S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 786–796 (2018) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2018.15.064 MSC 20K01

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 2-РАНГА ДВА, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

Д.В. ЛЫТКИНА, А.И. СОЗУТОВ, А.А. ШЛЕПКИН

Abstract. It is proved that a periodic group of 2-rank two, saturated with finite simple groups, is locally finite and is isomorphic to one of the groups $L_2(Q)$, A_7, $L_3(P)$, $U_3(R)$, M_{11}, $U_3(4)$, where Q, P, R are suitable locally finite fields of odd characteristics and $|Q| > 3$.

Keywords: periodic group, saturation, simple groups

1. Введение

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G *насыщена группами из множества* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ [15]. Ранг максимальной элементарной абелевой p-подгруппы группы G называется ее *p-рангом.* Как показали Альперин, Брауэр и Горенстейн [19] конечными простыми группами 2-ранга 2, с точностью до изоморфизма, являются следующие группы: $L_2(q)$, A_7, $L_3(p)$, $U_3(r)$, M_{11}, $U_3(4)$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$.

В работе доказана теорема "переносящая" этот классический результат на периодические группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех периодических групп 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда с точностью до изоморфизмов*

$$\mathfrak{G} = \{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, $|Q| > 3$.

Sozutov, A.I., Lytkina, D.V., Shlepkin, A.A., 2-rank two periodic groups saturated with finite simple groups.

Работа поддержана РФФИ, проект № 15-01-04897-а.

Поступила 28 декабря 2017 г., опубликована 27 июля 2018 г.

1. Определения, известные факты, вспомогательные утверждения

Если группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$, то это множество называется *насыщающим множеством* для группы G [6].

Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{X}_G(1)$ обозначает множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идёт речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ [6]. Для группы G и множества групп $\mathfrak{X}$ запись $G \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{X}$ означает, что G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Соответственно запись $G \mathrel{\widetilde{\notin}} \mathfrak{X}$ означает, что G не изоморфна никакой группе из $\mathfrak{X}$.

Группа G называется *черниковской*, если G — конечное расширение прямого произведения A конечного числа r квазициклических групп. Очевидно, что A содержит любую полную абелеву подгруппу из G и является характеристической подгруппой в G. Она называется *полной частью* группы G. Число r называется *рангом* A [5, стр. 233].

Теорема Альперина-Брауэра-Горенстейна [19]:

Предложение 1. *Конечная простая группа* 2*-ранга* 2 *изоморфна одной из следующих групп:* $L_2(q)$, A_7, $L_3(p)$, $U_3(r)$, M_{11}, $U_3(4)$, *где* q, p, r *— нечетные и* $q > 3$.

Предложение 2. ([17]) *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Предложение 3. ([16, 11]) *Пусть* G *—* 2*-группа, содержащая максимальную конечную элементарную абелеву подгруппу. Тогда* G *— черниковская группа.*

Предложение 4. ([9, предлож. 2.8]) *Периодическая группа, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами, проста.*

Предложение 5. (В. Д. Мазуров, [9, предлож. 2.4]) *Пусть* H *— собственная нормальная подгруппа группы* G. *Если* $x^3 = 1$ *для любого элемента из* $G \setminus H$, *то* H *нильпотентна.*

Предложение 6. ([7, предлож. 8]) *Если в периодической группе* G *некоторая силовская* 2*-подгруппа конечна, то все силовские* 2*-подгруппы в* G *сопряжены.*

Предложение 7. ([14]) *Пусть* G *— бесконечная локально конечная группа, насыщенная группами диэдра. Тогда* $G = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, *где* A *— локально циклическая группа,* t *— инволюция и* $a^t = a^{-1}$ *для любого* $a \in A$.

Предложение 8. *Пусть локально конечная группа* G *насыщена группами из множества* $\mathfrak{M}$ *конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Тогда* G *изоморфна простой группе лиева типа.*

Доказательство. По предложению 4 G — простая группа. Она линейна по известной теореме Мальцева [10] и поэтому счётна (см. [23, теор. 1.L.2]). Следовательно, G является объединением возрастающей цепочки конечных групп, изоморфных группам из множества $\mathfrak{M}$. Из результатов работ [1, 2, 25, 21] вытекает, что G изоморфна группе лиева типа. Предложение доказано. □

Предложение 9. ([12]) *Периодическая группа, насыщенная группами из множества* $\{L_2(q) \mid q > 3\}$, *изоморфна группе* $L_2(Q)$ *для подходящего локально конечного поля* Q.

Предложение 10. ([8]) *Пусть* G *— периодическая группа, насыщенная группами из множества* $\{L_3(q),\ U_3(q) | q > 2\}$. *Тогда*

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_3(Q),\ U_3(Q) \mid Q \text{ — локально конечное поле}\}.$$

Пусть $GF(q)$ — конечное поле порядка q, $SL_3(q) = SL_3^+(q)$ — группа матриц размерности 3, определители которых равны единице, $SU_3(q) = SL_3^-(q)$ — группа унитарных матриц размерности 3 над полем $GF(q^2)$, т.е. подгруппа группы $SL_3(q^2)$, состоящая из матриц m, для которых $m\overline{m}^T$ — единичная матрица, где T означает транспонирование, а $\overline{m}$ получается из m заменой каждого её элемента m_{ij} на m_{ij}^q.

Обозначим через φ естественный гомоморфизм $SL_3(q^2)$ на $PSL_3(q^2)$ (с ядром, состоящим из скалярных матриц), и так же будем обозначать ограничение φ на $SL_3(q)$ и $SU_3(q)$: $SL_3(q)^\varphi = PSL_3(q) = L_3(q) = L_3^+(q)$ и $SU_3(q)^\varphi = PSU_3(q) = U_3(q) = L_3^-(q)$. Для нечётного q обозначим

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad j = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi,$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi.$$

Очевидно, $i, j, b, w \in L_3^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Определим

$$A = \langle i, j\rangle, \quad B = \langle w, j\rangle, \quad V = \langle b, w\rangle.$$

Предложение 11. *Пусть $L = L_3^\varepsilon(q)$, где q нечётно, i, j, b, w, A, B, V — элементы и подгруппы группы L, определённые выше, $D = C_L(A)$ и $N = N_L(A)$. Тогда*

(1) *A и B — четверные группы, т. е. элементарные абелевы подгруппы порядка 4, AB — группа диэдра порядка 8, порядок b равен 3, V — группа диэдра порядка 6;*

(2) *D — прямое произведение двух циклических групп порядков $q - \varepsilon 1$ и $(q - \varepsilon 1)/(3, q - \varepsilon 1)$, $N = N_L(D) = D \leftthreetimes V$ и порядок каждого элемента из $N \setminus D$ равен 3;*

(3) *Все инволюции и четверные подгруппы в L сопряжены, в L есть элемент порядка 8 и секционный ранг силовской 2-подгруппы из L равен 3;*

(4) *Существует такой элемент $v \in L$, для которого $A^v = B$, $j^v = j$ и $i^v = w$;*

(5) *Силовская 2-подгруппа группы L изоморфна либо полудиэдральной группе $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, либо сплетённой группе $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$;*

(6) *Если $(q, \varepsilon) \notin \{(3, +), (5, -)\}$, то для четверной подгруппы $C \neq A$ из N выполнено $L = \langle N, C_L(C)\rangle$. Если $(q, \varepsilon) = (3, +)$, то $L = \langle N, N_L(C)\rangle$. Если $(q, \varepsilon) = (5, -)$, то $\langle N, N_L(C)\rangle \simeq A_7$.*

Доказательство. Пункты 1 проверяется непосредственными вычислениями (см., напр., [7]). Пункты 2, 3, 5 доказаны в [18]. По п. 3 $B = A^x$ для некоторого элемента $x \in L$, а по п. 2 V^x действует дважды транзитивно на множестве инволюций из B. Отсюда вытекает 4.

6. Очевидно, что C содержит инволюцию t, не лежащую в $C_L(A)$, и

$$|C_N(t)| = |C_D(t)| = 2|C_D(w)|.$$

Непосредственно проверяется, что $|C_D(w)| = (q - \varepsilon 1)/(3, q - \varepsilon 1)$. Таким образом, $|C_N(C)| \leqslant 2(q - \varepsilon 1)/(3, q - \varepsilon 1)$. Поскольку A и C сопряжены в L, то $|C_L(C)| = (q - \varepsilon 1)^2/(3, q - \varepsilon 1)$, откуда $C_L(C) \not\leq N_L(A)$, за исключением случая $q = 3$, $\varepsilon = +$. Так как $N_L(A)$ не максимальна в L, только если $L \simeq U_3(5)$ [22] (стр. 378, 379), то это рассуждение не доказывает 6 только для случаев $(q, \varepsilon) \in \{(3, +), (5, -)\}$. Для них 6 легко проверить с помощью [24]. □

Предложение 12. *Пусть $G = L_2(q)$, где q — нечётное число, большее 3. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Силовская 2-подгруппа группы G является группой диэдра;*
(2) *Все инволюции в G сопряжены и, если a — инволюция из G, то $C_G(a)$ — группа диэдра, все четверные подгруппы в G самоцентрализуемы;*
(3) $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$ *для любых неперестановочных инволюций a, b из G; если $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$ для любых различных инволюций $a, b \in G$.*

Доказательство. Утверждения 1-2 хорошо известны, их доказательства можно найти, например, в [20]. Утверждения пункта 3 вытекают из утверждения 1 и списка максимальных подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [22, стр. 377]). Предложение доказано. □

Предложения 13 – 15 получены с помощью [24].

Предложение 13. *Пусть $G = M_{11}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Силовская 2-подгруппа группы G является полудиэдральной группой порядка 16;*
(2) *Все инволюции в G сопряжены и, если a — инволюция из G, то $C_G(a) \simeq GL_2(3)$;*
(3) *Если R — четверная подгруппа из G, то $N_G(R) \simeq S_4$.*

Предложение 14. *Пусть $G = A_7$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Силовская 2-подгруппа S группы G является группой диэдра порядка 8;*
(2) *Все инволюции в G сопряжены, и в G два класса сопряженных четверных подгрупп;*
(3) *Для любой четвеной подгруппы R из G период фактор-группы $N_G(R)/R$ равен 6 и $N_G(R)$ содержит подгруппу изоморфную S_4.*

Предложение 15. *Пусть $G = U_3(4)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Силовская 2-подгруппа S группы G имеет порядок 64 и является группой периода 4, все инволюции из S лежат в центре S и образуют четверную группу;*
(2) *Все инволюции в G сопряжены.*

2. Доказательство теоремы

Пусть G — контрпример к теореме. Положим

$$\mathfrak{A} = \{L_2(q) \mid q > 3,\ q - \text{ нечётное}\},$$
$$\mathfrak{B} = \{L_3(p), U_3(r) \mid p, r - \text{ нечётные}\},$$
$$\mathfrak{C} = \{\ A_7,\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

Лемма 1. 1. $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ *— насыщающее множество для группы G и попарные пересечения его подмножеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ равны пустому множеству;*

2. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$ *и существует такая группа $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, что $X \not\lesssim Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$.*

Доказательство. Первое утвержение леммы вытекает из предложения 1 и определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1), \mathfrak{C}(1)$. Второе утверждение леммы вытекает из условия насыщенности и предложения 10. Лемма доказана. □

Лемма 2. *G — бесконечная простая не локально конечная группа.*

Доказательство. Для конечных групп доказываемая теорема вытекает из предложения 1, поэтому группа G бесконечна и проста по предложению 4. В бесконечной локально конечной группе, удовлетворяющей условиям теоремы, из насыщающего множества очевидно можно исключить любое конечное число членов. Исключив из $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{C}$ заключаем, что теорема для локально конечных групп верна по предложению 8. Следовательно, группа G не локально конечна. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — различные инволюции из G. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности и лемме 1 $\langle x, y\rangle < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\}$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$. Согласно предложениям 11–14 в каждой из этих групп один класс сопряженных инволюций. Значит, инволюции x, y сопряжены в K, и лемма доказана. $\square$

Лемма 4. $U_3(4) \notin \mathfrak{M}(1)$ *и* $\mathfrak{C}(1) = \{A_7,\ M_{11}\}$.

Доказательство. Предположим, что $K = U_3(4) \in \mathfrak{M}(1)$ и S — силовская 2-подгруппа группы K. Согласно предложению 15 секционный ранг группы S равен 4, в то время как секционные ранги диэдральных, полудиэдральных и сплетенных 2-групп не превосходят 3, поэтому они не могут содержать S в качестве подгруппы. Отсюда заключаем, что S — силовская 2-подгруппа группы G. По предложению 6 силовские 2-подгруппы в G сопряжены, выберем среди них подгруппу $T = S^g \neq S$ с максимально возможным пересечением $D = S \cap T$. Допустим, что $D \neq 1$. В случае, когда $D \geq Z(S)$, выберем $x \in S \setminus D$ и $y \in T \setminus D$, если же $D \ngeq Z(S)$, пусть $x \in Z(S) \setminus D$, а y — элемент порядка 4 из $N_T(D)$. Согласно предложению 15 такой выбор возможен, при этом $x, y \in N_G(D)$ и $x^2, y^2 \in D$. Ввиду периодичности G подгруппа $R = \langle x, y, D\rangle$ конечна, содержит элемент порядка 4 и, в силу выбора подгруппы T, не является 2-группой. По условию насыщенности $R \leq L \in \mathfrak{M}(1)$. Силовская 2-подгруппа S_L в L содержит элемент порядка 4 и в силу строения S (предложение 15), S_L изоморфна S, а $L \simeq U_3(4)$. Однако в $U_3(4)$ силовские 2-подгруппы попарно взаимно просты, что противоречит строению подгруппы R. Полученное противоречие означает, что $D = 1$, силовские 2-подгруппы в G попарно взаимно просты и подгруппа $N_G(S)$ сильно вложена. В силу условия насыщенности, леммы 1 и строения группы $U_3(4)$ заключаем, что $C_G(S) \leq S$, $|N_G(S)/S| = 15$ и $|C_G(z)| = 320$ для любой инволюции $z \in G$. По предложению 2 G локально конечна и понятно, что в этом случае просто $G \simeq U_3(4)$. Это доказывает лемму. $\square$

Лемма 5. *Силовская 2-подгруппа S группы G потенциально может быть как конечной (вид 1-3), так и бесконечной (вид (4):*

(1) $S = \langle a, v \mid a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — *полудиэдральная группа;*
(2) $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — *сплетённая 2-группа;*
(3) S — *группа диэдра;*
(4) S — *черниковская группа ранга не более 2 и либо $S = (C \times C^i) \leftthreetimes \langle i\rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, i — инволюция, либо $S = C \leftthreetimes \langle j\rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, j — инволюция и $c^j = c^{-1}$ для любого $c \in C$.*

Доказательство. По условию теоремы S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Если S конечная группа, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены (предложение 6). По условию насыщенности и леммам 1, 4 $S < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11}\}$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$. Силовские 2-подгруппы этих групп указаны в предложених 11 – 14, и доказательство пунктов 1-3 леммы завершает простая проверка.

Если S бесконечна, то по предложению 2.2 S — черниковская группа 2-ранга 2. В силу условия насыщенности S является обьединением возрастающей цепочки конечных неабелевых 2-групп, являющихся пересечениями группы S с силовскими 2-подгруппами подходящих групп из $\mathfrak{M}(1)$. Поскольку полудиэдральные группы (группы типа 1 из леммы) возрастающих цепей составлять не могут, то имеется две возможности: S является либо обьединением возрастающей цепочки конечных сплетенных 2-групп (групп типа 2), либо обьединением возрастающей цепочки конечных

2-групп диэдра (групп типа 3). В первом случае $S = (C \times C^i) \leftthreetimes \langle i \rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, i — инволюция, во втором — $S = C \leftthreetimes \langle j \rangle$, C — квазициклическая 2-группа, j — инволюция и $c^j = c^{-1}$ для любого $c \in C$. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Нормализатор каждой четверной подгруппы в G бесконечен.*

Доказательство. В силу условия насыщенности конечными простыми группами каждая инволюция $z \in G$ содержится в некоторой четверной подгруппе $F = \langle z, f \rangle$. Поскольку G не локально конечна (лемма 2), то в силу предложения 2 подгруппа $R = C_G(z)$ бесконечна. Допустим, что подгруппа $N_G(F)$ конечна, тогда подгруппа $C_R(f)$ также конечна и по предложению 2 подгруппа R локально конечна.

Заметим, что порядок любой подгруппы X из $\mathfrak{B}(1)$, содержащей подгруппу F, ограничен некоторым числом m, зависящим от числа $|N_G(F)|$. Действительно, по п. (3) предложения 11 все четверные подгруппы в X сопряжены, а в силу п. (2) предложения 11 $|N_X(F)| = \frac{6(q+\varepsilon 1)(q-\varepsilon 1)}{(3,q-\varepsilon 1)} \leq |N_G(F)|$, из чего следует, например, $|X| < 486|N_G(F)|^4$.

В силу бесконечности и локальной конечности R любая ее конечная подгруппа K вместе с z содержится в конечной подгруппе M порядка, превосходящего число m и порядки подгрупп из $\mathfrak{C}(1)$. Подгруппа M, в свою очередь, по условию насыщенности содержится в некоторой подгруппе $L \in \mathfrak{M}(1)$, и в силу вышесказанного $M \leq L \in \mathfrak{A}(1)$. По п. 2 предложения 12 $C_L(z) = R \cap L$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle z, K \rangle \leq M \leq R \cap L$ и R насыщена группами диэдра. По предложению 7 $R = C_G(z) = D \leftthreetimes \langle t \rangle$, где t — инволюция, D — локально циклическая группа и для любого $d \in D$, $d^t = d^{-1}$. В силу леммы 3 доказанное свойство справедливо для любой инволюции $z \in G$, и потому для любой группы $X \in \mathfrak{M}(1)$ и любой инволюции $z \in X$ $C_X(z)$ — группа диэдра. В частности, силовская 2-подгруппа в X является диэдральной и по теореме Горенстейна-Уолтера ([3], стр. 27) $X \simeq L_2(q)$, q нечетно, $q > 3$, или $X \simeq A_7$. Однако в A_7 централизаторы инволюции не являются группами диэдра, вопреки доказанному выше. Следовательно, $X \not\simeq A_7$, по предложению 9 G изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q и не является контрпримером к теореме. Полученное противоречие означает, что подгруппа $N_G(F)$ не может быть конечной, и лемма доказана. □

Лемма 7. $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и F — четверная подгруппа из G. По предыдущей лемме подгруппа $C_G(F)$ бесконечна. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из $C_G(F)$, строго содержащая F. По условию насыщенности $K \leq X \in \mathfrak{M}(1)$, $X \notin \mathfrak{B}(1) = \varnothing$ и в силу п. (2) предложения 12 $X \notin \mathfrak{A}(1)$. Ввиду леммы 4 $X \simeq A_7$ или $X \simeq M_{11}$. В силу предложений 14 и 13 $|N_X(F)/F| = 6$ и период фактор-группы $N_X(F)/F$ равен 6. По теореме М. Холла ([13], теорема 18.4.8) группа $C_G(F)$ локально конечна и потому в ней есть конечные подгруппы порядка > 24, противоречие. Лемма доказана. □

По лемме 7 в G найдётся подгруппа K, изоморфная $U_3(q)$ или $L_3(q)$, где q нечётно. Отождествим указанную группу K с группой L из предложения 11 и будем далее использовать обозначения этого предложения: i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 8. *Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Достаточно доказать, что произвольная четверная подгруппа F из G сопряжена с подгруппой A. По лемме 3 все инволюции в G сопряжены, поэтому $A \cap F^g \geq \langle i \rangle$ для некоторого $g \in G$. Если $A = F^g$, то всё доказано. Если $A \neq F^g$, то ввиду условий подгруппа $K = \langle A, F^g \rangle$ конечна, по теореме Силова для подходящего элемента $h \in K$ группа $M = \langle A, F^{gh} \rangle$ является 2-подгруппой. Пусть S — силовская 2-подгруппа в G, содержащая M. Если S конечна, то в силу леммы 7 и предложений 6, 11 S — одного из видов 1, 2 леммы 5. Ввиду основного условия и леммы 7 $M \leq S < X \in \mathfrak{B}(1)$. По п. (3) предложения 11 A и F сопряжены в G.

Когда S бесконечна, воспользуемся п. (4) леммы 5. Если $M < S = C \leftthreetimes \langle j \rangle$, то A и F^{gh} сопряжены в S ввиду свойств группы $C \leftthreetimes \langle j \rangle$. Если $M < S = (C \times C^i) \leftthreetimes \langle i \rangle$, то M содержится в конечной сплетенной подгруппе R из S (выберем подгруппу R достаточно большого порядка), по условию насыщенности $M < R < X \in \mathfrak{B}(1)$ и A, F^{gh} сопряжены в X по п. (3) предложения 11. Лемма доказана.

□

Лемма 9. *$N = C_A \leftthreetimes V$, где C_A — бесконечная абелева группа ранга 2.*

Доказательство. Поскольку $C_A \cap V = 1$, $V \leq N = N_G(A)$ и $V \simeq \mathrm{Aut}\,(A)$, то $N = C_A \leftthreetimes V$. По лемме 8 $C_A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — бесконечная группа. Для любого $c \in C_A$ порядок элемента cb делится на 3, $cb \notin C_A$ и $\langle A, cb \rangle$ — конечная группа из N. По основному условию насыщенности $\langle A, cb \rangle < M \in \mathfrak{M}(1)$. Ввиду леммы 4 и предложений 11, 12, 13, 14 $|cb| = 3$. По предложению 5 C_A — нильпотентная группа, и как периодическая группа, C_A локально конечна. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из C_A достаточно большого порядка. Из основного условия следует, что $AK < M \in \mathfrak{B}(1)$, $K \leq M \cap C_A$ и по п. (2) предложения 11 $M \cap C_A$ — абелева группа ранга 2. Значит, и C_A — абелева группа ранга 2. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Подгруппа $N = N_G(A)$ содержится в собственной бесконечной простой локально конечной подгруппе M группы G, обладающей следующими свойствами:*

(1) *$M \,\tilde{\in}\, \{L_3(P), U_3(P)\}$, где P — локально конечное поле нечётной характеристики;*
(2) *Все инволюции, четверные подгруппы и силовские 2-подгруппы в группе M сопряжены;*
(3) *$N_G(F) < M$ для каждой четверной подгруппы $F < M$ и $N_G(M) = M$.*

Доказательство. В силу леммы 9 группа N счетна, и потому

$$(1) \qquad N = \cup N_k, \; C_A = \cup C_k, \text{ где } N_1 < N_2 < ..., \quad C_1 < C_2 < ..., \; C_k = N_k \cap C_A,$$

для подходящим образом выбранных конечных подгрупп $N_k = C_k \leftthreetimes V$ из N. Очевидно можно считать, что $A < C_1$, $|C_1| > \max(|A_7|, |M_{11}|, |U_3(5)|)$. В силу выбора C_1 по условию насыщенности имеем $C_1 < N_1 < M_1 \in \mathfrak{B}(1)$, и можем считать, что $C_1 = C_A \cap M_1$, $N_1 = N \cap M_1$ (выбросив, если есть необходимость, конечное число начальных членов ряда (1), поставив $M_1 \cap C_A$ вместо первоначальной подгруппы C_1 и перенумеровав оставшиеся члены ряда). Аналогично, $C_2 < N_2 < M_2 \in \mathfrak{B}(1)$ и повторив указанные процедуры получим $C_2 = C_A \cap M_2$, $N_2 = N \cap M_2$. Продолжая этот процесс построим ряд (1), согласованный с последовательностью подгрупп $M_k \in \mathfrak{B}(1)$ $(k = 1, 2, ...)$ так, что $C_k = C_A \cap M_k$ и $N_k = N \cap M_k$, при этом $V, A, B < M_k$.

Покажем, что подгруппы M_k $(k = 1, 2, ...)$ вложены друг в друга и составляют возрастающий ряд $M_1 < M_2 < \ldots < M_k < \ldots$. По п. (4) предложения 11 существуют элементы $v \in M_k$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in M_{k+1}$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $v_1 v^{-1} = c \in C_A$ и $v_1 = cv$. Так как C_A абелева (лемма 9), то

$$C_{M_{k+1}}(B) = (C_{M_{k+1}}(A))^{v_1} = (C_{M_{k+1}}(A))^{cv} = (C_{M_{k+1}}(A))^v,$$

и поскольку $C_{k+1} = C_{M_{k+1}}(A) > C_{M_k}(A) = C_k$, то

$$C_{M_{k+1}}(B) = (C_{M_{k+1}}(A))^v > (C_{M_k}(A))^v = C_{M_k}(B).$$

Таким образом, $C_{M_k}(B) < M_{k+1}$. Ввиду выбора C_1 выполняется $|M_k| > |U_3(5)|$ и по п. (3) предложения 11 получаем

$$M_k = \langle N_k, C_{M_k}(B)\rangle < \langle N_{k+1}, C_{M_{k+1}}(B)\rangle = M_{k+1}.$$

Следовательно,

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_k < \ldots . \tag{2}$$

Объединение $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ членов ряда (2) является простой локально конечной группой и по предложению 8 $M \mathrel{\tilde{\in}} \{L_3(P), U_3(P)\}$ для подходящего локально конечного поля P нечётной характеристики. Это доказывает п. (1) леммы.

Утверждение (2) леммы следует из свойств группы $L^{\epsilon}(P)$.

Докажем утверждение (3). $N_G(A) = N < M$ по построению подгруппы M и ввиду п. (2) леммы $N_G(F) < M$ для любой четверной подгруппы F из M. Если $x \in N_G(M)$ и $F = A^x$, то по п. (2) леммы $A^x = F^y$ для некоторого $y \in M$, $xy^{-1} = z \in N < M$ и $x = zy \in M$. Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть $K \in \mathfrak{B}(1)$ и $K \cap M$ содержит четверную подгруппу. Тогда $K < M$.*

Доказательство. Пусть, напротив, F — четверная группа из $K \cap M \neq K$. По лемме 10 (п. (3)) $N_K(F) < M$. По предложению 11 (пп. 1–4) $N_K(F)$ содержит четверную подгруппу H, такую, что $T = \langle F,\ H\rangle$ — группа диэдра порядка 8. По лемме 10 (пп. (2), (3)) $N_K(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_K(F), N_K(H)\rangle < M$. Поскольку $S \neq K$, то $K \simeq U_3(5)$, $S \simeq A_7$ и S — максимальная подгруппа в K (предложение 11 (п. 9)). Так как T — силовская 2-подгруппа из S, а силовская 2-подгруппа из K является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмём $x \in N_K(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 10, предложение 11 п. (3)). Выберем $y \in N_M(T) \setminus T$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T\rangle$ содержит силовскую 2-подгруппу из K, которая является полудиэдральной группой. Следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle < L \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in L$, но $x \notin M$, то L не лежит в M. Очевидно, L не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $L = \langle N_L(F), N_L(H)\rangle$ (предложение 11 п. (6)) и $L < M$, что невозможно. Следовательно, $K < M$. Лемма доказана. □

Лемма 12. *Если $M \cap M^x$ содержит четверную подгруппу, то $M = M^x$ и $x \in M$. Каждая четверная подгруппа F из G содержится в точно одной подгруппе M^x вместе со своим нормализатором $N_G(F)$. Более того, если K — произвольная 2-подгруппа из G и $K \cap M$ содержит четверную подгруппу, то $N_G(K) < M$.*

Доказательство. Пусть $x \in G$ и $M \cap M^x$ содержит четверную подгруппу F. Тогда начиная с некоторого натурального k все подгруппы M_{k+m} ряда (2) будут содержать F и в силу леммы 11 $M_{k+m} \leq M^x$. Поэтому $M \leq M^x$, аналогично $M^x \leq M$, $M = M^x$ и $x \in M$ по п. (3) леммы 10. Далее, по лемме 8 все четверные подгруппы в G сопряжены, поэтому $F = A^x$ для подходящего $x \in G$ и $F < M^x$, причем в силу доказанного выше такая подгруппа M^x единственна. Если $K \cap M \neq K$, то для $x \in N_K(K \cap M) \setminus M$ получаем $M \neq M^x$, но $M \cap M^x$ содержит четверную подгруппу, противоречие. Наконец, если $x \in N_G(K) \setminus M$, то $K < M \cap M^x$, противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 13. *$C_G(z) \not< M$ для каждой инволюции $z \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Поскольку в M все инволюции сопряжены и $N_G(M) = M$ (пп. (2), (3) леммы 10), то для любого $g \in G \setminus M$ подгруппа $M \cap M^g$ не содержит инволюций и подгруппа M сильно вложена в G. Поэтому, если

$L \in \mathfrak{M}(1)$, в $L \cap M$ есть инволюции и $L \not< M$, то $L \simeq L_2(5)$ и $L \cap M \simeq A_4$. Множество таких групп L очевидно непусто и ввиду сопряженности четверных подгрупп в M (п. 2 леммы 10) среди них есть L с пересечением $L \cap M = A \leftthreetimes \langle b \rangle$. В $L \setminus M$ есть инволюция k со свойством $b^k = b^{-1}$, а в M — инволюция w с тем же свойством $b^w = b^{-1}$ (п. (1) предложения 11). В силу периодичности G подгруппа $\langle b, k, w \rangle$ конечна и $\langle b, k, w \rangle < X \in \mathfrak{M}(1)$. Однако $X \cap M \not\simeq A_4$, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Лемма 14. *Силовская 2-подгруппа из M не является полудиэдральной группой.*

Доказательство. Предположим, что силовская 2-подгруппа S из M полудиэдральна. Пусть R — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S. Если $R \neq S$, то найдется $x \in N_R(S) \setminus S = N_R(S) \setminus M$ и $S \leq M \cap M^x$ вопреки лемме 11. Поэтому $S = R$ — силовская 2-подгруппа в G. По лемме 13 для некоторой инволюции $i \in M$, $C_G(i) \not\leq M$, $M \neq M^k$ для любого $k \in C_G(i) \setminus M$ (п.3 леммы 10) и $i \in M \cap M^k$. Выберем такой элемент $k \in G \setminus M$, для которого 2-подгруппа T из $M \cap M^k$ имеет максимально возможный порядок. Ввиду леммы 12 в $D = M \cap M^k$ нет четверных подгрупп, но с точностью до сопряженности в M можем считать, что $i \in T$, и T либо циклическая группа, либо группа кватернионов. Пусть $T = S \cap R$, где S и R — силовские 2-подгруппы из M и M^k соответственно.

Допустим, что $[S : T] = 2$, тогда $T \lhd S$, $T \lhd R$ и подгруппа $K = \langle S, R \rangle$ конечна. По условиям $K < L \in \mathfrak{M}(1)$. Если $L \in \mathfrak{B}(1)$, то в силу леммы 11 $L < M$ и $L < M^k$, противоречие. Следовательно, $|S| = 16$, $L \simeq M_{11}$ и $L \cap M = S$. По предложению 13 $K = C_L(i) \simeq GL_2(3)$, $T \simeq Q_8$ и в качестве k можно взять элемент a порядка 3 из K, где $T \leftthreetimes \langle a \rangle \simeq SL_2(3)$, который очевидно не содержится в M. Согласно предложению 11 $C_M(i) \simeq GL_2(P)$ и, значит, в $N_M(T)$ также есть элемент b порядка 3 инвертируемый инволюцией t, действие которого на T совпадает с действием элемента a. Очевидно, что $1 \neq [t, d] = t^{-1}d^{-1}td = tba^{-1}tab^{-1} = b^{-1}a^2b^{-1} \in C_G(T) \setminus M$. Значит, подгруппа $K_1 = \langle t, [t, d], T \rangle$ конечна, не содержится в M и содержит четверную подгруппу $\langle t, i \rangle$. По основному условию $K_1 < L \in \mathfrak{M}(1)$, и поскольку в $L_2(q)$, M_{11} и A_7 нет подгрупп изоморфных K_1, то $L \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 11 $L < M$ и $K_1 < M$, противоречие. Следовательно, случай $[S : T] = 2$ невозможен.

Рассмотрим случай, когда $[S : T] > 2$ и T — группа кватернионов. Заметим, что $Z(S) = \langle i \rangle = Z(R)$ и $\langle S, R \rangle \leq C_G(i)$. Обозначим $X = N_S(T)$, $Y = N_R(T)$. Легко убедиться, что $[X : T] = [Y : T] = 2$ и так как K/T — группа диэдра, то подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна. Случай, когда K — 2-группа невозможен, поскольку тогда она содержится в силовской 2-подгруппе $W < M^g$ и порядки 2-подгрупп XT и YT из пересечений $M \cap M^g$ и $M^k \cap M^g$ больше порядка T, вопреки выбору T. Следовательно, K не 2-группа, $\langle i \rangle = Z(K)$ и в K/T есть элемент aT нечетного порядка; случай $K \simeq GL_2(3)$ разобран выше и невозможен, значит, элемент a централизует T. По условию насыщенности $F < L \in \mathfrak{M}(1)$ и ввиду перечисленных свойств $L \in \mathfrak{B}(1)$. В силу леммы 11 $L < M^g$ для подходящего $g \in G$ и порядки 2-подгрупп XT из $M \cap M^g$ и YT из $M^k \cap M^g$ больше порядка T, окончательное противоречие для кватернионного случая.

Итак, $T = S \cap R = \langle t \rangle$ — циклическая подгруппа и $[S : T] > 2$. В S (и в группе R) подгруппа T в качестве нормальной подгруппы индекса 2 содержится как минимум в двух неизоморфных подгруппах X и Y. Если $|T| = 2$, то X — циклическая, Y — четверная. Если $|T| = 4$ и уравнение $x^2 = t$ в S разрешимо, то $X = \langle x \rangle$ — циклическая, Y — кватернионная или диэдральная, при неразрешимости уравнения $x^2 = t$ в S, X — кватернионная, Y — диэдральная. Если, наконец, $|t| > 4$, то X — циклическая, Y — кватернионная или диэдральная. Выберем неизоморфные подгруппы $X < S$ и $Y < R$ и положим $K = \langle X, Y \rangle$. Тогда K/T — конечная группа диэдра и подгруппы X/T и Y/T не сопряжены в K/T. Значит, в K/T есть нормальная неединичная 2-подгруппа Z/T, и пусть Z — ее полный прообраз. Пусть W_1 — силовская 2-подгруппы в G, содержащая 2-подгруппу XZ и $W_1 < M^g = M_1$, W_2 — силовская 2-подгруппы в G, содержащая 2-подгруппу XZ и $W_2 < M^h = M_2$. Поскольку $Z < M_1 \cap M_2$, то в силу выбора T имеем $M_1 = M_2 = M^g$. По тем же причинам $XT < M^g \cap M$ следует $M^g = M$, а из $YT < M^k \cap M^g$ вытекает $M^k = M^g = M$ — последнее противоречие, доказывающее лемму. $\square$

Лемма 15. *Контрпримера к теореме не существует.*

Доказательство. Согласно предложению 11 и лемме 14 силовская 2-подгруппа S в M является сплетенной группой, то есть $S = (C \times C^v) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где C — локально циклическая 2-группа (конечная, или бесконечная), $|C| \geq 4$ и v — инволюция. Ввиду леммы 13 в некоторых пересечениях $M \cap M^k$ $(k \in G \setminus M)$ силовские 2-подгруппы нетривиальны. Покажем, что это приводит к противоречию.

Допустим, что в $M \cap M^k$ есть элемент t порядка 8, $t \in S \cap R$, где S и R — силовские 2-подгруппы из M и M^k соответственно. Очевидно t^2 принадлежит базам сплетений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ групп S и R. Пусть $X = \langle x \rangle \times \langle t^2 \rangle \leq \tilde{S}$, $Y = \langle y \rangle \times \langle t^2 \rangle \leq \tilde{R}$, $|x| = |y| = 2$. В силу леммы 12 $x \notin R$, $y \notin S$. В силу периодичности подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна и $\langle t^2 \rangle \leq Z(K)$. Пусть $K < L \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку силовская 2-подгруппа в L содержит нециклическую абелеву подгруппу порядка 8 и не может быть ни диэдральной группой, ни полудиэдральной, то $L \in \mathfrak{B}(1)$. Но тогда по лемме 11 $L < M \cap M^k$ и $M = M^k$ в силу леммы 12, противоречие.

Пусть z — инволюция из пересечения $M \cap M^k$. Поскольку в M все инволюции сопряжены (лемма 10) то z является центральной инволюцией в некоторых силовских 2-подгруппах S из M и R из M^k. В этом случае z содержится в четверной подгруппе $X = \langle z, x \rangle$ и циклической подгруппе $Y = \langle y \rangle$ порядка 4 из баз сплетений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ групп S и R. Заметим, что элемент y можно выбрать за пределами подгруппы M, поскольку иначе четверная подгруппа из $\tilde{R}$ содержалась бы в $M \cap M^k$, вопреки лемме 12. В силу периодичности подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна, содержится в $C_G(z)$ и подгруппы $X/\langle z \rangle$, $Y/\langle z \rangle$ в диэдральной фактор-группе $K/\langle z \rangle$ не сопряжены. Обозначим через $\overline{T}$ максимальную нормальную в $\langle xy \rangle/\langle z \rangle$ 2-подгруппу, а через T — ее полный прообраз в K. Очевидно, что $T/\langle z \rangle$ — циклическая группа, T абелева и нормальна в K. Если T не циклическая группа, то T содержит характеристическую четверную подгруппу нормальную в K и по лемме 12 $K < M$, вопреки выбору y. Следовательно, $T = \langle t \rangle$ — циклическая группа. Поэтому подгруппы TY и TX являются неабелевыми силовскими в K и по теореме Силова $(TX)^g = TY$, для некоторого $g \in K$. Поскольку TY содержит по меньшей мере две циклических подгруппы порядка 4, а TX — две инволюции, то $|XT| > 8$ и $|T| \geq 8$. В силу выбора $y \notin M$, значит $M^g \neq M$. Однако $T < M \cap M^g$ вопреки разобранному выше случаю, окончательное противоречие. Лемма и вместе с ней теорема доказаны. $\square$

References

[1] V.V. Belyaev, *Lokal'no konechnye gruppy SHevalle*, Issledovaniya po teorii grupp, **150**, UNC AN SSSR, Sverdlovsk, (1984), 39–50. MR0818993

[2] A.V. Borovik, *Imbeddings of finite Chevalley groups and periodic linear groups*, Sib. mat. journal, **24**:6 (1983), 26–35.

[3] D. Gorenstejn, *Konechnye prostye gruppy*, M.: Mir, 1985.

[4] A. Kh. Zhurtov, *On regular automorphisms of order 3 and Frobenius pairs*, Siberian Mathematical Journal, **41**:2 (2000), 329–338. MR1762185

[5] M.I. Kargapolov, Merzlyakov, Yu. I., *Osnovy teorii grupp*, M.: Nauka, 1982. MR0677282

[6] A.A. Kuznetsov, K.A. Filippov, *Groups saturated by a given set of groups*, Siberian Eltctronic Mathematical Repots, **8** (2011), 230–246. MR2876557

[7] D.V. Lytkina, L.R. Tukhvatullin, K.A. Filippov, *On periodic groups, saturated by a finite set of finite simple groups*, Siberian Mathematical Journal, **49**:2 (2008), 394–399. MR2419663

[8] D.V. Lytkina, A.A. Shlepkin, *Periodic groups saturated with finite simple groups of types U_3 and L_3*, Algebra and Logic, **55**:4 (2016), 441–448. MR3711122
[9] D.V. Lytkina, A.A. Shlepkin, *Periodic groups saturated by linear groups of degree 2 and unitary groups of degree 3 over finite fields of odd characteristics*, Mat. trudy, **21**:1 (2018), 55–72.
[10] A.I. Mal'cev, *Ob izomorfnom predstavlenii beskonechnyh grupp matricami*, Mat. sb., **8**:3 (1940), 405–422.
[11] B. Dzh. Li, D.V. Lytkina, *O silovskih 2-podgruppah periodicheskih grupp, nasyshchennyh konechnymi prostymi gruppami*, Sibirskij matematicheskij zhurnal, **57**:6 (2016), 1313–1319. MR3614001
[12] A.G. Rubashkin, K.A. Filippov, *O periodicheskih gruppah, nasyshchennyh gruppami $L_2(p^n)$*, Sibirskij matematicheskij zhurnal, **46**:6 (2005), 1388–1392. MR2195037
[13] M. Holl, *Teoriya grupp*, M.: IL, 1962.
[14] A.K. Shlepkin, A.G. Rubashkin, *Ob odnom klasse periodicheskikh grupp*, Algebra i logika, **44**:1 (2005), 114–125. MR2165877
[15] A.K. Shlepkin, *Sopryazhenno biprimitivno konechnye gruppy, soderzhashchie konechnye nerazreshimye podgruppy*, Tret'ya mezhdunar. konf. po algebre. Sb. tez., Krasnoyarsk, 1993.
[16] V.P. Shunkov, *On one class of p - groups*, Algebra end logika, **9**:4 (1970), 484–496. MR0291265
[17] V.P. Shunkov, *O periodicheskih gruppah s pochti regulyarnoj involyuciej*, Algebra end logika, **11** (1972), 470–494. MR0320166
[18] Alperin J.L., Brauer R., Gorenstein D. *Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroup*, Trans. AMS, **151** (1970), 1–261. MR0284499
[19] J.L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein, *Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert*, Scripta Math. **29)**:3–4 (1973), 191–214. MR0401902
[20] Carter R. W., *Simple groups of Lie type*, New York: Wiley and Sons, 1972. MR0407163
[21] Hartley B., Shute G., *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type*, The Quarterly Journal of Mathematics Oxford (2), **35**:137 (1984), 49–71. MR0734665
[22] John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal, *The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups*, Cambridge: Cambridge university press, 2013. MR3098485
[23] Kegel O.N., Wehrfritz B.A.F., *Locally Finite Groups*, Amsterdam: North-Holland, 1973. MR0470081
[24] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219
[25] Thomas S., *The classification of the simple periodic linear groups*, Arch. Math., **41**:2 (1983), 103–116. MR0719412

Darya Viktorovna Lytkina
Siberian University telecommunications and informatics,
ul. Kirova, 86,
Novosibirsk, 630102 RUSSIA.
E-mail address: daria.lytkin@gmail.com

Anatoly I. Sozutov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660074, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: sozutov_ai mail.ru

Aleksei Anatolievich Shlepkin
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660074, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: shlyopkin@mail.ru