_{\alpha_1}(W)(w_j)(F_2 - f_2(w_i, w_j) - D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta) = 0, \end{array}\right. \tag{27}$$

$$\left\{\begin{array}{l} D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_i)(F_1 - f_1(w_i, w_j) - D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta) = 0, \\ D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_j)(F_2 - f_2(w_i, w_j) - D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta) = 0, \end{array}\right. \tag{28}$$

$$D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_i)D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2}(W)(w_j)D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0, \tag{29}$$

$$D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}(W)(w_i)F_1 = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}(W)(w_j)F_2 = 0, \tag{30}$$

причем $\alpha_s = 1, \dots, n,\ s = 1, 2, 3, 4, \dots$ Отметим, что $F_1 \neq 0$ или $F_2 \neq 0$, поскольку иначе для метрической функции $\partial f/\partial w_i = 0$ или $\partial f/\partial w_j = 0$, то есть она будет вырожденной, следовательно из (30) получаем

$$D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}(W) = 0,\ \alpha_s = 1, \dots, n,\ s = 3, 4, \dots \tag{31}$$

Из систем (27), (28) и (30) следует:

$$D_{\delta_1\delta_2\dots}(f_1)(w_i, w_j) = 0,\ D_{\delta_1\delta_2\dots}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

где $\delta_s = 1$, $s = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Из равенств (26), (29), (31) и леммы 2 имеем эквивалентность $D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0 \Leftrightarrow D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0$.

1. Пусть сначала $(D_1(f_1)(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_2)(w_i, w_j))^2 = 0$. Тогда из невырожденности метрической функции следует $f_1(w_i, w_j) \neq 0$, $f_2(w_i, w_j) \neq 0$. Из леммы 2 и предыдущих неравенств тогда получаем $(D_1(W))^2 + \cdots + (D_n(W))^2 + (D_{11}(W))^2 + \cdots + (D_{nn}(W))^2 \neq 0$. Поэтому из систем (24) и (26) будем иметь:

$$f_1(w_i, w_j) = \frac{\mu(w_i) - \mu(w_j)}{\nu(w_i)},\ f_2(w_i, w_j) = \frac{\mu(w_j) - \mu(w_i)}{\nu(w_j)}.$$

Найденное подставляем в (22):

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f}{\partial w_i} / 2\frac{\partial f}{\partial \theta} = f_1(w_i, w_j) = \frac{\mu(w_i) - \mu(w_j)}{\nu(w_i)},$$

$$F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f}{\partial w_j} / 2\frac{\partial f}{\partial \theta} = f_2(w_i, w_j) = \frac{\mu(w_j) - \mu(w_i)}{\nu(w_j)}.$$

Приводя к общему знаменателю, имеем

$$\nu(w_i)\frac{\partial f}{\partial w_i} = 2(\mu(w_i) - \mu(w_j))\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \nu(w_j)\frac{\partial f}{\partial w_j} = -2(\mu(w_i) - \mu(w_j))\frac{\partial f}{\partial \theta}. \tag{32}$$

Складывая эти два выражения, приходим к дифференциальному уравнению

$$\nu(w_i)\frac{\partial f}{\partial w_i} + \nu(w_j)\frac{\partial f}{\partial w_j} = 0,$$

интегрируя которое, будем иметь ([14], гл. 5):

$$f(\theta, w_i, w_j) = \varphi(\theta, M(w_i) - M(w_j)),\ M'(w) = 1/\nu(w).$$

Подставляя найденное в (32), получаем уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2(\mu(w_i) - \mu(w_j))\frac{\partial \varphi}{\partial \theta},\ u = M(w_i) - M(w_j), \tag{33}$$

из которого следует

$$\mu(w_i) - \mu(w_j) = \psi(\theta, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / 2\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Это равенство дифференцируем по w_i и по w_j: $\mu'(w_i) = M'(w_i)\psi'_u$, $\mu'(w_j) = M'(w_j)\psi'_u$, откуда получаем

$$\mu'(w_i)/M'(w_i) = \psi'_u,\ \mu'(w_j)/M'(w_j) = \psi'_u.$$

Потом приравниваем левые части и разделяем переменные: $\mu'(w)/M'(w) = \alpha = \mathrm{const}$. Интегрируя, получаем $\mu(w) = \alpha M(w) + \beta$, $\beta = \mathrm{const}$. Найденное подставляя в (33):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2\alpha u\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение ([14], гл. 5), имеем

$$f(i, j) = \chi(\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 - \alpha(M(w_i) - M(w_j))^2).$$

Отметим, что $\alpha \neq 0$, поскольку иначе метрическая функция будет вырожденной. Затем вводим следующие замену координат и масштабное преобразование метрической функции: $\varepsilon = -\alpha/|\alpha|$, $\sqrt{|\alpha|}M(w) = \overline{w} \to w$. В итоге получаем метрическую функцию (9).

2. Пусть теперь $D_1(f_1)(w_i, w_j) \neq 0$ и $D_1(f_2)(w_i, w_j) \neq 0$. Из (29) тогда следует: $D_{\alpha_1\alpha_2}(W) = 0$, значит, справедлива

Лемма 4. *Если* $D_{\alpha_1\alpha_2}(W) = 0$, $\alpha_1, \alpha_2 = 1, \dots, n$, *то выполняется неравенство* $(D_1(W))^2 + \dots + (D_n(W))^2 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $(D_1(W))^2+\dots+(D_n(W))^2 = 0$. С учетом (29) получаем противоречие к лемме 3. □

Дифференцируя уравнения в системе (26) по переменным w_i и w_j, получаем

$$D_\alpha(W)(w_i)\frac{\partial D_\alpha(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = D_\alpha(W)(w_j)\frac{\partial D_\alpha(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0,\ \alpha = 1, \dots, n,$$

Из леммы 4 тогда следует: $\dfrac{\partial D_\alpha(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0$ и $\dfrac{\partial D_\alpha(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0$, то есть $D_\alpha(f_1)(w_i, w_j) = D_\alpha(f_1)(w_i)$ и $D_\alpha(f_2)(w_i, w_j) = D_\alpha(f_2)(w_j)$. Затем с полученным результатом возвращаемся в систему (26), откуда получаем $D_\alpha(f_1)(w) = D_\alpha(f_2)(w)$.

Из (2.12) и выше найденного, получаем

$$2D_\alpha(W)(w)D_\alpha(f_1)(w) = -p_\alpha. \tag{34}$$

Следует заметить, что, в силу леммы 4 можно считать $D_1(W)(w) \neq 0$. Тогда из системы (24) с учетом (34) получаем:

$$f_1(w_i, w_j) = 2(X_1(w_i) - X_1(w_j))D_1(f_1)(w_i)/p_1,$$
$$f_2(w_i, w_j) = 2(X_1(w_j) - X_1(w_i))D_1(f_1)(w_j)/p_1.$$

Найденное подставляем в выражения (22) с учетом рядов Тейлора (23):

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f}{\partial w_i}/2\frac{\partial f}{\partial \theta} = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i)\theta =$$
$$= 2(X_1(w_i) - X_1(w_j))D_1(f_1)(w_i)/p_1 + D_1(f_1)(w_i)\theta,$$
$$F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f}{\partial w_j}/2\frac{\partial f}{\partial \theta} = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_j)\theta =$$
$$= 2(X_1(w_j) - X_1(w_i))D_1(f_1)(w_j)/p_1 + D_1(f_1)(w_j)\theta,$$

откуда следует

$$\begin{cases} \frac{1}{D_1(f_1)(w_i)}\frac{\partial f}{\partial w_i} = 2(2(X_1(w_i) - X_1(w_j))/p_1 + \theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{D_1(f_1)(w_j)}\frac{\partial f}{\partial w_j} = 2(2(X_1(w_j) - X_1(w_i))/p_1 + \theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{35}$$

В данной системе $2(X_1(w_i)-X_1(w_j))/p_1+\theta \neq 0$ и $2(X_1(w_j)-X_1(w_i))/p_1+\theta \neq 0$, поскольку противное противоречит неравенствам (4). Складывая выражения из (35), приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{D_1(f_1)(w_i)}\frac{\partial f}{\partial w_i} + \frac{1}{D_1(f_1)(w_j)}\frac{\partial f}{\partial w_j} = 4\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Осуществим замену координат: $\int D_1(f_1)(w)dw = \overline{w}$. В новых координатах получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}_j} - 4\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

откуда после интегрирования имеем ([14], гл. 5):

$$f(\theta, \overline{w}_i, \overline{w}_j) = \varphi(\theta e^{4\overline{w}_i}, \theta e^{4\overline{w}_j}).$$

Очевидно, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0$, где $u = \theta e^{4\overline{w}_i}$, $v = \theta e^{4\overline{w}_j}$, поскольку иначе $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}_i} = 4u\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}_j} = 4v\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$, что противоречит неравенствам (4). Этот интеграл подставляем в (35) с учетом выше сделанной замены и приводим подобные:

$$(p_1\theta - 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j)))u\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (p_1\theta + 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j)))v\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Из данного равенства следует

$$\frac{p_1\theta - 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j))}{p_1\theta + 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j))} = \eta(u,v) = v\frac{\partial\varphi}{\partial v}/u\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \tag{36}$$

Решим функциональное уравнение (36). Рассмотрим два случая: $X_1 = \mathrm{const}$ и $X_1 \neq \mathrm{const}$.

I. В первом случае имеем очевидное решение: $\eta(u,v) = 1$. Тогда уравнение (36) примет простой вид:

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial u} - v\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0,$$

интегрируя которое [3], имеем функцию

$$f(i,j) = \chi\left([\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]^2 e^{4(\overline{w}_i + \overline{w}_j)}\right).$$

Затем вводим масштабное преобразование метрической функции $\sqrt{\chi^{-1}(f)} \to f$ и замену координат $x^\alpha = x^\alpha$, $\overline{w} = w$. Таким образом, получаем метрическую функцию (10) $(n+1)$-мерного особого расширения псевдоевклидовой n-мерной геометрии.

II. Во втором случае продифференцируем (36) по переменным $\overline{w}_i$ и $\overline{w}_j$:

$$\frac{-4p\theta X_1'(\overline{w}_i)}{[p_1\theta + 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j))]^2} = 4u\eta_u'; \ \frac{4b\theta X_1'(\overline{w}_j)}{[p_1\theta + 2(X_1(\overline{w}_i) - X_1(\overline{w}_j))]^2} = 4v\eta_v'.$$

Далее делим первое равенство на второе:

$$-\frac{X_1'(\overline{w}_i)}{X_1'(\overline{w}_j)} = \frac{u\eta_u'}{v\eta_v'} = \psi(u,v). \tag{37}$$

Получено новое равенство, которое дифференцируем по $\overline{w}_i$, $\overline{w}_j$ и θ:

$$-\frac{X_1''(\overline{w}_i)}{X_1'(\overline{w}_j)} = 4u\psi_u', \ \frac{X_1''(\overline{w}_j)X_1'(\overline{w}_i)}{(X_1'(\overline{w}_j))^2} = 4v\psi_v', \ u\psi_u' + v\psi_v' = 0.$$

Комбинируя последние равенства, имеем:

$$\frac{X_1''(\overline{w}_i)}{X_1'(\overline{w}_i)} = \frac{X_1''(\overline{w}_j)}{X_1'(\overline{w}_j)} = \alpha = \mathrm{const}. \tag{38}$$

Если в (38) $\alpha = 0$, то из (37) следует, $\psi = a = \mathrm{const} \neq 0$, поэтому $-X_1'(\overline{w}_i) = aX_1'(\overline{w}_j)$. В новом равенстве, разделяя переменные, получаем $X_1' = m = \mathrm{const}$, $a = -1$. Тогда из (37) следует $\eta(u/v)$. Найденное подставляем в (36). После преобразований имеем $p_1 = 0$, что невозможно.

Если же в (38) $\alpha \neq 0$, то после интегрирования имеем: $X_1(\overline{w}) = me^{\alpha\overline{w}} + n$, где $m, n = \mathrm{const}$, $m \neq 0$. Найденное подставляем в (37). После преобразований получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\eta_u'}{u^{\frac{\alpha-4}{4}}} + \frac{\eta_v'}{v^{\frac{\alpha-4}{4}}} = 0. \tag{39}$$

Интегрируя уравнение (39), будем иметь:

$$\eta(u,v) = \tau(u^{\alpha/4} - v^{\alpha/4}).$$

Найденное теперь подставляем в (36):

$$\frac{p_1\theta - 2m(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})}{p_1\theta + 2m(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})} = \tau(u^{\alpha/4} - v^{\alpha/4}). \tag{40}$$

Далее (40) дифференцируем по $\overline{w}_i$, $\overline{w}_j$ и θ:

$$\frac{-p_1 m\alpha\theta e^{\alpha\overline{w}_i}}{[p_1\theta + 2m(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})]^2} = \alpha u^{\alpha/4}\tau', \ \frac{p_1 m\alpha\theta e^{\alpha\overline{w}_j}}{[p_1\theta + 2m(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})]^2} = -\alpha v^{\alpha/4}\tau',$$

$$\frac{4p_1 m\theta(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})}{[p_1\theta + 2m(e^{\alpha\overline{w}_i} - e^{\alpha\overline{w}_j})]^2} = \alpha(u^{\alpha/4} - v^{\alpha/4})\tau'.$$

Комбинируя эти равенства, получаем $\alpha = -4$. Тогда (40) принимает вид:

$$\frac{p_1uv - 2m(v-u)}{p_1uv + 2m(v-u)} = \eta(u,v) = \tau(u^{-1} - v^{-1}).$$

Подставляя найденное в (36), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{p_1uv - 2m(v-u)}{p_1uv + 2m(v-u)} = v\frac{\partial\varphi}{\partial v}/u\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Осуществляя замену $|p_1/(2m)|u \to u$, $|p_1/(2m)|v \to v$, имеем

$$\frac{uv - \varepsilon(v-u)}{uv + \varepsilon(v-u)} = v\frac{\partial\varphi}{\partial v}/u\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ \varepsilon = \pm 1. \tag{41}$$

Решение уравнения (41) ищем в виде:

$$\varphi(u,v) = \kappa\left(\sqrt{uv} + a_1\sqrt{\frac{u}{v}} + a_2\sqrt{\frac{v}{u}}\right).$$

Вычисляем производные:

$$\varphi_u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{v}{u}} + \frac{a_1}{\sqrt{uv}} - \frac{a_2\sqrt{v}}{u\sqrt{u}}\right)\kappa', \ \varphi_v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{a_1\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} + \frac{a_2}{\sqrt{uv}}\right)\kappa'.$$

Подставляем найденное в (41):

$$\frac{uv - \varepsilon(v-u)}{uv + \varepsilon(v-u)} = \frac{uv + a_1u - a_2v}{uv - a_1u + a_2v},$$

следовательно $a_1 = a_2 = \varepsilon$. Тогда имеем функцию

$$f(ij) = \chi\left([\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2\overline{w}_i + 2\overline{w}_j} + \varepsilon e^{2\overline{w}_i - 2\overline{w}_j} + \varepsilon e^{2\overline{w}_j - 2\overline{w}_i}\right). \tag{42}$$

Масштабное преобразование $\chi^{-1}(f) \to f$ и замена координат $x^\alpha = x^\alpha$, $\overline{w} \to w$ метрическую функцию (42) приводит к виду (11).

Доказательство первой части теоремы завершено.

3. Доказательство второй части теоремы

Ниже проводимое доказательство справедливо не только для аналитических функций, но и для дифференцируемых функций класса C^2.

Вычисление базисных операторов (12) и (13) алгебр Ли групп движений геометрий с метрическими функциями (9) и (10) проводится в работе [5], поэтому оно здесь опускается. Подробно вычисляем базисные операторы алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (11). Ниже полагаем $k, l = 1, \dots, n$.

Подставляем функцию (11) в функциональное уравнение (15):

(43)
$$\left\{ \begin{array}{c} \big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j))\big]e^{2w_i+2w_j} + \\ +\theta(W(i) + W(j))e^{2w_i+2w_j} + 2\varepsilon(W(i) - W(j))\,\mathrm{sh}(2w_i - 2w_j) = 0. \end{array} \right.$$

Продифференцируем равенство (43) по x_i^k:

$$\big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^k}(i) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^k}(i) + \varepsilon_k(X_k(i) - X_k(j))\big]e^{2w_i+2w_j} +$$
$$+[\theta W_{x^k}(i) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)(W(i) + W(j))]e^{2w_i+2w_j} + 2\varepsilon W_{x^k}(i)\,\mathrm{sh}(2w_i - 2w_j) = 0.$$

В найденном равенстве находим производную по x_j^l:

$$-\varepsilon_l X_{lx^k}(i) - \varepsilon_k X_{kx^l}(j) - 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)W_{x^k}(i) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)W_{x^l}(j) = 0,\ k \neq l, \tag{44}$$

$$X_{kx^k}(i) + X_{kx^k}(j) + 2(x_i^k - x_j^k)(W_{x^k}(i) - W_{x^k}(j)) + 2(W(i) + W(j)) = 0. \tag{45}$$

Дифференцируем (45) по w_i и по x_j^k, а также по x_i^k и по x_j^k, затем разделяем переменные, после чего уравнение (44) дифференцируем по x_i^l и по x_j^l:

$$W_{x^k w} = 0,\ W_{x^k x^l} = 0.$$

Интегрируя полученное, имеем:

$$W = a_1x^1 + \dots + a_nx^n + B(w),\ a_k = \mathrm{const}. \tag{46}$$

Выражение (46) подставляем в (44) и (45):

$$-\varepsilon_l X_{lx^k}(i) - \varepsilon_k X_{kx^l}(j) - 2a_k\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l) + 2a_l\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k) = 0,\ k \neq l, \tag{47}$$

$$X_{kx^k}(i) + X_{kx^k}(j) + 2(W(i) + W(j)) = 0. \tag{48}$$

Разделяем переменные:

$$X_{kx^l} = 2a_k\varepsilon_k\varepsilon_l x^l - 2a_l x^k - \varepsilon_k c_{kl},\ c_{kl} = -c_{lk},\ X_{kx^k} = -2(a_1x^1 + \dots + a_nx^n + B(w)).$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{array}{c} X_k = \varepsilon_k a_k(\varepsilon_1(x_1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x^n)^2) - 2x^k(a_1x^1 + \dots + a_nx^n) - \\ -\varepsilon_k c_{kl}x^l - 2B(w)x^k + C_k(w). \end{array} \tag{49}$$

Далее (46) и (49) подставляем в (43):

$$\big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(-2B(w_i)x_i^1 + C_1(w_i) + 2B(w_j)x_j^1 - C_1(w_j)) + \dots +$$
$$+\varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(-2B(w_i)x_i^n + C_n(w_i) + 2B(w_j)x_j^n - C_n(w_j))\big]e^{2w_i+2w_j} +$$
$$+\theta(B(w_i) + B(w_j))e^{2w_i+2w_j} +$$
$$+2\varepsilon(a_1x_i^1 + \dots + a_nx_i^n + B(w_i) - a_1x_j^1 - \dots - a_nx_j^n - B(w_j))\,\mathrm{sh}(2w_i - 2w_j) = 0.$$

Дифференцируя по x_i^1 дважды, получаем:

$$-2B(w_i) + B(w_i) + B(w_j) = 0.$$

Разделяя переменные, имеем $B(w) = b = \text{const}$. Тогда (43) примет вид:

$$\big[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(C_1(w_i) - C_1(w_j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(C_n(w_i) - C_n(w_j))\big]e^{2w_i+2w_j} +$$
$$+2\varepsilon(a_1x_i^1 + \cdots + a_nx_i^n - a_1x_j^1 - \cdots - a_nx_j^n)\,\mathrm{sh}(2w_i - 2w_j) = 0.$$

В этом равенстве дифференцируем теперь по x_i^k:

$$\varepsilon_k(C_k(w_i) - C_k(w_j))e^{2w_i+2w_j} + \varepsilon a_k(e^{2w_i-2w_j} - e^{-2w_i+2w_j}) = 0$$

или

$$C_k(w_i) - C_k(w_j) + \varepsilon\varepsilon_k a_k(e^{-4w_j} - e^{-4w_i}) = 0.$$

Разделяя переменные, будем иметь $C^k(w) = \varepsilon\varepsilon_k a_k e^{-4w} + c^k$. Тогда окончательно получаем:

$$\begin{array}{c} X_k = \varepsilon_k a_k(\varepsilon_1(x_1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) - 2x^k(a_1x^1 + \cdots + a_nx^n)- \\ -\varepsilon_k c_{kl}x^l - 2bx^k + \varepsilon\varepsilon_k a_k e^{-4w} + c^k. \\ W = a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + b. \end{array} \tag{50}$$

Придавая в (50) постоянным значаения 0 и 1, приходим к базисным операторам (14).

Доказательство второй части теоремы завершено.

Заключение

Выше поставленная задача об аналитическом вложении n-мерной псевдоевклидовой геометрии полностью решена. В результате получились $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности: евклидова, псевдоевклидова, особые $(n+1)$-мерные расширения евклидовой и псевдоевклидовой n-мерных геометрий, а также геометрии постоянных кривизн на псевдосфере. Аналогично можно поставить задачу об аналитическом вложении геометрий с метрическими функциями (10) и (11).

Выражаю благодарность Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

References

[1] G.G. Mikhailichenko, *On group and phenomenological symmetry in geometry*, Siberian Mathematical Journal, **25**:5 (1984), 99–113. MR0762243

[2] G.G. Mikhailichenko, *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*, https://arxiv.org/pdf/1602.02795, 2012.

[3] G.G. Mikhailichenko, *Two-dimensional geometry*, Soviet Math. Doklady, **24**:2 (1981), 346–348. MR0631804

[4] V.H. Lev, *Three-dimensional geometries in the theory of physical structures*, Vychisl. Sistemy, **125** (1988), 90–103. (in Russian). MR1002931

[5] V.A. Kyrov, *Functional equations in pseudo-Euclidean geometry*, Sib. Zn. Ind. Mat, **13**:4 (2010), 38–51. (in Russian). MR2841212

[6] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries*, Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, **23**:2 (2017), 167–181 (in Russian).

[7] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *The analytic method of embedding symplectic geometry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 657–672 (in Russian). DOI:https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.057

[8] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N,2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N+1,2)$*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **26**:3 (2016), 312–323 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160302

[9] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* (N, M) *into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* $(N + 1, M)$, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **27**:1 (2017), 42–53 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170104
[10] V.A. Kyrov, *The geometry of Helmgolz*, Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2011.
[11] L.V. Ovsyannikov, *A group analysis of differential equation*, M.: Nauka, 1978. MR0511921
[12] G.M. Fichtengolz, *A course of differential and integral calculus. T. 2*, M.: Phismhatgis, 1963.
[13] V. Dyakonov, *Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations*, M.: DMS, 2014.
[14] L.E. Elsgoltz, *Differential equations and calculus of variations*, M.: Nauka, 1969.

Vladimir Alexandrovich Kyrov
Gorno-Altaiisk State University,
st. Lenkina, 1,
649000, r. Altai, Gorno-Altaiisk, Russia
E-mail address: kyrovVA@yandex.ru