S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 797–800 (2018) УДК 512.542.52
DOI 10.17377/semi.2018.15.065 MSC 20D05

О СОПРЯЖЕННОСТИ Alt_5-ПОДГРУПП ИЗ ПОДГРУППЫ БОРОВИКА ГРУППЫ $E_8(q)$

А.В. КОНЫГИН

Abstract. Let $p \geq 7$ be a prime, $q = p^n$, where $n \in \mathbb{N}$, and k be the algebraic closure of the field $\mathbb{F}_q$. Let $G \cong E_8(k)$ be a simple linear algebraic group of type E_8 over the field k, and $\sigma : G \to G$ be a Steinberg endomorphism of G such that $G_\sigma \cong E_8(q)$. Let $M \cong (\mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Sym}_6).2$ be a Borovik subgroup of the group G and $M < G_\sigma$. An open question is whether the normal Alt_5-subgroup of M and a diagonal Alt_5-subgroup of $\mathrm{soc}(M)$ are conjugated in G_σ or not.

In 1998, D. Frey investigated conjugated classes of Alt_5-subgroups in $E_8(\mathbb{C})$. But, description of the classes with zero-dimensional centralizers was not obtained. In particular, it was not clear are Alt_5-subgroups of a Borovik subgroup of $E_8(\mathbb{C})$ with zero-dimensional centralizers conjugated in $E_8(\mathbb{C})$ or not. This problem was solved by G. Lusztig in 2003. Actually, the Lusztig result is more general and concerns regular homorphisms from Alt_5 to connected reductive algebraic group over an algebraically closed field k' of characteristic p where $p = 0$ or $p \geq 7$. The Lusztig result implies, in particular, that Alt_5-subgroups of a Borovik subgroup of $E_8(k')$ with zero-dimensional centralizers are conjugated in $E_8(k')$. We use the Lusztig result to prove that the normal Alt_5-subgroup of the group M is conjugated with a diagonal Alt_5-subgroup of $\mathrm{soc}(M)$ in G_{σ^m} where $m \leq 6$.

Keywords: $E_8(q)$, Borovik subgroup, subgroup Alt_5, conjugated class.

1. Введение

Пусть $p \geq 7$ — простое число, $q = p^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и k — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_q$. Пусть $G \cong E_8(k)$ — простая линейная алгебраическая

Konygin, A.V., On conjugacy of Alt_5-subgroups of Borovik subgroup of group $E_8(q)$.

Поступила 20 января 2018 г., опубликована 27 июля 2018 г.

группа типа E_8 над полем k и $\sigma : G \to G$ — такой эндоморфизм Стейнберга линейной алгебраической группы G, что $G_\sigma \cong E_8(q)$. Пусть $M \cong (\mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Sym}_6).2$ — подгруппа Боровика (см. [2]) группы G, содержащаяся в G_σ. Открытым является вопрос о сопряженности в G_σ нормальной Alt_5-подгруппы группы M и диагональной Alt_5-подгруппы группы $\mathrm{soc}(M)$.

В 1998 году Д. Фреем в работе [3] были исследованы классы сопряженных Alt_5-подгрупп группы $E_8(\mathbb{C})$, однако полное описание классов Alt_5-подгрупп группы $E_8(\mathbb{C})$ с централизаторами нулевой размерности получено не было. В частности, остался открытым вопрос о сопряженности (в $E_8(\mathbb{C})$) Alt_5-подгрупп из подгруппы Боровика группы $E_8(\mathbb{C})$, имеющих в $E_8(\mathbb{C})$ централизаторы нулевой размерности. Ответ был получен Дж. Люстигом в 2003 году в работе [5]. В этой работе был доказан результат, касающийся регулярных гомоморфизмов группы Alt_5 в связную редуктивную алгебраическую группу над алгебраически замкнутым полем k' характеристики p, где $p = 0$ или $p \geq 7$, из которого следует, в частности, что Alt_5-подгруппы подгруппы Боровика группы $E_8(k')$, имеющие централизаторы нулевой размерности, сопряжены в $E_8(k')$. Используя этот результат Дж. Люстига, в настоящей работе доказывается, что нормальная Alt_5-подгруппа группы M сопряжена с диагональной (определение см. ниже) Alt_5-подгруппой группы $\mathrm{soc}(M)$ в G_{σ^m} для $m \leq 6$.

Для произвольной конечной группы G в работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G, для групп A и B через $A.B$ обозначается произвольная группа G с нормальной подгруппой H такой, что $H \cong A$ и $G/H \cong B$ (ср. [1]). В выражениях вида $A_1.A_2.A_3.\ldots.A_n$ будем предполагать левую ассоциативность, т. е. $A_1.A_2.A_3 = (A_1.A_2).A_3$ и т. д.

Пусть A и B — группы. Подгруппу D прямого произведения групп A и B назовем *диагональной*, если $A \cap D = B \cap D = 1$ и AB совпадает с DA или DB.

Пусть A — нормальная Alt_5-подгруппа определённой выше группы M, B — нормальная Alt_6-подгруппа группы M, R — нормальная Sym_6-подгруппа группы M. Из [2] следует, что $C_G(A) = C_{G_\sigma}(A) = R$. Пусть D — произвольная диагональная Alt_5-подгруппа группы $A \times B$.

Теорема 1. *Подгруппы A и D группы G_σ сопряжены в группе G_{σ^m}, где $m \leq 6$.*

2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы будет удобно разбить на ряд утверждений.

Лемма 1. *Централизатор $C_G(D)$ конечен.*

Доказательство. Группа $A \times B$ состоит из полупростых элементов (см. [2]). В частности, все элементы группы D являются полупростыми.

Согласно [2, (1.5)] все нетривиальные элементы группы $A \times B$ содержатся в $\theta_1^G \cup \ldots \cup \theta_8^G$, где θ_1, ..., θ_8 определены в [2, (1.5)] и имеют следующие порядки: $|\theta_1| = |\theta_2| = 2$, $|\theta_3| = |\theta_4| = 3$, $|\theta_5| = |\theta_6| = 4$, $|\theta_7| = 5$, $|\theta_8| = 6$.

Группа D является $\{2,3,5\}$-группой. Определим в каких классах сопряженных элементов группы G лежат нетривиальные элементы группы D. Очевидно, что 5-элементы из $D \setminus \{1\}$ лежат в классе θ_7^G. Покажем, что 2-элементы из $D \setminus \{1\}$ лежат в классе θ_1^G, а 3-элементы из $D \setminus \{1\}$ лежат в классе θ_3^G. Пусть χ — брауэров характер, соответствующий характеру присоединенного представления группы G на её алгебре Ли. Тогда χ определён лишь на полупростых элементах группы G и принимает значения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Согласно [2] имеем: $\chi(\theta_1) = -8$, $\chi(\theta_2) = 24$, $\chi(\theta_3) = -4$, $\chi(\theta_4) = 5$, $\chi(\theta_5) = 0$, $\chi(\theta_6) = -4$, $\chi(\theta_7) = -2$, $\chi(\theta_8) = -3$.

Пусть $A_1 \times B_1$ — цоколь подгруппы Боровика группы $E_8(\mathbb{C})$ и χ_1 — присоединенный характер для $E_8(\mathbb{C})$. Из [4, Table 2.2] следует, что если $g \neq 1$ — 2-элемент из A_1, то $\chi_1(g) = -8$; если $g \neq 1$ — 2-элемент из B_1, то $\chi_1(g) = -8$; если $g \neq 1$ — 2-элемент из $(A_1 \times B_1) \setminus (A_1 \cup B_1)$, то $\chi_1(g) = -8$. Поскольку $p \geq 7$ и D является $\{2, 3, 5\}$-группой, значения присоединенного характера, по существу, не зависят от характеристики поля. В частности, если g — 2-элемент из $(A \times B) \setminus (A \cup B)$, то $\chi(g) = -8$. Следовательно, все 2-элементы из $D \setminus \{1\}$ попадают в класс θ_1. Аналогично, из [4, Table 2.2] следует, что если $g \neq 1$ — 3-элемент из A_1, то $\chi_1(g) = -4$; если $g \neq 1$ — 3-элемент из B_1, то $\chi_1(g) = 5$; если g — 3-элемент из $(A_1 \times B_1) \setminus (A_1 \cup B_1)$, то $\chi_1(g) = -4$, и, следовательно, если g — 3-элемент из $(A \times B) \setminus (A \cup B)$, то $\chi(g) = -4$. Таким образом, все 3-элементы из $D \setminus \{1\}$ попадают в класс θ_3^G.

Итак, неединичные элементы группы D содержатся в $\theta_1^G \cup \theta_3^G \cup \theta_7^G$. Следовательно, по [2, (1.9)] получаем, что централизатор $C_G(D)$ конечен. Утверждение доказано. □

Лемма 2. *Существует g из G со свойством $A^g = D$.*

Доказательство. Пусть G — связная редуктивная линейная алгебраическая группа типа E_8 над алгебраически замкнутым полем k. Согласно [5] гомоморфизм из Alt_5 в G называется *регулярным*, если его образ не содержится в подгруппе Леви собственной параболической подгруппы группы G. По утверждению [5, Lemma 1.5] гомоморфизм ψ из Alt_5 в G является регулярным тогда и только тогда, когда группа $C_G(\psi(\mathrm{Alt}_5))/Z(G)$ конечна. В [5, 4.5] показано, что, с точностью до сопряжения в G, существует в точности один регулярный гомоморфизм из Alt_5 в G. В частности, все подгруппы группы G, изоморфные Alt_5 и имеющие в G конечный централизатор, сопряжены в G. Поэтому, с учетом предыдущей леммы, существует g из G со свойством $A^g = D$. Утверждение доказано. □

Лемма 3. *Пусть g из G со свойством $A^g = D$ и m — наименьшее целое число такое, что $\sigma^m(g) = g$ (то есть со свойством $g \in G_{\sigma^m}$). Тогда $m \leq 6$.*

Доказательство. Если $\sigma(g) = g$, то всё доказано. Предположим, что $\sigma(g) \neq g$.

Пусть $h \in G_\sigma$. Тогда

$$h^g \in G_\sigma \iff \sigma(h^g) = h^g \iff \sigma(g^{-1})h\sigma(g) = g^{-1}hg \iff [\sigma(g)g^{-1}, h] = 1.$$

Так как для любого $a \in A$ имеем $a^g \in D \leq G_\sigma$, то $\sigma(g)g^{-1} \in C_G(a)$. Следовательно,

$$\sigma(g)g^{-1} \in C_G(A) = C_{G_\sigma}(A) = R.$$

Поскольку порядки элементов из R не превосходят 6, получаем $|\sigma(g)g^{-1}| \leq 6$.

Пусть $i, j \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $\sigma^i(g)\sigma^j(g^{-1}) \in C_G(A) = C_{G_\sigma}(A)$. Пусть $a \in A$. Сначала индукцией по i докажем, что $\sigma^i(g)\sigma^{i-1}(g^{-1}) \in C_G(a)$ для $i \in \mathbb{N}$. При $i = 1$ справедливость утверждения следует из доказанного выше. Пусть $i \geq 2$ и для всех $k < i$ доказано $\sigma^k(g)\sigma^{k-1}(g^{-1}) \in C_G(a)$. Тогда

$$[a, \sigma^i(g)\sigma^{i-1}(g^{-1})] = [\sigma(a), \sigma^i(g)\sigma^{i-1}(g^{-1})] = \sigma([a, \sigma^{i-1}(g)\sigma^{i-2}(g^{-1})]) = \sigma(1) = 1.$$

Таким образом, для $a \in A$ и $i \in \mathbb{N}$ имеем $[a, \sigma^i(g)\sigma^{i-1}(g^{-1})] = 1$. Покажем теперь, что $[a, \sigma^i(g)\sigma^j(g^{-1})] = 1$. Действительно,

$$a^{-1}\sigma^{i-1}(g)\sigma^i(g^{-1})a\sigma^i(g)\sigma^{i-1}(g^{-1}) = 1$$

и, поэтому,

$$\sigma^i(g)^{-1}a\sigma^i(g) = \sigma^{i-1}(g)^{-1}a\sigma^{i-1}(g)$$

и

$$a^{\sigma^i(g)} = a^{\sigma^{i-1}(g)},$$

для любого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$a^g = a^{\sigma(g)} = \cdots = a^{\sigma^{i-1}(g)} = a^{\sigma^i(g)}.$$

В частности, для $i, j \geq 0$ получаем $a^{\sigma^i(g)} = a^{\sigma^j(g)}$ и, поэтому,

$$[a, \sigma^i(g)\sigma^j(g^{-1})] = 1.$$

Теперь покажем, что $\sigma^i(g)g^{-1} = g\sigma^{m-i}(g^{-1})$. Действительно,

$$\sigma^i(g)g^{-1} = \sigma^i(g)\sigma^m(g^{-1}) = \sigma^i(g\sigma^{m-i}(g^{-1})) = g\sigma^{m-i}(g^{-1})$$

поскольку $g\sigma^{m-i}(g^{-1}) \in G_\sigma$.

Покажем, что

$$(\sigma^i(g)g^{-1})(\sigma^j(g)g^{-1}) = \sigma^{i+j}(g)g^{-1}.$$

Действительно,

$$(\sigma^i(g)g^{-1})(\sigma^j(g)g^{-1}) = (\sigma^i(g)g^{-1})(g\sigma^{m-j}(g^{-1}))$$
$$= \sigma^i(g)\sigma^{m-j}(g^{-1}) = \sigma^{m-j}(\sigma^{i+j-m}(g)g^{-1}) = \sigma^{i+j}(g)g^{-1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\{\sigma^i(g)g^{-1} \mid i \in \mathbb{Z}\} = \langle \sigma(g)g^{-1} \rangle$$

и $m = |\sigma(g)g^{-1}|$. Утверждение доказано. □

Теперь справедливость теоремы следует из приведённых выше лемм.

References

[1] J. H. Conway [et. al.], *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[2] A. V. Borovik, *A maximal subgroup in the simple finite group* $E_8(q)$, Contemporary Mathematics, **131** (1992), Pt. 1, 67–79. MR1175763

[3] D. D. Frey, *Conjugacy of* Alt_5 *and* $SL(2,5)$ *Subgroups of* $E_8(\mathbb{C})$, Mem. Amer. Math. Soc.,**133**: 634 (1998). MR1423302

[4] D. D. Frey, R. L. Griess, *Conjugacy classes of elements in the Borovik group*, J. Algebra, **203**:1 (1998), 226–243. MR1620658

[5] G. Lusztig, *Homomorphisms of the alternating group* A_5 *into reductive groups*, J. Algebra, **260** (2003), 298–322. MR1976697

Anton Vladimirovich Konygin
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.,
620990, Ekaterinburg, Russia,
Ural State University,
19 Mira Str.,
620002, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: konygin@imm.uran.ru